

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ  
имени М.В. Ломоносова  
ФИЛИАЛ МГУ В ГОРОДЕ БАКУ

**А.В. Зотеев, А.А. Складкин**

**ЛЕКЦИИ  
ПО КУРСУ ОБЩЕЙ ФИЗИКИ**

**Механика.  
Электричество и магнетизм**



Москва  
Физический факультет МГУ  
2014

УДК 531.537

ББК 22.3

**А.В. Зотеев, А.А. Склянкин**

*Лекции по курсу общей физики. Механика. Электричество и магнетизм. Учебное пособие. – Издательство МГУ им. М.В. Ломоносова, филиал МГУ в г. Баку, 2014. – 242 с.*

Научный редактор: д. ф.-м. н., профессор *О.Б. ТАГИЕВ*

Рецензенты:

В.В. СУРИКОВ, д. ф.-м. н., профессор физического факультета МГУ им. М.В. Ломоносова;

Д.В. БЕЛОВ, к. ф.-м. н., доцент физического факультета МГУ им. М.В. Ломоносова

Рекомендовано Учебно-методической комиссией  
физического факультета МГУ им. М.В. Ломоносова

Настоящее учебное пособие полностью соответствует программе курса общей физики по разделам «*Механика. Электричество и магнетизм*», который уже многие годы один из авторов читает студентам химического факультета МГУ им. М.В. Ломоносова. Пособие предназначено для студентов химического факультета филиала МГУ имени М.В. Ломоносова в городе Баку, обучающихся по программе бакалавриата, а также может быть полезно, как мы надеемся, широкому кругу студентов физических и химических специальностей ВУЗов естественнонаучного профиля.

*Оригинал-макет подготовлен авторами*

© А.В. Зотеев, А.А. Склянкин, 2013

© Филиал МГУ им. М.В. Ломоносова в городе Баку, 2014

### От авторов

Настоящее учебное пособие – это развернутый конспект лекций по разделам «Механика» и «Электромагнетизм», читаемых одним из авторов студентам химического факультета филиала МГУ в городе Баку. Содержание курса соответствует государственной университетской программе курса общей физики для химиков МГУ им. Ломоносова. Курс разработан и много лет читается в Москве заведующим кафедрой общей физики профессором П.К. Кашкаровым. Несмотря на то, что можно было бы рекомендовать по нему длинный перечень учебной литературы<sup>\*)</sup>, мы сочли возможным предложить своё видение способа изложения традиционного материала.

К этому нас подтолкнула необходимость учесть конкретный уровень базовой подготовки (в том числе математической) выпускников современных непрофильных школ, а также многолетний опыт преподавательской работы с абитуриентами и старшими школьниками. В отличие от подчас сухого академического способа изложения материала в нашем пособии используется более эмоциональный стиль, приближающий текст к разговорной речи. Многие вопросы нам казалось полезным “проговорить” более подробно и возможно даже избыточно дотошно, чем это принято в традиционно рекомендуемых учебных пособиях, снабдить их детально разобранными примерами.

Кроме того мы старались особо **выделять** и чётко формулировать **законы** и **определения**. Мы умышленно избегали длинных математических выводов и обращали внимание на физический смысл результатов и следствий из них. По возможности, указывали на практическое и научное применение изучаемых законов, отмечали их место в общей физической картине мира. Конечно, предложенный стиль изложения понравится не всем (иначе не бывает). Но, работая над пособием, мы всегда думали – для чего и для кого мы пишем. И всегда пытались ставить себя на место тех, для кого это пособие предназначено – вчерашних школьников нынешних студентов.

Авторы глубоко признательны рецензентам проф. В.В. Сурикову и доц. Д.В. Белову за ценные дискуссии и сделанные полезные замечания. Мы также выражаем искреннюю благодарность ректору Филиала МГУ им. М.В. Ломоносова в городе Баку профессору Наргиз-ханум Пашаевой за внимание к нашей работе и помощь в издании данного учебного пособия.

**А.В. Зотеев, А.А. Скланкин**

---

<sup>\*)</sup> Прежде всего, это: П.К. Кашкаров, А.И. Ефимова. «Механика и электромагнетизм». М., изд. МГУ, 2010, а также хорошо известный классический курс И.В. Савельева: Курс общей физики. т.1, 2, М., 1986 и другие издания.

## **Часть 1. Механика Ньютона**

*“Если я видел дальше, чем другие, то лишь потому, что стоял на плечах Гигантов” –*

**Исаак Ньютон**

### **Введение**

Предметом механики является изучение простейшей формы движения в природе – механической, т.е. связанной с изменением положения тел в пространстве. Содержанием этой части курса является классическая механика, ведущая своё начало от Г. Галилея (1564 – 1642) и И. Ньютона (1643 – 1727). Классическая механика изучает законы движения макроскопических тел (т.е. состоящих из огромного количества атомов).

Механика как наука развилась гораздо раньше других областей физики, и причиной тому – большая наглядность используемых представлений и законов. Немалую роль в установлении законов механики сыграли астрономические наблюдения и исследования, не требовавшие в те времена больших материальных затрат, а также развитие техники, диктуемое практическими нуждами прогресса общества.

Надо сказать, что наглядность представлений классической механики о пространстве и времени, как о формах существования материи, а также их полное соответствие нашим повседневным, «обывательским» наблюдениям, играет двоякую роль в процессе познания природы. С одной стороны, это обстоятельство облегчает трактовку законов классической физики. С другой стороны, наоборот, затрудняет познавательный переход к представлениям микромира и случаю движения с очень большими скоростями ( $v \approx c$ ). Микромир является объектом изучения квантовой механики, а движение тел с большими скоростями – предмет «релятивистской» теории («специальной теории



относительности)<sup>\*)</sup>. Квантовая механика и релятивистская теория – это новые, более высокие степени приближения в изучении природы по сравнению с классической механикой. Но они ни в какой мере не исключают «старой» теории, не говоря уж о том, что отталкиваются от неё. Физика ведь вообще наука экспериментальная. Теория возникает как обобщение накопленных опытных фактов, новая теория обобщает старые теории. Любая физическая теория, описывая принятую ею модель внешнего мира, имеет определённые границы применимости, в рамках которых удовлетворительно описывает эту модель, объясняя известные и предсказывая новые опытные результаты.

И если оказывается, что новая теория является более общей, чем старая, то это вовсе не означает, что старая никуда не годится. Каждая из них работает в определённых условиях, и не беда, если старая является «предельным случаем» другой (новой). Так обстоит дело со взаимоотношениями между теорией относительности, квантовой механикой и классической механикой. Последняя прекрасно описывает явления природы, пока скорости движения гораздо меньше скорости света и пока мы не пытаемся иметь дело с отдельными атомами и элементарными частицами. Впрочем, даже в последнем случае бывают такие ситуации, когда «возмущения» в результаты измерений, вносимые квантовой природой этих частиц незначительны и лежат в пределах погрешностей эксперимента<sup>\*\*)</sup>. Тогда классическая механика является хорошим приближением для описания движения этих частиц, например, движения электрически заряженных частиц в электрических и магнитных полях при условии  $v \ll c$ . Во многих случаях результаты, учитывающие квантовые эффекты и

---

<sup>\*)</sup> В обоих случаях приходится существенно изменять наши представления о пространстве и времени.

<sup>\*\*)</sup> О погрешностях эксперимента вам предстоит подробнее узнать в процессе работы в физическом практикуме.

конечность скорости света, являются лишь небольшим уточнением к выводам классической механики.

Таким образом, практическое применение законов классической механики выходит за рамки строгих границ её применимости. При этом всё же надо учитывать, что результаты, даваемые классической механикой, являются лишь первым приближением, которое может быть исправлено законами квантовой и релятивистской теории.

Традиционное деление классической механики предполагает изучение кинематики, статики и динамики. В настоящем курсе статика не рассматривается, её вы изучали в школе, а в рамках классической механики её можно считать частным случаем динамики.

### § 1. Кинематика материальной точки

*“Незнание движения необходимо  
влечёт незнание природы” –*  
Аристотель (IV век до н.э.)

*“Дайте мне материю и движение,  
и я построю Вселенную”–*  
Рене Декарт (XVII век н.э.)

Кинематика – это раздел механики, в котором устанавливаются законы механического движения тел без анализа причин, вызвавших это движение. Задачей кинематики является разработать способы описания движения тел, т.е. определять положение, скорость, ускорение, ... (так называемые кинематические характеристики движения) и отвечать на вопрос «как?», оставив до поры вопрос «почему?» открытым. Анализ причин того или иного типа механического движения проводится в разделе «Динамика» – он ещё у нас впереди.

#### 1.1. Основные понятия кинематики

➡ **(Опр.)** *Механическое движение – это изменение положения тел в пространстве (т.е. относительно других тел) с течением времени*

Мы видим, что «арена событий» механики – пространство и время. И уже в силу своего определения всякое движение носит относительный характер! Насколько движение абсолютно в философском смысле («всё течёт, всё изменяется»), настолько оно относительно в смысле представлений физических (относительно других тел!).

Простейшей *моделью* реального *тела*, с которой начинается построение механики, является *материальная точка* (МТ).

➡ **(Опр.)** *Материальная точка – физическое тело, размерами которого в условиях конкретной задачи можно пренебречь*

Часто говорят, что «это такие тела, размеры которых пренебрежимо малы по сравнению с характерными для данной задачи расстояниями». Важно, чтобы размеры и форма тела были бы несущественны при ответе на конкретный вопрос задачи. Одно и то же тело в разных случаях можно принимать за материальную точку, а в других нет! Например, при определении периода движения Земли вокруг Солнца, Земля может рассматриваться как МТ. Однако при выяснении времени суточного оборота Земли вокруг своей оси считать её материальной точкой уже бессмысленно, несмотря на возможность использования той же гелиоцентрической системы отсчёта и большом расстоянии между Солнцем и Землёй.

Механическое движение может быть определено только по отношению к *системе отсчёта (СО)*.

► **(Опр.) Система отсчёта включает тело отсчёта (ТО), а также прибор для измерения времени**

Выбор тела отсчёта предполагает и выбор точки начала отсчёта. Выбирается также и начало отсчёта времени.

Важно подчеркнуть, что выбирается именно тело отсчёта, а не только одна точка пространства. С телом отсчёта связывают систему координат (СК), которая необходима для использования математического аппарата описания движения. Эта связь однозначно определит положение системы координат. С точкой отсчёта можно связать лишь одну из точек СК, но не положение её осей.

Одно и то же движение будет происходить по-разному, и будет описываться разными уравнениями в разных системах отсчёта. Чаще всего используются системы отсчёта: «лабораторная» (связанная с помещением, в котором проводится исследование), «геоцентрическая» (связанная с Землёй), «гелиоцентрическая» (она же «Коперникова», связанная с Солнцем).

## § 1. Кинематика материальной точки

Мы начнём описание механических движений именно с кинематики материальной точки. Забегая вперёд, скажем, что и в важном и распространённом случае поступательного движения твёрдого тела\*) размеры и форма тела также не играют роли при кинематическом описании его движения.

► **(Опр.) Траектория – это линия в пространстве, вдоль которой движется материальная точка**

Другими словами – это след, который оставила бы в пространстве движущаяся частица. Математически траектория может быть задана уравнением кривой в некоторой системе координат, описывающим взаимосвязь координат МТ друг с другом. Например, в простейшем случае движения по плоскости ( $XOY$ ):

$$y = f(x). \quad (1.1)$$

Существует также так называемая "параметрическая" форма аналитического задания линии в пространстве:

$$\begin{aligned} x &= f_1(t); \\ y &= f_2(t); \\ z &= f_3(t), \end{aligned} \quad (1.1,a)$$

где  $t$  – некоторый общий параметр, в частности, им может служить время.

В зависимости от вида траектории различают движения **прямолинейные и криволинейные**. Примерами важных случаев криволинейного движения являются движения по окружности, параболе, циклоиде.

Подчеркнём, что **вид траектории зависит от выбора системы отсчёта**. Этому можно привести много примеров. В частности, если систему координат связать с движущейся материальной точкой, то траекторией является точка – она ведь покоится в этой системе. Поэтому необходимо помнить, что **решение любой задачи,**

---

\*) Смысл этих терминов и само это движение мы будем обсуждать несколько позже.

связанной с движением, может быть осуществлено лишь в какой-либо конкретной системе отсчёта. Удобный выбор системы отсчёта может предопределить успех решения.

## 1.2. Линейные кинематические характеристики движения

Как мы уже отмечали, в выбранной  $CO$  с телом отсчёта обычно связывают ту или иную систему координат. Тогда пространственное положение материальной точки « $m$ » можно задать её координатами. Например, в прямоугольной декартовой системе координат – это три числа  $\{x, y, z\}$  – её проекции на оси координат  $OX$ ,  $OY$  и  $OZ$ . Положение точки можно задать также и радиус-вектором  $\vec{r}$ , проведённым из начала координат к материальной точке  $m$  (см. рис. 1.1).

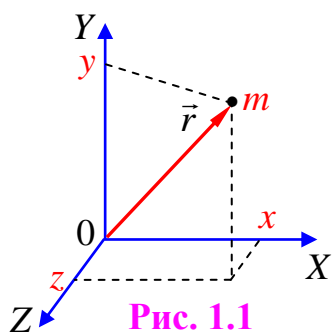


Рис. 1.1

### 1.2.1. Радиус-вектор

➔ Связь радиус-вектора с координатами точки математически записывается так:

$$\vec{r} = x \cdot \vec{e}_x + y \cdot \vec{e}_y + z \cdot \vec{e}_z, \quad (1.2)$$

где  $x, y, z$  – координаты МТ, равные проекциям радиус-вектора  $\vec{r}$  на оси  $OX$ ,  $OY$  и  $OZ$ ; а  $\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$  – единичные векторы («орты») соответствующих направлений.

Основной (но не единственной) задачей механики является нахождение координат (или радиус-вектора) движущейся точки в любой момент времени – установление кинематического **закона движения**:

$$\begin{cases} x = x(t); \\ y = y(t); \\ z = z(t). \end{cases} \quad \text{или} \quad \vec{r} = \vec{r}(t). \quad (1.3)$$

Часто приходится иметь дело с движением МТ по плоскости или вдоль заданной линии. В этих случаях законом движения являются всего две или одна функция координат от времени.

## § 1. Кинематика материальной точки

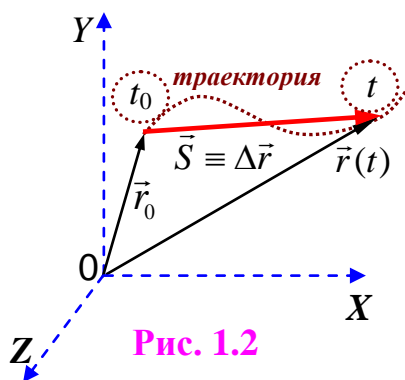
### 1.2.2. Путь

- (Опр.) Путь – это длина участка траектории между начальным и конечным положениями

Путь (будем обозначать его  $\Delta l$ ) – величина скалярная !

### 1.2.3. Перемещение

- (Опр.) Перемещением за промежуток времени  $\Delta t = t_2 - t_1$  называется вектор  $\Delta \vec{r}$ , соединяющий положение точки в момент времени  $t_1$  с её положением в момент времени  $t_2$



Вектор перемещения, как ясно из определения и рисунка 1.2, равен  $\Delta \vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$ . Он может быть задан, как любой вектор, его проекциями на оси системы координат:

$$\Delta x = x_2 - x_1, \Delta y = y_2 - y_1, \Delta z = z_2 - z_1.$$

Можно использовать также и разложение вектора перемещения  $\Delta \vec{r}$  на составляющие – компоненты по соответствующим координатным направлениям.

Пусть момент времени  $t_1$  выбран в начальной точке траектории движения МТ, а  $t_2$  в произвольной. Тогда их обозначают  $t_0$  и  $t$ , соответственно. В школьном курсе само перемещение вы обозначали иначе –  $\vec{S}$ . Смысл нового обозначения  $\Delta \vec{r}$  ясен из рисунка 1.2 – этот вектор представляет собой *приращение* радиус-вектора материальной точки в процессе её движения:

$$\Delta \vec{r} = \vec{r}(t) - \vec{r}_0. \quad (1.4)$$

А  $\vec{r}_0$  здесь – определяет начальное положение материальной точки. Отсюда ясно – чтобы определить положение МТ в любой

момент времени, надо знать её перемещение и начальное положение:

$$\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \Delta\vec{r} \quad (1.4,a)$$

Закон движения, можно записать также в соответствующей координатной форме:

$$\begin{cases} x(t) = x_0 + \Delta x; \\ y(t) = y_0 + \Delta y; \\ z(t) = z_0 + \Delta z. \end{cases} \quad (1.3б)$$

Необходимо помнить, что в общем случае путь отличается от длины (модуля) вектора перемещения  $|\Delta\vec{r}|$ . Очевидно, всегда справедливо неравенство  $\Delta l \geq |\Delta\vec{r}|$ . Однако, если рассматривать всё более и более короткие интервалы времени  $\Delta t = t_2 - t_1 \rightarrow 0$ , то конечное положение точки будет приближаться к начальному, и разница между  $\Delta l$  и  $|\Delta\vec{r}|$  будет также стремиться к нулю.

Теперь посмотрим, как характеризовать быстроту изменения положения МТ в пространстве. Начнём с простейшего понятия.

### 1.2.4. Скорость

➡ **(Опр.) Средняя скорость – отношение перемещения к интервалу времени движения**

$$\vec{V}_{cp} = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} \quad (1.5)$$

Средняя скорость (за данное время, или на участке траектории) описывает движение без деталей, тогда как в течение времени от  $t_1$  до  $t_2$  оно может происходить по-разному, то замедляясь, то убаыстряясь.

☺ **Случай из американской жизни:**<sup>\*)</sup>

«Автомобиль был остановлен полицейским. Он подходит к машине и говорит: "Мадам (ибо за рулем была женщина), Вы нарушили правила уличного движения. Вы ехали со скоростью 90 километров в час". Женщина отвечает: "Простите, это невозможно. Как я

<sup>\*)</sup> Р. Фейнман «Фейнмановские лекции по физике», т. 1, с. 145.



## § 1. Кинематика материальной точки

могла делать 90 километров в час, если я еду всего лишь 7 минут!" ... Полицейский честно хочет доказать нарушительнице её вину и пытается объяснить ей, что означает скорость 90 километров в час, и говорит: "Я имел ввиду, мадам, что если бы Вы продолжали ехать таким же образом, то через час Вы проехали бы 90 километров." "Да, но я ведь затормозила и остановила машину, – может ответить она, – так что теперь-то я уж никак не могла бы проехать 90 километров в час". Нарушительница могла бы ответить и так: "Если бы я продолжала ехать, как ехала, еще час, то налетела бы на стену в конце улицы." .... Далее дискуссия развивается, следующим образом. Полицейский: "Разумеется, мадам, если бы Вы ехали таким же образом в течение часа, то налетели бы на стену, но за 1 секунду Вы бы проехали 25 метров, так что Вы делали 25 метров в секунду, и если бы продолжали ехать таким же образом, то в следующую секунду опять проехали бы 25 метров, а стена стоит гораздо дальше". "Но правила запрещают делать 90 километров в час, а не 25 метров в секунду." Да ведь это то же самое!"

Желание описать движение подробнее заставляет сужать рассматриваемый участок траектории (уменьшать временной интервал), т.е. вычислять среднюю скорость за всё более короткие промежутки времени. Так мы приходим к более детальной характеристике – скорости в данный момент времени или просто мгновенной скорости.

► **(Опр.) Мгновенная скорость – предельное значение средней скорости при уменьшении временного интервала  $\Delta t \rightarrow 0$  (на «бесконечно коротком» участке траектории):**

$$\vec{V} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} \quad (1.6)$$

В математике такой предел (если он существует) называется производной (в данном случае радиус-вектора) по времени, а процедура нахождения производной – дифференцированием. В физике приходится иметь дело с производными по разным переменным (время, координата, температура, ...), поэтому производную удобно обозначать с указанием по какой именно переменной ведется дифференцирование в данном случае. Символически это делается так:

$$\vec{V} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} \equiv \frac{d\vec{r}}{dt} \quad *) \quad (1.6,a)$$

\*) Символ "≡" означает знак тождественного равенства. Мы будем его использовать всякий раз, когда будем иметь дело просто с другим обозначением той же самой физической величины.

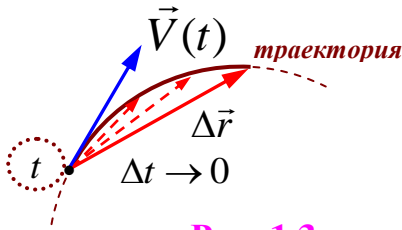


Рис. 1.3

Поскольку производные по времени в физике играют особую роль, их часто также обозначают точкой над дифференцируемой величиной:  $\vec{V} = \dot{\vec{r}}$ .

Как направлена мгновенная скорость?

По мере уменьшения интервала времени  $\Delta t$  вектор перемещения  $\Delta \vec{r}$  всё ближе «прижимается» к траектории (см. рис. 1.3). Поэтому из определения мгновенной скорости<sup>\*\*)</sup> следует, что *она всегда направлена по касательной к траектории.*

А ещё часто пользуются понятием *путевой скорости*, опять-таки средней и мгновенной (её-то и показывает, например, спидометр автомобиля). Путевая скорость – это скалярная величина равная отношению пройденного пути к соответствующему интервалу времени:

➔ (Опр.) 
$$v_{cp} = \frac{\Delta l}{\Delta t}. \quad (1.7, a)$$

➔ (Опр.) 
$$v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta l}{\Delta t} = \frac{dl}{dt} \quad (1.7, б)$$

Если учесть, что при  $\Delta t \rightarrow 0$  разница между путём и длиной вектора перемещения также стремится к нулю ( $\Delta l \approx |\Delta \vec{r}|$ ), то модуль мгновенной скорости равен производной пути по времени – т.е. мгновенной путевой скорости:

$$|\vec{V}| = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{|\Delta \vec{r}|}{\Delta t}; \quad v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta l}{\Delta t}; \quad \Rightarrow \quad |\vec{V}| = v \quad (1.8)$$

Как и любой вектор, вектор скорости может быть задан своими проекциями на координатные оси:

$$\vec{V} = V_x \cdot \vec{e}_x + V_y \cdot \vec{e}_y + V_z \cdot \vec{e}_z. \quad (1.9)$$

Эти проекции равны производным соответствующих координат по времени:

<sup>\*\*)</sup> Если не оговорено иное, то под термином скорость понимается именно мгновенная скорость !

## § 1. Кинематика материальной точки

$$V_x = \frac{dx}{dt}; \quad V_y = \frac{dy}{dt}; \quad V_z = \frac{dz}{dt} \quad (1.10)$$

Модуль вектора скорости, а значит и путевая скорость, связаны с проекциями скорости на координатные оси:

$$v = \sqrt{V_x^2 + V_y^2 + V_z^2}. \quad (1.11)$$

Зная мгновенную скорость как функцию времени, можно найти изменения координат:

$$\Delta x = \int_{t_1}^{t_2} V_x(t) dt; \quad \Delta y = \int_{t_1}^{t_2} V_y(t) dt; \quad \Delta z = \int_{t_1}^{t_2} V_z(t) dt, \quad (1.12)$$

а значит перемещение и пройденный путь:

$$\Delta l = \int_{t_1}^{t_2} v(t) dt \quad (1.13)$$

Здесь появилась ещё одна символика высшей математики, которой мы будем активно пользоваться и в дальнейшем – **интеграл**. С «технической» точки зрения интегрирование – операция обратная дифференцированию. То есть надо искать функцию, производная от которой совпадает с подынтегральным выражением (функцией  $v(t)$ , например). При этом всегда важно помнить, что **смысл операции интегрирования – вычисление суммы**, точнее предела последовательности сумм определённого вида. А именно произведений значений интегрируемой функции на малые приращения аргумента этой функции в рамках диапазона, указанного пределами интегрирования. Графически такая величина (значение интеграла) может быть вычислена как площадь под графиком интегрируемой функции (конечно же, в соответствующих единицах измерения!) – см. рис. 1.4.

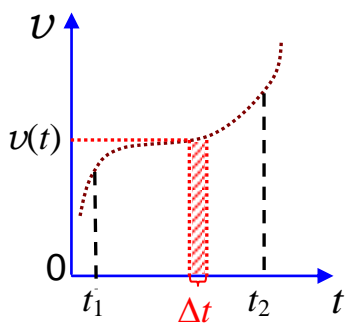


Рис. 1.4

### Пример 1. Равномерное движение

➔ **(Опр.) Равномерным называется движение, при котором МТ за любые равные интервалы времени совершает равные перемещения**

Из этого определения (определение Галилея) следует, что при равномерном движении скорость точки не меняется, т.е.

$\vec{V} = const.$ \*\*) При равномерном движении средняя и мгновенная скорости совпадают. Исходя из этого, легко получить **закон равномерного движения** (в «координатной» форме):

$$V_x = \frac{\Delta x}{\Delta t} \Rightarrow \Delta x = V_x \cdot \Delta t \Rightarrow$$

$$x(t) = x_0 + V_x \cdot t. \quad (1.14)$$

Аналогично и по осям  $OY, OZ$ :

$$y(t) = y_0 + V_y \cdot t;$$

$$z(t) = z_0 + V_z \cdot t.$$

или в векторном виде:

$$\vec{V} = \vec{V}_{cp} = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} \Rightarrow \Delta \vec{r} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{V}(t) dt = \vec{V} \cdot \Delta t \Rightarrow$$

$$\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \vec{V} \cdot t \quad (1.14,a)$$

В равенствах (1.14) и (1.14,a) для упрощения записей мы считаем, что время отсчитывается от нуля, т.е.  $t_0 = 0$  и  $\Delta t = t - t_0 = t$ .

Строго говоря (следуя определению), равномерным может быть только прямолинейное движение. Однако иногда говорят и о криволинейном равномерном движении (например, по окружности), имея в виду *постоянство скорости по модулю*. В этом случае путь линейно растет с течением времени:

$$\Delta l = v \cdot t. \quad (1.15)$$

### 1.2.5. Ускорение

Для характеристики быстроты изменения скорости пользуются понятием ускорения. Конечно, начать можно, как и в случае скорости со среднего ускорения. Но мы дадим сразу определение ускорения мгновенного, выполнив знакомый уже предельный переход.

---

\*\*) Часто именно это условие и принимается за определение равномерного движения.

## § 1. Кинематика материальной точки

► (Опр.) Ускорением<sup>\*)</sup> называется производная скорости по времени:

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{V}}{\Delta t} \quad (1.16)$$

или (что то же самое)  $\vec{a} = \frac{d\vec{V}}{dt} \equiv \dot{\vec{V}}$  (а значит:  $\vec{a} = \ddot{\vec{r}}$ ). (1.16,a)

при этом

$$\vec{a} = a_x \cdot \vec{e}_x + a_y \cdot \vec{e}_y + a_z \cdot \vec{e}_z, \quad \text{где} \quad a_x = \frac{dV_x}{dt}, \quad a_y = \frac{dV_y}{dt}, \quad a_z = \frac{dV_z}{dt}.$$

Ускорение равно нулю ( $\vec{a} = 0$ ) только в случае, если скорость не изменяется ни по величине, ни по направлению ( $\vec{V} = const$ ).

Зная функцию  $\vec{a}(t)$ , можно определить изменение вектора скорости за промежуток времени между моментами  $t_1$  и  $t_2$ :

$$\Delta \vec{V} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{a}(t) dt. \quad (1.17)$$

А если известны ещё начальное положение  $\vec{r}_0$  и скорость частицы  $\vec{V}_0$ , то нетрудно найти законы изменения её скорости и положения:

$$\begin{aligned} \vec{V}(t) &= \vec{V}_0 + \int_0^t \vec{a}(t) dt \\ \vec{r}(t) &= \vec{r}_0 + \int_0^t \vec{V}(t) dt. \end{aligned} \quad (1.18)$$

Таким образом, принципиальным физическим вопросом является как раз поиск ускорения – функции  $\vec{a}(t)$ . На этот вопрос, как мы убедимся, ответ даёт только «динамика».

---

<sup>\*)</sup> Аналогично ситуации со скоростью, если не оговорено иное, то под термином ускорение понимается именно мгновенное ускорение!

### Пример 2. Равнопеременное движение

► **(Опр.)** Движение МТ называется равнопеременным, если за любые равные интервалы времени  $\Delta t$  происходят равные изменения скорости  $\Delta \vec{V}$

Нетрудно понять, что в этом случае ускорение  $\vec{a}$  не меняется ( $\vec{a} = const$ ). Опираясь на соотношения (1.18), легко получить для этого случая хорошо знакомые по школьному курсу зависимости:

$$\begin{aligned} \vec{V}(t) &= \vec{V}_0 + \int_0^t \vec{a}(t) dt \Rightarrow \vec{V}(t) = \vec{V}_0 + \vec{a} \cdot t; \\ \vec{r}(t) &= \vec{r}_0 + \int_0^t \vec{V}(t) dt \Rightarrow \vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \vec{V}_0 \cdot t + \frac{\vec{a} t^2}{2}. \end{aligned} \quad (1.19)$$

Запишем также закон **равнопеременного движения** и «в координатной форме» для одной из проекций:

$$x(t) = x_0 + V_{0x} \cdot t + \frac{a_x t^2}{2}, \quad (1.19,a)$$

здесь  $V_{0x}$  – начальная скорость вдоль оси  $X$  ( $V_x(0) = V_{0x}$ ),  $x_0$  – координата  $x$  в начальный момент, т.е.  $x(0) = x_0$ .

#### ❖ Замечание

### Пример 3. Движение тел, брошенных вблизи поверхности Земли (сопротивление воздуха пренебрежимо мало)

Это хотя и частный, но очень важный случай равнопеременного движения. Не будем, однако, воспроизводить все положенные выкладки, которые подробно обсуждались ещё в школьном курсе<sup>\*)</sup>. Анализируя приведённые ранее кинематические соотношения, мы отметим здесь, что характеристики движения материальной точки вдоль любой оси не влияют на параметры движения вдоль остальных осей. Это позволяет сформулировать

<sup>\*)</sup> Освежить их в памяти поможет, как мы надеемся, например, разбор задачи 1.1 нашего пособия для семинарских занятий или любой школьный учебник.

## § 1. Кинематика материальной точки

принцип независимости движений, согласно которому движение материальной точки вдоль координатных осей *можно рассматривать независимо друг от друга*. По горизонтали происходит равномерное движение, а по вертикали – с постоянным ускорением – ускорением свободного падения  $\vec{g}$ . В действительности эти движения объединены общностью течения времени, что и позволяет находить траекторию движения.

### 1.3. Угловые кинематические характеристики движения

При криволинейном движении, в частности, при движении по окружности, удобными помимо «линейных» оказываются т.н. «угловые характеристики»: угловое перемещение, угловая скорость, угловое ускорение.

#### 1.3.1. Угловое перемещение

- ➔ **(Опр.)** Введём понятие *углового перемещения*, отталкиваясь как раз от случая движения МТ по окружности – см. рис. 1.5. **Радиус-вектор**  $\vec{r}$ , соединяющий центр окружности (точка О) и материальную точку, как всегда «следит» за изменением её положения, и при этом *поворачивается на угол  $\Delta\varphi$* . Чтобы указать не только величину этого поворота, но и направление, угловому перемещению *придают векторный характер: за направление вектора  $\Delta\vec{\varphi}$  принимается направление поступательного перемещения правого винта – «буравчика» при повороте его рукоятки в направлении вращения радиус-вектора* – см. рис. 1.5.

Так же поступают и при движении МТ по любой плоской кривой<sup>\*)</sup>.

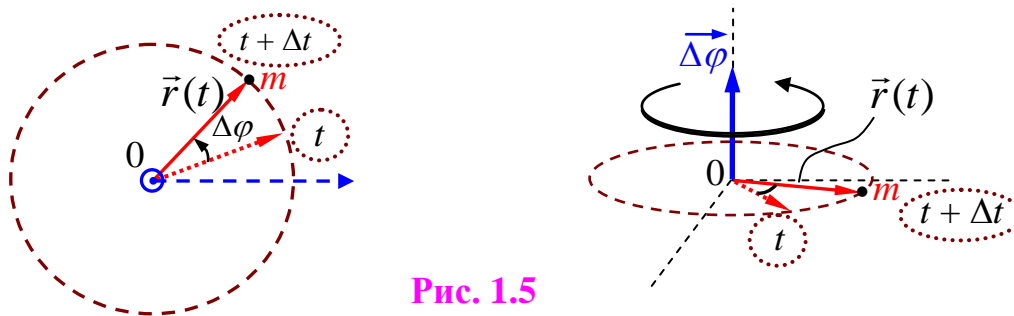


Рис. 1.5

<sup>\*)</sup> В общем случае векторами являются лишь бесконечно малые угловые перемещения  $d\vec{\varphi}$ .

### 1.3.2. Угловая скорость

Быстроту угловых перемещений характеризуют угловой скоростью, которую определяют аналогично линейной:

► (Опр.) Угловая скорость равна

$$\vec{\omega} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{\varphi}}{\Delta t} \equiv \frac{d\vec{\varphi}}{dt} \quad (1.20)$$

Т.е. она представляет собой производную по времени от угла поворота

Направлен вектор угловой скорости, как следует из определения, так же, как и вектор малого углового перемещения  $d\vec{\varphi}$ .

Ранее введённую скорость  $\vec{V}$  в данном контексте называют *линейной*. Её модуль  $v$  связан с модулем угловой скорости  $\omega$  простым соотношением, получить которое можно, вспомнив равенство (1.7,б) и математическое выражение для длины дуги окружности  $dl = R \cdot d\varphi$  :

$$v = \frac{dl}{dt} = \frac{Rd\varphi}{dt} = \frac{d\varphi}{dt} \cdot R = \omega \cdot R. \quad \text{Итак} \quad v = \omega \cdot R \quad (1.21)$$

Можно ли записать связь линейной и угловой скоростей в векторном виде, учитывая направления этих характеристик движения? Линейная скорость всегда направлена по касательной к траектории, т.е. перпендикулярно радиусу окружности. Угловая – вдоль оси, относительно которой поворачивается радиус-вектор частицы, т.е. перпендикулярно плоскости, в которой лежат оба вектора  $\vec{V}$  и  $\vec{R}$ . С учётом сказанного приходим к равенству  $\vec{V} = [\vec{\omega}, \vec{R}]$ . Оказывается его можно несколько обобщить, выбрав начало системы отсчёта (точку  $O'$ ) в произвольном месте оси поворота радиус вектора  $\vec{R}$  (см. рис. 1.6):

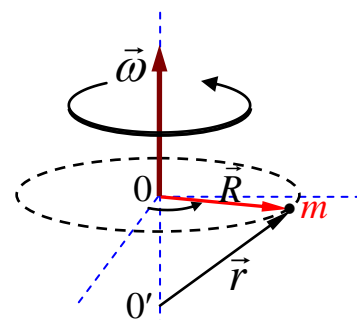


Рис. 1.6



## § 1. Кинематика материальной точки

$$\vec{V} = [\vec{\omega}, \vec{r}] \quad *) \quad (1.22)$$

Этот вывод будет для нас важен при анализе кинематики движения твёрдых тел.

### Замечание

Если линейная скорость *неизменна по величине*  $v$ , то постоянна и угловая скорость  $\omega$ . Такое движение называют «**равномерным движением материальной точки по окружности**». Следует помнить об условности этой терминологии с учётом данного общего определения понятия равномерного движения. В этом случае справедливы соотношения:

$$v = \text{const}, \quad \omega = \text{const}, \quad \omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi\nu.$$

### 1.3.3. Угловое ускорение

► (**Опр.**) Для описания движения с изменяющейся угловой скоростью вводится понятие **углового ускорения**:

$$\vec{\beta} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} \quad \left( \text{или} \quad \vec{\beta} \equiv \dot{\vec{\omega}} = \frac{d^2\vec{\varphi}}{dt^2} \equiv \ddot{\vec{\varphi}} \right) \quad (1.23)$$

Аналогично случаю линейных характеристик оно позволяет находить, изменение угловой скорости и угловое перемещение:

$$\vec{\Delta\omega}(t) = \int_0^t \vec{\beta}(t) dt, \quad (1.24)$$

$$\vec{\Delta\varphi} = \int_0^t \vec{\omega}(t) dt. \quad (1.25)$$

## 1.4. Ускорение при криволинейном движении

При криволинейном движении линейная скорость  $\vec{V}$  обязательно изменяется хотя бы по направлению. Поэтому ускорение всегда отлично от нуля даже в «школьном» случае «равномерного движения по окружности» (т.е. при постоянстве угловой скорости). Если материальная точка движется по произвольной **кривой траектории** можно утверждать, что вектор ускорения направлен всегда внутрь этой траектории. Его удобно

\*) Иногда это соотношение называют формулой Эйлера.

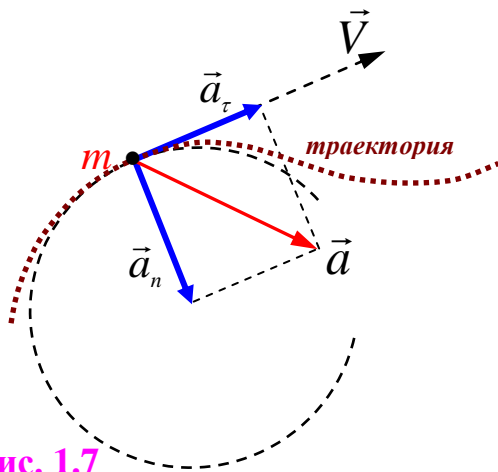


Рис. 1.7

разложить на две составляющие – вдоль вектора скорости (по касательной к траектории) и в нормальном (т.е. перпендикулярном) направлении:

$$\vec{a} = \vec{a}_\tau + \vec{a}_n. \quad (1.26)$$

Символом  $\vec{\tau}$  принято обозначать орт тангенциального ( $\vec{\tau} \uparrow \uparrow \vec{V}$ ), а  $\vec{n}$  – нормального ( $\vec{n} \perp \vec{v}$ ) направлений.

Соответственно первую составляющую  $\vec{a}_\tau$  называют «тангенциальным», а вторую  $\vec{a}_n$  – «нормальным» ускорением (см. рис. 1.7). Поскольку  $\vec{V} = v \cdot \vec{\tau}$ , следующей цепочкой равенств можно так пояснить смысл каждой из компонент ускорения:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{d}{dt}(v \cdot \vec{\tau}) = \underbrace{\frac{dv}{dt} \cdot \vec{\tau}}_{\vec{a}_\tau} + v \cdot \underbrace{\frac{d\vec{\tau}}{dt}}_{\vec{a}_n}$$

Т.е. тангенциальная компонента  $\vec{a}_\tau = \frac{dv}{dt} \cdot \vec{\tau}$  ответственна за изменение модуля скорости. Тогда как нормальная  $\vec{a}_n = v \cdot \frac{d\vec{\tau}}{dt}$  –

это по сути всё то же, известное вам по школьному курсу, «центростремительное» ускорение, изменяющее скорость по направлению. Вектор  $\vec{a}_n$  перпендикулярен вектору линейной  $\vec{V}$  скорости и направлен по радиусу к центру т.н. «мгновенной» окружности (см. рис. 1.7) – движение по произвольной **кривой траектории** можно представить как последовательность движений по малым дугам окружностей с разными радиусами  $R$  и разными положениями центров, сменяющимися друг друга.

Чему равен модуль нормального ускорения? Процедура расчёта центростремительного ускорения описывается в любом

## § 1. Кинематика материальной точки

школьном учебнике физики, приведём здесь лишь хорошо известный вам результат:

$$a_n = \omega^2 R = v^2 / R \quad (1.26)$$

А к нему добавим, что в рассматриваемом случае  $R$  – это «радиус кривизны траектории»<sup>\*)</sup>.

Для частного случая движения по окружности ( $R = const$ ):

$$a_\tau = dv/dt = \frac{d}{dt}(\omega R) = \beta \cdot R. \text{ Полезно написать ещё и дополнительные}$$

соотношения для  $\vec{a}_\tau$  и  $\vec{a}_n$ , придав им к тому же векторную форму:

$$\vec{a}_\tau = [\vec{\beta} \cdot \vec{R}] \quad \text{и} \quad \vec{a}_n = -\omega^2 \cdot \vec{R} \quad (1.27)$$

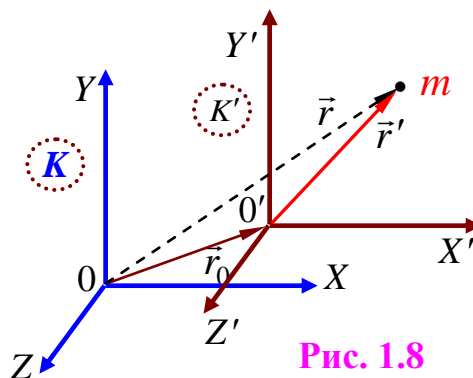
Знак « $-$ » означает здесь, что нормальное ускорение направлено в сторону противоположную вектору  $\vec{R}$ , т.е. к центру окружности.

### 1.5. Закон сложения скоростей в классической механике

Одно и то же движение можно описывать относительно разных систем отсчёта. Есть ли какая-то связь между кинематическими характеристиками этого движения в разных системах? Вероятно, да.

Пусть система отсчёта  $\{X'Y'Z'\}$  – будем называть её «система  $K'$ », движется прямолинейно со скоростью  $\vec{u}$  относительно «неподвижной» (условно)  $CO \{XYZ\}$  – «системы  $K$ ». Положение МТ определяют радиус-векторы  $\vec{r}'$  и  $\vec{r}$ , соответственно. Легко видеть (см. рис. 1.8), что эти векторы связаны между собой простым равенством:

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{r}',$$



<sup>\*)</sup> Заметим, что это не то же самое, что радиус «мгновенной» окружности.

где  $\vec{r}_0$  – радиус-вектор, проведённый из начала отсчёта системы « $K$ » к началу системы « $K'$ ». В классической механике предполагается, что время в различных системах отсчёта течёт одинаково. Поэтому можно продифференцировать это равенство по времени и получить:

$$\vec{V} = \vec{u} + \vec{V}_{отн} \quad (1.29)$$

Это соотношение называется **законом сложения скоростей Галилея**. Здесь  $\vec{V}$  – скорость материальной точки относительно «неподвижной» системы отсчета  $K$ , скорость  $\vec{V}_{отн}$  – по отношению к «движущейся» системе отсчета  $K'$  («относительная скорость») и, наконец,  $\vec{u}$  – скорость системы отсчета  $K'$  относительно неподвижной системы  $K$  («переносная скорость»).

### Пример-задание

Лодка движется относительно воды в реке со скоростью  $\vec{V}_{отн}$ . Причём направлена эта скорость перпендикулярно берегу. Ширина реки  $H$ , а скорость течения воды равна  $\vec{u}$  и направлена вдоль берега. Используя закон сложения скоростей и принцип независимости движений, самостоятельно определите по этим данным скорость лодки относительно берега. А также, на каком расстоянии  $L$  ниже по течению лодка завершит переправу?

## § 2. Кинематика твёрдого тела

*“Под механикой разумею ту часть практического искусства, которая помогает нам разрешать затруднительные вопросы” –*

Аристотель (IV век до н.э.)

### 2.1. Модель «абсолютно твёрдое тело»

Модель «материальная точка» не всегда адекватна решаемой задаче. В тех случаях, когда размеры и форма тела играют существенную роль при описании движения часто помогает другая модель.

➡ **(Опр.)** *Модель «абсолютно твёрдое тело» (ТТ) предполагает, что можно пренебречь деформацией тел при механическом движении*

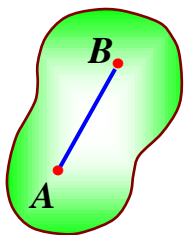


Рис. 2.1

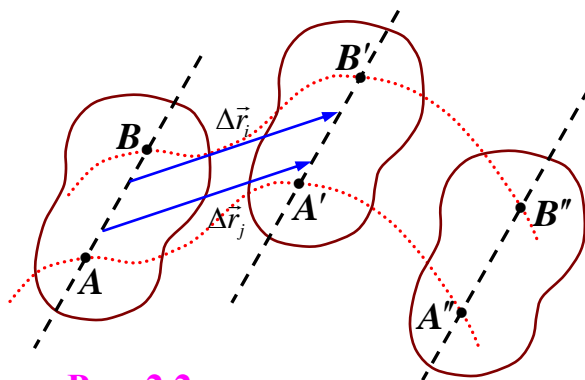
Такое тело можно представить как совокупность материальных точек, жёстко связанных между собой. Несколько более формально можно сказать, что при движении твёрдого тела не меняется расстояние между любыми двумя его точками  $A$  и  $B$ , т.е. отрезок  $AB$  сохраняет свою длину – см. рис. 2.1.

Оказывается, любое сложное движение твёрдого тела можно представить в виде совокупности двух простейших типов движения – поступательного и вращательного.

### 2.2. Поступательное движение твёрдого тела

➡ **(Опр.)** *При поступательном движении за любые интервалы времени перемещения всех точек ТТ одинаковы*

Ясно, что при таком движении любая прямая жёстко связанная с телом остаётся параллельной самой себе – см. рис. 2.2. Нетрудно понять также, что поскольку при любых интервалах



**Рис. 2.2**

времени  $\Delta t$ , исходя из определения,  $\Delta \vec{r}_i = \Delta \vec{r}_j$ , то в любой момент времени у всех точек тела одинаковы линейные скорости  $\vec{V}_i(t)$  и ускорения  $\vec{a}_i(t)$ . В этом легко убедиться, дифференцируя

соответствующие равные перемещения. С течением времени эти скорости и ускорения могут меняться, но у всех точек одинаково и все точки тела движутся по одинаковым траекториям. Именно этот смысл вкладывают в утверждение – «при поступательном движении все точки тела движутся одинаково».

Поэтому при описании поступательного движения  $TT$  можно пользоваться соотношениями, определяющими кинематику материальной точки. Описав движение всего одной точки (например, центра масс – см. далее) поступательно движущегося твёрдого тела, мы получаем полную информацию о том, как происходит это движение – кинематическая задача решена!

А как обстоит дело с угловыми характеристиками движения? При поступательном движении тело сохраняет свою ориентацию в пространстве, «не поворачивается»! Угловая скорость и ускорение любой жёстко связанной с телом прямой равны нулю.

### **2.3. Вращательное движение твёрдого тела**

Только что мы уже использовали термин, очевидно имеющий отношение к «вращательному движению». Уточним наши бытовые представления по этому поводу.

➡ **(Опр.)** При вращательном движении все точки тела движутся по окружностям, центры которых лежат на одной прямой, называемой осью вращения тела

## § 2. Кинематика твёрдого тела

Подход к описанию движения точки по окружности был изложен ранее. Линейные характеристики движения на этот раз отличаются для точек, находящихся на разном расстоянии от оси вращения. А вот угловые –  $\vec{\omega}$  и  $\vec{\beta}$  – для всех точек твёрдого тела одинаковы. Поскольку указание всего одной величины – угла поворота – достаточно, чтобы знать положение  $TT$ , говорят, что вращающееся тело имеет одну степень свободы.

### 2.4. Плоское движение твёрдого тела

Выделим для рассмотрения ещё один специфический случай, имеющий важное практическое значение.

► **(Опр.)** При плоском движении все точки тела движутся, оставаясь в параллельных плоскостях

Естественно в одной плоскости может двигаться множество точек. При этом разные точки могут двигаться в разных параллельных плоскостях. Самым хорошо знакомым примером плоского движения является качение колеса. Плоское движение удобно представить, как совокупность одновременно происходящих поступательного движения тела и его поворота вокруг оси  $O$ , перпендикулярной плоскостям, в которых движутся

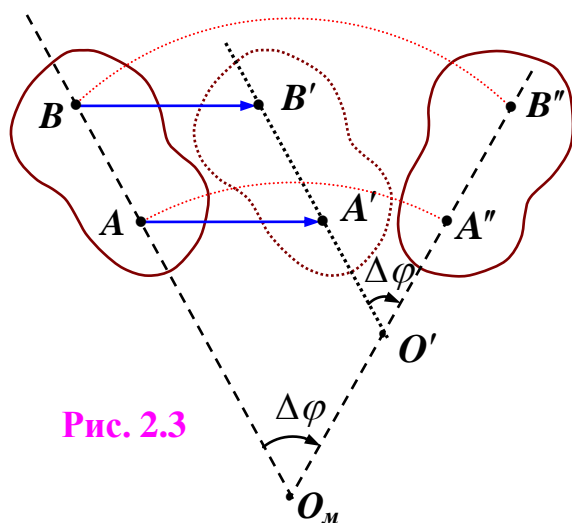


Рис. 2.3

точки твёрдого тела. Необходимо подчеркнуть, что комбинировать поступательное движение и поворот тела вокруг некоторой оси можно бесконечным числом способов (см. рис. 2.3). Ось вращения может быть выбрана произвольно. При этом будут изменяться радиусы поворота, однако

важно, что какую ось мы бы ни выбрали, угловая скорость будет иметь одно и то же значение.

Из сказанного следует, что элементарные перемещения любой точки тела (« $i$ ») при плоском движении можно представить в виде  $d\vec{r}_i = d\vec{r}_i^{nocm} + d\vec{r}_i^{вращ}$ . Поделив на соответствующий малый интервал времени  $dt$ , получим скорости движения точек тела:

$$\vec{V} = \vec{V}_{nocm} + \vec{V}_{вращ} : \quad \vec{V}_i = \vec{V}_0 + [\vec{\omega}, \vec{r}_i] \quad (2.1)$$

Здесь  $\vec{V}_{nocm} = \vec{V}_0$  – одинаковая для всех точек тела скорость поступательного движения – скорость движения оси поворота  $O$ ,  $\vec{V}_{вращ} = [\vec{\omega}, \vec{r}_i]$  – линейная скорость данной точки тела, связанная с вращательным движением,  $\vec{\omega}$  – угловая скорость,  $\vec{r}_i$  – радиус-вектор, проведённый от оси вращения к  $i$ -ой точке тела.

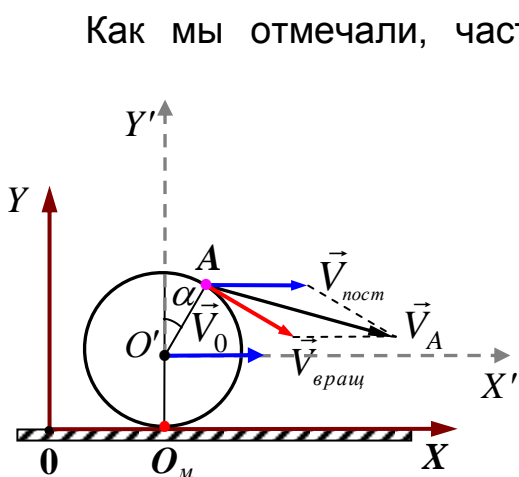


Рис. 2.4

Как мы отмечали, частным, но весьма важным случаем плоского движения, является качение тел (колеса, цилиндра, шара, ...) – см. рис. 2.4. Равенство (2.1) при этом может служить примером применения закона сложения скоростей Галилея – ведь «неподвижную» систему отсчёта « $K$ » удобно связать с поверхностью качения, а «движущуюся»  $K'$  с осью катящегося тела (она движется поступательно, а колесо поворачивается вокруг неё).

Обоснуйте самостоятельно, опираясь на рис. 2.4, что модуль скорости произвольной точки  $A$  на ободе колеса равен

$$v_A = 2v_0 \cos \frac{\alpha}{2}.$$

Интересно отметить, что из множества способов разложения движения можно найти такой, когда движение тела сведется к



## § 2. Кинематика твёрдого тела

---

последовательности поворотов вокруг некоторой оси, скорость которой равна нулю в данный момент времени ( $\vec{V}_0 = 0$ ). Эта ось вращения  $O_m$  занимает разное положение в пространстве в разные моменты времени. Её называют *мгновенной осью вращения*. При качении без проскальзывания эта ось проходит через точку касания с поверхностью, по которой катится тело.

В заключение раздела «Кинематика» скажем, что все рассмотренные в нём законы опираются на естественные представления о независимости пространства и времени. Эти представления, очевидные для механики Ньютона и Галилея, подверглись пересмотру современной физикой («Теория относительности»), и это способствовало более глубокому пониманию фундаментальных свойств пространства и времени. В физике микромира в связи с невозможностью одновременного точного определения координат и скорости движущейся частицы («принцип неопределённости») выработан иной подход к изучению движения – без использования понятия «траектория» («Квантовая механика»).

## § 3. Динамика материальной точки

*“Наука спустилась с небес на Землю  
по наклонной плоскости Галилея”* ☺

Анри Бергсон (современный философ)

*“Door Meten tot Weden” –  
«Знание через измерение!»*

девиз лаборатории Каммерлинг-Оннеса.  
Лейден. Голландия

### 3.1. Принцип инерции. Сила

В разделе «Кинематика» мы знакомимся с описанием простейших типов механического движения (равномерное, равнопеременное, ...). При этом в рамках кинематики вопрос о причинах того или иного характера движения не обсуждается. Как мы уже отмечали, именно «динамика» призвана отвечать на вопрос «почему?». НО! «Правильный ответ начинается с правильного вопроса» ☺.

Чему именно надо искать объяснения? С момента появления первого труда под названием «Физика» (Аристотель) около 20 веков господствовало мнение, что объяснять надо ту или иную величину скорости движения тел. И лишь Г. Галилей развеял это заблуждение и показал, что причину искать надо не для самой скорости, а для изменения скорости! Галилей сформулировал свой знаменитый **«закон инерции»**:

***✚ Всякое тело находится в состоянии покоя или равномерного прямолинейного движения, пока воздействие со стороны других тел не заставит его изменить это состояние***

Т.е. скорость тела постоянна пока нет воздействия на тело других тел. *Такое состояние тел называют движением по инерции.* Если мы хотим развивать не только качественный, но и количественный анализ механического движения, мы должны оговорить и количественную характеристику степени этого самого воздействия. Конечно же, речь идёт о понятии «сила»! В популярных толковых словарях это слово едва ли не рекордсмен по количеству смыслов. Да и в школьном курсе физики нам уже

### § 3. Динамика материальной точки

встречались и «сила тока», и «электродвижущая сила», и «сила света» ...

Однако в рамках механики мы ограничимся лишь одним толкованием этого важного понятия.

➡ ***(Опр.) Сила является мерой воздействия тел друг на друга***

Слово мера влечёт с необходимостью и определённую процедуру, позволяющую определять интенсивность воздействий в разных случаях. Договариваются и об эталонном значении силы ( $\vec{F}_{et}$ ) и об устройстве соответствующего прибора – конечно же, речь идёт об известном вам динамометре. Также экспериментально выясняется и вопрос о векторном характере сил ( $\vec{F}$ ) и, соответственно, о правилах их сложения.

Галилей первым предложил подход с опорой на опытные данные, на эксперимент. Это стало обязательным условием развития современного естествознания. Поэтому Г. Галилея вместе с И. Ньютоном по праву можно считать основоположником классической механики. При этом основу динамики материальной точки составляют три закона Ньютона.

#### **3.2. Первый закон Ньютона**

Теперь у нас есть всё необходимое для построения фундамента классической механики – формулировки этих законов. Но сделаем прежде одну оговорку. Мы не будем цитировать самого Ньютона – ведь наша задача не история науки. Поэтому, хотя сам Ньютон первым законом динамики называл закон инерции Галилея, мы отметим, что этот закон справедлив только в некоторых особых системах отсчёта.

✚ ***Первый закон Ньютона утверждает, что существуют такие системы отсчёта, в которых тело движется равномерно***

*и прямолинейно ( $\vec{V} = const$ ), если на него не действуют другие тела или действие всех тел скомпенсировано. Такие системы называют инерциальными (ИСО)*

Важно отметить, что содержание первого закона Ньютона состоит именно в утверждении возможности **существования** инерциальных систем: в таких системах тело, на которое не действуют другие тела («*свободное тело*»), движется равномерно и прямолинейно. Тем самым, он даёт **критерий выбора ИСО** и постулирует существование таких систем. Заметим также, что любая *СО*, движущаяся относительно *ИСО* равномерно, также является инерциальной.

Смелость утверждения первого закона Ньютона особенно впечатляет, если учесть, что система отсчёта, связанная с Землёй, на которой мы обычно и проводим механические опыты, не является строго инерциальной системой отсчета.

### **3.3. Второй закон Ньютона**

А как ведёт себя тело (материальная точка), если на него действуют другие тела и действие этих тел не скомпенсировано (т.е. суммарная сила не равна нулю)? Имея возможность определять ускорения по правилам кинематики  $\left(\vec{a} = \frac{d\vec{V}}{dt}\right)$ , а также менять и измерять силы ( $\vec{F}$ ), для данного тела и для различных «пробных» тел, удалось обнаружить взаимосвязь ускорения и силы. Эта экспериментально установленная связь и составляет содержание второго закона Ньютона.

**Второй закон Ньютона** устанавливает количественную связь между воздействием на тело (МТ) и быстротой изменения его скорости, т.е. ускорением.

### § 3. Динамика материальной точки

✚ *Ускорение тела (МТ) прямо пропорционально действующей на него силе*

Коэффициент пропорциональности между силой и ускорением разный для разных тел, обладающих разной **инертностью**. Он связан с ещё одним важным понятием – «*масса тела*».

➡ **(Опр.)** *Масса тела<sup>\*</sup>* есть мера инертности этого тела, то есть величина, равная отношению силы, действующей на тело, к ускорению, которое тело приобретает под действием этой силы:

$$m = \frac{F}{a} \quad (3.1)$$

Вот теперь настала пора привести знакомую со школы аналитическую запись II закона Ньютона:

✚ 
$$\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m} \quad (3.2)$$

#### ❖ Сделаем несколько важных замечаний

- 1) Надо помнить, что в равенстве (3.2)  $\vec{F}$  – *равнодействующая (сумма)* всех сил, действующих на тело. Происхождение этих сил может быть самое разное.
- 2) II закон Ньютона не является определением силы или ускорения, а объективно (т.е. независимо от нашего желания) связывает воедино эти величины: ускорение и силу. Каждая из этих величин может быть определена и *измерена* независимо от остальных и от содержания II закона Ньютона. Сила, являясь количественной мерой взаимодействия тел, вызывает как ускорение тел, так и изменение их формы (деформацию). Именно *по деформации можно измерять силу* (вспомните динамометр) независимо от II закона Ньютона!
- 3) Важно помнить о том, что II закон Ньютона выполняется

<sup>\*</sup> Речь идёт, конечно, о так называемой «инертной массе».

*только в инерциальных системах отсчета*<sup>\*)</sup>. Кроме того данная формулировка перестает «работать» за рамками «классической механики» – при движении тел со скоростями сравнимыми со скоростью света («релятивистская механика») и в микромире («квантовая механика»).

- 4) При решении задач мы будем записывать этот закон в математически эквивалентной форме:

$$m\vec{a} = \vec{F}$$

Весьма полезной является также формулировка II закона Ньютона с использованием понятия импульса тела.

► **(Опр.) Импульсом материальной точки называется произведение её массы на скорость:**

$$\vec{p} = m\vec{V} \quad (3.3)$$

С учётом этого можно записать

$$m\vec{a} = m \frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{d(m\vec{V})}{dt} = \frac{d\vec{p}}{dt} \quad (**)$$

Тогда, согласно II закону Ньютона

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F} \quad (\text{или } d\vec{p} = \vec{F} \cdot dt) \quad (***) \quad (3.4)$$

Этой аналитической записи соответствует словесная формулировка: **Скорость изменения импульса тела равна сумме действующих на тело сил.**

Итак, если известны действующие на тело силы, равенство (3.2) позволяет находить ускорение тела. Используя, кроме того, начальные условия движения (начальное положение и скорость), можно определять зависимость координат материальной точки от времени – **закон движения**  $\vec{r} = \vec{r}(t)$ . По этой причине равенство,

<sup>\*)</sup> Отсюда и особая **самостоятельная** роль первого закона!

<sup>\*\*)</sup> В механике Ньютона масса тела не зависит от скорости.

<sup>\*\*\*)</sup> Именно такой формой записи пользовался сам Ньютон.

### § 3. Динамика материальной точки

соответствующее второму закону Ньютона называют также **уравнением движения**.

#### 3.4. Третий закон Ньютона

Силовое воздействие всегда носит характер взаимодействия.

✚ *Силы взаимодействия двух материальных точек равны по величине, противоположно направлены и действуют вдоль прямой, проходящей через эти точки*



Рис. 3.1

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$$

Иными словами действие "первого" тела на "второе" обязательно связано с действием "второго" на

"первое". При этом силы действия и противодействия:

1. равны по величине;
2. противоположно направлены;
3. действуют вдоль одной прямой линии;
4. приложены к разным телам;
5. имеют одинаковую природу.

#### ❖ Замечание

В механике Ньютона предполагается, что силовое воздействие передаётся мгновенно даже на значительные расстояния.

#### 3.5. Силы в механике

При анализе движения тел с использованием законов Ньютона приходится иметь дело с различными видами сил. Для многих из них известны законы<sup>\*)</sup>, определяющие зависимость силы взаимодействия от положения тел и характера их движения.

**3.5.1. Силы Всемирного тяготения** подчиняются закону:

✚ *Две материальные точки притягиваются с силами пропорциональными произведению их масс ( $m_1$  и  $m_2$ ) и обратно*

<sup>\*)</sup> Те самые «частные» законы для сил, о которых идет речь в рекомендациях по решению задач на динамику МТ.

*пропорциональными квадрату расстояния между ними. Силы направлены вдоль прямой, проходящей через материальные точки*

Этот закон был открыт также И. Ньютоном. Аналитической записи закона всемирного тяготения можно придать векторную форму, чтобы включить в неё информацию о направлении сил:

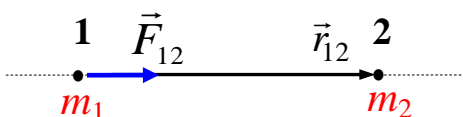


Рис. 3.2

$$\vec{F}_{12} = G \frac{m_1 m_2}{r^2} \frac{\vec{r}_{12}}{r} \quad (3.5)$$

Здесь  $\vec{F}_{12}$  – сила действующая на первую МТ со стороны второй,  $\vec{r}_{12}$  – радиус-вектор проведенный от первой МТ ко второй ( $r$  – его модуль, см. рис. 3.2). На вторую МТ также действует сила притяжения и, в полном соответствии с третьим законом Ньютона,  $\vec{F}_{21} = -\vec{F}_{12}$ . Коэффициент пропорциональности  $G$  – т.н. «**гравитационная постоянная**». В системе СИ он равен  $6,67 \cdot 10^{-11} \text{ Н} \cdot \text{м}^2 / \text{кг}^2$ . Впервые величина гравитационной постоянной была измерена экспериментально в знаменитых опытах Кавендиша<sup>\*)</sup> с использованием крутильных весов (1797 г.).

Важно помнить, что, используя равенство (3.5), можно находить силу тяготения между материальными точками (как и указано в законе!). Если в условиях решаемой задачи тела нельзя считать материальными точками, то для нахождения силы гравитационного взаимодействия тел их придётся “разбивать” на малые элементы – материальные точки, и затем суммировать все силы парных взаимодействий между ними.

Именно проведя такую процедуру, Ньютон впервые доказал, что равенством (3.5) можно пользоваться также и для больших тел, если они обладают сферической симметрией распределения массы<sup>\*\*)</sup>. Таковыми, в некотором приближении, можно считать

<sup>\*)</sup> Гэнри Кáвендиш (1731 – 1810) – выдающийся британский физик и химик. Впервые исследовал свойства водорода, углекислого газа, особые свойства воды, впервые определил состав атмосферного воздуха. Именем Кавендиша названа физическая лаборатория в Кембриджском университете.

<sup>\*\*)</sup> За исключением довольно экзотического случая, когда одно тело находится внутри сферической полости другого.



### § 3. Динамика материальной точки

планеты (в частности, Землю), Солнце и другие космические тела. Роль величины  $r$  в равенстве (3.5) в этом случае играет расстояние между геометрическими центрами тел.

При рассмотрении движения тел вблизи поверхности Земли величина силы притяжения (**сила Земного тяготения**) может быть выражена следующим образом ( $h \ll R_3$ ):

$$F = G \frac{mM_3}{(R_3 + h)^2} \approx G \frac{mM_3}{R_3^2} = mg, \quad (3.6)$$

где  $g = G \frac{M_3}{R_3^2}$  – ускорение свободного падения,  $M_3$  и  $R_3$  – масса и радиус Земли,  $h$  – высота тела над поверхностью Земли.

**3.5.2. Упругие силы**<sup>\*)</sup>, возникают при упругой деформации тел (в частности, это различные *силы натяжения нитей, пружин, реакции опор*, и т.д.). В некотором интервале деформаций тел величина деформации оказывается пропорциональна приложенной силе (**закон Гука**). Со стороны пружины действует сила реакции – упругая сила. С учётом 3-го закона Ньютона можно для силы упругости записать:

$$F_{\text{упр}} = k \cdot \xi, \quad (3.7)$$

где  $k$  – коэффициент упругости («жёсткость»), а  $\xi$  – величина деформации тела. Это может быть «удлинение» пружины  $\xi = |l - l_0|$ , прогиб балки, угол закручивания стержня и т.д. При этом сила упругости всегда противоположна направлению деформации тела, поэтому для проекции силы упругости на направление деформации  $X$  можно написать привычное равенство:  $(\vec{F}_{\text{упр}})_x = -kx$ .

### 3.5.3. Силы трения

Силы трения возникают при движении или при возможности относительного движения контактирующих друг с другом тел. В

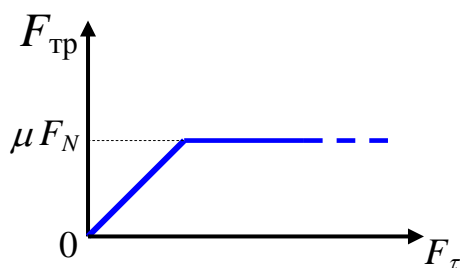
<sup>\*)</sup> Заметим, что и все различные виды упругих сил и силы трения имеют одну фундаментальную природу – это проявления электромагнитных взаимодействий, о которых разговор ещё впереди.

частности, сухое трение возникает при возможности движения одного твёрдого тела по сухой поверхности другого твёрдого тела.

Прежде всего, отметим, что бывают случаи, когда на тело, соприкасающееся с некоторой поверхностью, действуют силы, но оно остаётся в покое (попробуйте сдвинуть с места тяжёлый шкаф). Это результат того, что на тело действует **сила трения покоя**, компенсирующая другие внешние силы. Её величина находится из условия отсутствия относительного движения:

$$\vec{F}_{\text{тр пок}} + \sum_i \vec{F}_i = 0, \quad (3.8)$$

где  $\vec{F}_i$  – силы, приложенные к телу, за исключением  $\vec{F}_{\text{тр пок}}$ . Т.е. пока тело находится в покое, сила трения покоя в точности равна по величине и противоположна по направлению касательной составляющей результирующей сил  $(\sum \vec{F}_i)_\tau \equiv \vec{F}_\tau$ . Максимальное значение силы трения покоя равно  $F_{\text{тр пок}}^{\text{max}} = \mu F_N$ , где  $F_N$  –



**Рис. 3.3**

**нормальная составляющая** силы реакции опоры,  $\mu$  – коэффициент трения скольжения.

На рис. 3.3 показано как меняется сила сухого трения при нарастании величины силы  $F_\tau$ .

Наклонный участок графика ( $F_{\text{тр}} < \mu F_N$ ) соответствует покоящемуся телу ( $F_{\text{тр пок}} = F_\tau$ ), а горизонтальный – скользящему. С некоторой долей приближения можно считать, что **сила сухого трения скольжения** не зависит от величины скорости и равна

$$F_{\text{тр}}^{\text{ск}} = \mu F_N. \quad (3.9)$$

Эта сила всегда направлена противоположно вектору скорости тела. Поэтому равенству (3.9) можно придать векторный характер:

$$\vec{F}_{\text{тр}}^{\text{ск}} = -\mu F_N \cdot \frac{\vec{V}}{v},$$

### § 3. Динамика материальной точки

---

где  $\vec{V}$  – скорость относительного движения тел,  $v$  – её модуль.

При движении тел в жидких или газообразных средах возникает **сила вязкого трения**. Её отличие от сухого трения проявляется в отсутствии трения покоя, а также в зависимости от скорости движения тела относительно среды. При малых скоростях сила вязкого трения пропорциональна этой скорости: –

$$\vec{F}_{\text{тр}}^{\text{вязк}} = -b \cdot \vec{V}, \quad (3.10)$$

где  $b$  – коэффициент вязкого трения. Он зависит от размеров и формы тела, а также от вязких свойств среды.

#### 3.5.4. Сила Лоренца

На электрически заряженную частицу в электрическом и магнитном полях действует так называемая «обобщённая сила Лоренца»:

$$\vec{F}_L = q \cdot \vec{E} + q \cdot [\vec{V}, \vec{B}] \quad (3.11)$$

В постоянном электрическом поле  $\vec{E} = \text{const}$  движение частицы вполне аналогично движению в однородном поле тяготения. Ведь оно происходит под действием постоянной силы и, значит, является равнопеременным (по прямой или по параболе). В однородном магнитном поле ( $\vec{B} = \text{const}$ ) движение частицы происходит без изменения скорости по модулю – по окружности или по винтовой линии. Траектории движения в скрещенных электромагнитных полях могут быть весьма разнообразны – прямолинейное, по параболе, по дуге окружности, по спирали, ... Всё это зависит как от взаимной ориентации полей, так и от начальных условий.

❖ **Совсем необязательное дополнение**

Итак, действующая на тело сила может зависеть от положения тела в пространстве (его координат, как, например, сила тяжести или упругости), от скорости (сила трения или сила, действующая на движущуюся заряженную частицу в магнитном поле) и от времени. Т.е. с математической точки зрения она является в общем случае функцией трех переменных:

$$\vec{F} = \vec{F}\left(\vec{r}, \frac{d\vec{r}}{dt}, t\right) \quad \text{или} \quad \vec{F} = \vec{F}(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t)$$

В простейшем одномерном случае запись второго закона Ньютона

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = F_x\left(x, \frac{dx}{dt}, t\right) \quad \text{или} \quad m\ddot{x} = F_x(x, \dot{x}, t) \quad (3.12)$$

представляет собой дифференциальное уравнение второго порядка. Его решение – подбор функции  $x = f(t)$ , обращающей уравнение в тождество – позволяет найти закон движения.

А) Например, если тело движется вблизи поверхности Земли и, если можно пренебречь сопротивлением воздуха, на него действует лишь постоянная по величине и направлению сила – сила тяжести  $m\vec{g}$ . Уравнение движения имеет в этом случае вид

$$m \frac{d^2y}{dt^2} = -mg. \quad (3.13)$$

Отсюда ясно, что это равнопеременное движение с ускорением  $a_y = -g$ . Закон изменения вертикальной координаты  $y$  хорошо известен:

$$y(t) = y_0 + V_{0y}t - \frac{gt^2}{2}.$$

Движение по горизонтали равномерное, а его траектория – парабола.

Б) При действии упругой силы, подчиняющейся закону Гука  $F_x = -kx$ , уравнение движения тела имеет вид

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = -kx. \quad (3.14)$$

Его решение описывает гармоническое (незатухающее) колебание:  $x(t) = A \cos \omega t$ .

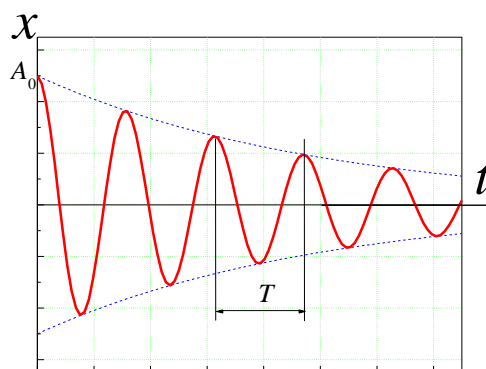
Если учесть наличие силы трения, например вязкого, пропорциональной скорости, получим уравнение

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = -kx - b \frac{dx}{dt}. \quad (3.15)$$

Решением будет также колебание, однако, на этот раз с уменьшающейся амплитудой (см. рис. 3.4):

$$x(t) = Ae^{-\beta t} \cdot \cos \omega t.$$

Коэффициент затухания  $\beta$  здесь равен  $b/2m$ . Процедура решения таких уравнений рассматривается в теории колебаний. **Нас интересует сейчас вовсе не**



**Рис. 3.4**

### § 3. Динамика материальной точки

математическая сторона вопроса. Мы привели эти примеры лишь для иллюстрации того факта, что знание конкретного вида сил, действующих на тело, как функции координат тела, его скорости и времени  $\vec{F} = \vec{F}(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t)$  с учётом начальных условий позволяют решить основную задачу механики – найти закон движения тела.

В заключение приведём для иллюстрации этой же мысли еще один пример иного вида действующей на тело силы. Исключим из правой части равенства (3.15) упругую силу – останется лишь сила вязкого трения:

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -b \frac{dx}{dt}. \quad (3.16)$$

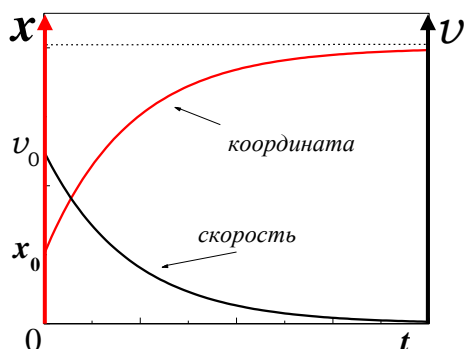


Рис. 3.5

Исчезнет и колебательный характер движения. Для реализации такого случая движения в вязкой среде телу необходимо сообщить начальную скорость. Решение уравнения позволяет определить, как меняется скорость с течением времени:

$v(t) = v_0 \cdot e^{-\beta t}$  (здесь  $\beta = b/m$ ), а затем и закон движения тела:

$$x(t) = x_0 + \frac{v_0}{\beta} \cdot [1 - e^{-\beta t}] \quad (\text{см. рис. 3.5}).$$

### 3.6. Принцип относительности Галилея

В завершение этого параграфа сформулируем ещё одно основополагающее утверждение классической физики:

**Закон механики инвариантен по отношению к выбору инерциальной системы отсчёта**

То есть все механические явления протекают одинаково во всех инерциальных системах отсчёта. Иначе говоря, с точки зрения классической механики, не существует абсолютного покоя или абсолютного движения. Находясь в трюме океанского лайнера без иллюминаторов, по наблюдениям за механическим движением невозможно установить, стоит ли лайнер на якоре или равномерно плывёт по воде.

Обобщение этого принципа также и на электромагнитные явления привело к одному из постулатов, лежащих в основе новой науки о движении – теории относительности.

## § 4. Динамика твёрдого тела

“*Sine experientia nihil sufficienter sciri potest*” –  
«Без опыта нет достоверного знания!»

Роджер Бэкон (1250)

### 4.1. Центр масс. Теорема о центре масс

Напомним, что твёрдое тело можно представить как совокупность материальных точек. Хотя в дальнейшем мы зачастую будем произносить и слова «система материальных точек», в первую очередь нас будет интересовать движение именно твёрдого тела. Все полученные результаты анализа, однако (если специально не оговорено иное) можно применять к обоим случаям.

При кинематическом описании движения твёрдого тела, разбиении его на поступательное и вращательное, мы говорили о произвольности выбора точки, через которую проходит ось вращения. С точки зрения динамической такого произвола уже нет. Особую роль при анализе движения систем материальных точек играет точка, называемая «центром масс».

► **(Опр.)** Центром масс системы материальных точек называется точка, положение которой в выбранной системе отсчёта определяет радиус-вектор

$$\vec{r}_c = \frac{\sum_{i=1}^n \Delta m_i \vec{r}_i}{\sum_{i=1}^n \Delta m_i}, \quad \left( \text{или} \quad \vec{r}_c = \frac{\sum_{i=1}^n \Delta m_i \vec{r}_i}{m} \right) \quad (4.1)$$

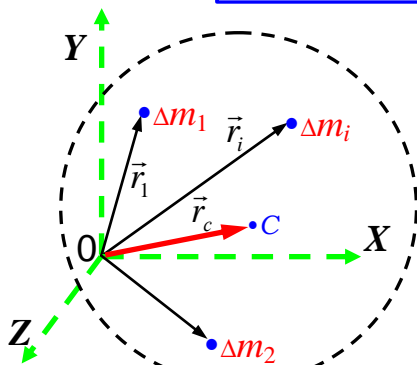


Рис. 4.1

где  $\vec{r}_i$  – радиус-векторы частиц входящих в систему (см. рис. 4.1). В частности, такими частицами (МТ) могут быть и отдельные элементы, на которые можно “разбить” твёрдое тело. Массу таких элементов мы специально

## § 4. Динамика твёрдого тела

обозначаем  $\Delta m_i$  <sup>\*)</sup>. Договоримся здесь и далее придерживаться такой системы обозначений, а обозначение массы  $m$  оставим только для случая рассмотрения движения одной единственной частицы или общей массы системы. Нетрудно сообразить, что сумма, стоящая в знаменателе, как раз и равна этой величине. Добавим, что приведённой векторной записи (4.1) в общем случае соответствуют три скалярные – для отдельных координат центра масс:

$$x_c = \frac{\sum_{i=1}^n \Delta m_i x_i}{m}, \quad y_c = \frac{\sum_{i=1}^n \Delta m_i y_i}{m}, \quad z_c = \frac{\sum_{i=1}^n \Delta m_i z_i}{m}. \quad (4.1, a)$$

Теперь можно начать разговор о свойствах центра масс, шаг за шагом доказывая, в чём польза от введения этого понятия. Для начала нам понадобится напомнить ещё одно – куда более привычное определение.

► **(Опр.) Импульсом системы материальных точек называется сумма импульсов отдельных её частей**

$$\vec{P} = \sum_{i=1}^n \Delta m_i \vec{V}_i \quad (4.2)$$

Проведём нехитрые математические операции: массу из знаменателя в равенстве (4.1) «отправим» сомножителем «налево» и продифференцируем равенство по времени. Легко обнаружить, что то, что получится справа, в точности соответствует определению импульса системы, а в левой части – произведение массы системы на **скорость центра масс!** Вот и первый результат, кажущийся, в силу своей привычности, просто тривиальным: -

$$\vec{P} = m \vec{V}_c \quad (4.3)$$

Несмотря на это сформулируем его ещё раз словами:

<sup>\*)</sup> Это подчёркивает, что частица (элемент тела) – часть твёрдого тела.

✚ Импульс системы материальных точек равен произведению её массы на скорость центра масс

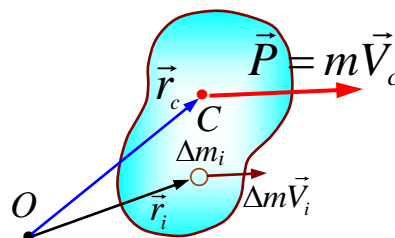


Рис. 4.2

Этот результат справедлив, конечно, и для твёрдого тела – см. рис. 4.2. Докажем теперь так называемую «теорему о движении центра масс». Формулировка, однако, последует в конце ☺. Опираемся при этом будем на рисунок, который нам ещё не раз предстоит использовать в дальнейшем – рис. 4.3. На нём символически обозначены отдельные элементы системы – частицы с массами  $\Delta m_i$ . Силы, с которыми частицы взаимодействуют друг с другом будем называть «внутренними» и обозначать  $\vec{f}_{ij}$ . На частицы могут также действовать и тела, не включённые нами в систему. Соответствующие силы будем называть «внешними» и обозначать  $\vec{F}_i$ , имея в виду, что это уже равнодействующая всех внешних сил, действующих на каждую данную частицу ( $i$ ).

После такого долгого вступления напишем для каждой частицы системы уравнения движения (второй закон Ньютона)

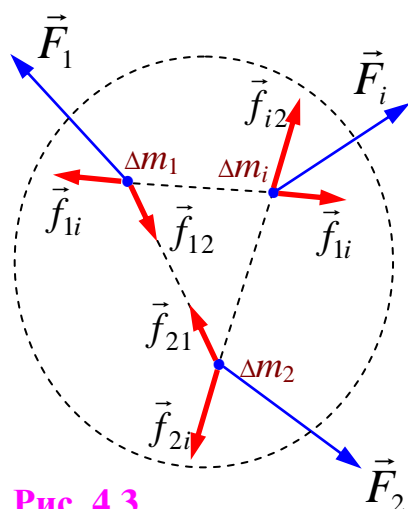


Рис. 4.3

относительно, конечно же, некоторой ИСО:

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta m_1 \ddot{\vec{r}}_1 = \vec{f}_{12} + \dots + \vec{f}_{1i} + \dots + \vec{f}_{1n} + \vec{F}_1^{\text{внешн}}; \\ \dots \dots \\ \Delta m_2 \ddot{\vec{r}}_2 = \vec{f}_{21} + \dots + \vec{f}_{2i} + \dots + \vec{f}_{2n} + \vec{F}_2^{\text{внешн}}; \\ \dots \dots \\ \Delta m_i \ddot{\vec{r}}_i = \vec{f}_{i1} + \dots + \vec{f}_{ij} + \dots + \vec{f}_{in} + \vec{F}_i^{\text{внешн}}; \\ \dots \dots \\ \Delta m_n \ddot{\vec{r}}_n = \vec{f}_{n1} + \dots + \vec{f}_{ni} + \dots + \vec{f}_{nn-1} + \vec{F}_n^{\text{внешн}}. \end{array} \right.$$



## § 4. Динамика твёрдого тела

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta m_1 \ddot{\vec{r}}_1 = \sum_{j \neq 1} \vec{f}_{1j} + \vec{F}_1^{\text{внешн}}; \\ \dots \\ \Delta m_i \ddot{\vec{r}}_i = \sum_{j \neq i} \vec{f}_{ij} + \vec{F}_i^{\text{внешн}}; \\ \dots \\ \Delta m_n \ddot{\vec{r}}_n = \sum_{n \neq j} \vec{f}_{nj} + \vec{F}_n^{\text{внешн}} \end{array} \right.$$

Запишем то же самое более компактно и просуммируем теперь все левые и все правые части уравнений<sup>\*)</sup>.

Прежде всего, отметим, что в правой части возникнут пары сил, равных и противоположно направленных друг другу на основании 3-го закона Ньютона:  $\vec{f}_{ij} = -\vec{f}_{ji}$ . Ясно, что их суммирование даст

нулевой результат и в правой части останется лишь сумма всех внешних сил  $\sum_{i=1}^n \vec{F}_i^{\text{внешн}}$ .

Сумма слева равна произведению массы системы на ускорение центра масс! Убедиться в этом можно, продифференцировав дважды, равенство (4.1) для радиус-вектора центра масс:

$$\frac{d^2}{dt^2}(\vec{r}_c) = \sum_{i=1}^n \Delta m_i \ddot{\vec{r}}_i / m \Rightarrow \sum_{i=1}^n \Delta m_i \ddot{\vec{r}}_i = m \ddot{\vec{r}}_c = m \vec{a}_c.$$

Вот теперь пришло время сформулировать утверждение теоремы.

**✚ Центр масс системы материальных точек (/ТТ) движется так же, как и материальная точка массой  $m$  под действием тех же внешних сил, что действуют на систему.** То есть

$$\vec{a}_c = \frac{\sum_{i=1}^n \vec{F}_i^{\text{внешн}}}{m}$$

Если нам известны начальные условия и силы, действующие на твёрдое тело, то мы можем написать закон движения его центра масс. А это уже немало. При поступательном движении все точки твёрдого тела, как мы знаем, движутся одинаково. Поэтому и вопрос о таком движении мы можем считать уже решённым!

<sup>\*)</sup> Несмотря на принятую договорённость в обозначениях, мы всё-таки сохранили здесь явное указание на внешний характер сил  $\vec{F}_i$ .

## 4.2. Дополнительные понятия

Итак, для анализа поступательного движения твёрдого тела и материальной точки, вполне достаточно привычных со школы понятий сила, масса, импульс. Если же мы хотим продвинуться в понимании закономерностей движений более сложных – вращательного, плоского, ..., то этих понятий уже мало. Их недостаточно даже для выяснения условий покоя (вспомните раздел школьного курса «статика»). Простые опыты демонстрируют, что, оказывается, значение имеют не только сами силы, но и точки их приложения. Не только масса тела, но и то, как она распределена по отношению к возможным осям вращения. Уточним эти новые дополнительные понятия.

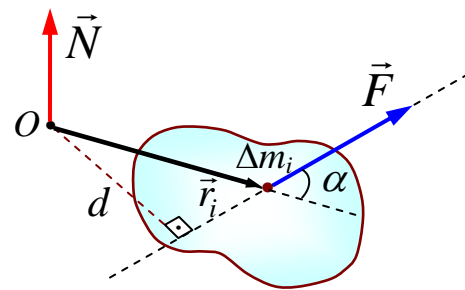


Рис. 4.4

➡ **(Опр.)** Моментом силы  $\vec{N}$  относительно некоторой точки пространства  $O$  называется векторное произведение радиус-вектора  $\vec{r}$ , проведённого из точки  $O$  в точку приложения силы, на вектор этой силы  $\vec{F}$ :

$$\vec{N} = [\vec{r}, \vec{F}] \quad (4.4)$$

Модуль момента силы, как и положено модулю любого векторного произведения, равен произведению модулей векторов на синус угла между ними:  $N = r \cdot F \cdot \sin \alpha$ . Нетрудно видеть (см. рис. 4.4), что эта величина равна произведению модуля силы  $F$  на так называемое «плечо» этой силы  $d$ :  $N = F \times (r \cdot \sin \alpha) = F \cdot d$ .

➡ **(Опр.)** Моментом импульса  $\vec{M}_i$  материальной точки  $\Delta m_i$  относительно точки пространства  $O$  называется векторное произведение радиус-вектора  $\vec{r}_i$ , проведённого из точки  $O$  к материальной точке, на импульс этой частицы  $\Delta m_i \vec{V}_i$ :

$$\vec{M}_i = [\vec{r}_i, \Delta m_i \vec{V}_i] \quad (4.5)$$

## § 4. Динамика твёрдого тела

Аналогично модулю момента силы модуль момента импульса равен произведению модуля импульса на плечо соответствующего момента.

► **(Опр.) Моментом импульса твёрдого тела (системы  $MT$ ) относительно точки пространства  $O$  называется сумма моментов импульса отдельных элементов твёрдого тела относительно этой же точки:**

$$\vec{M} = \sum_{i=1}^n [\vec{r}_i, \Delta m_i \vec{V}_i] \quad (4.6)$$

Заметим, что если специально не оговорено нечто иное, то под моментами сил и импульса подразумеваются именно **векторные величины!** Это моменты относительно точки!

Конечно, для каждого из этих векторов  $\vec{N}$ ,  $\vec{M}_i$  и  $\vec{M}$  можно говорить и о проекциях на ту или иную ось. Часто мы будем называть такие проекции «**моментом относительно оси**» или кратко – «**осевым моментом**». Особенно это оказывается важно при движении с сохраняющей ориентацию в пространстве (например, закреплённой) осью вращения  $Z$ . Соответствующие величины  $N_z$ ,  $M_{iz}$  и  $M_z$  – это, очевидно, уже скаляры.

### 4.3. Уравнение моментов

#### а) Для одной частицы (материальной точки)

Рассмотрим движение частицы с номером « $i$ » в некоторой инерциальной системе отсчёта с началом в точке  $O$ . По определению момент импульса этой частицы равен  $\vec{M}_i = [\vec{r}_i, \Delta m_i \vec{V}_i]$ <sup>\*)</sup>. Если взять производную от левой и правой части этого равенства, получим:

$$\frac{d\vec{M}_i}{dt} = [\dot{\vec{r}}_i, \Delta m_i \vec{V}_i] + [\vec{r}_i, \Delta m_i \dot{\vec{V}}_i]$$

---

<sup>\*)</sup> Мы умышленно выбрали такие обозначения (использовали индекс « $i$ » и символ « $\Delta$ »), чтобы упростить впоследствии переход к случаю твёрдого тела.

Первое слагаемое в правой части равно нулю, поскольку  $\dot{\vec{r}}_i$  – это, конечно же, скорость частицы  $\vec{V}_i$ , а векторное произведение двух сонаправленных векторов всегда равно нулю. Во втором слагаемом несложно углядеть величину, равную моменту силы  $\vec{N}_i$ , действующей на «*i*-ю» частицу. Ведь  $m\dot{\vec{V}}_i = \dot{\vec{p}}_i \equiv \frac{d\vec{p}_i}{dt} = \vec{F}_i$ , а  $[\vec{r}_i, \vec{F}_i] \equiv \vec{N}_i$  по определению момента силы. Таким образом, мы приходим к равенству

$$\frac{d\vec{M}_i}{dt} = \vec{N}_i \quad (4.7)$$

Оно и называется «уравнением моментов»: *Скорость изменения момента импульса частицы равна моменту силы, действующей на эту частицу.*

Конечно же, оба момента должны рассчитываться относительно одной и той же точки пространства  $O$ , неподвижной в данной инерциальной системе отсчёта.

*б) Для системы материальных точек (и твёрдого тела)*

Вновь используем рисунок 4.3. Напомним, что на нём представлена система материальных точек – частиц с массами  $\Delta m_i$ , взаимодействующих друг с другом с силами  $\vec{f}_{ij}$ , а также находящихся под действием внешних сил  $\vec{F}_i$ . Для каждой частицы системы мы вправе написать «своё» уравнение моментов:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d\vec{M}_1}{dt} = \sum_{j=2}^n \vec{N}_{ij}^{внутр} + \vec{N}_1^{внешн}; \\ \dots \dots \\ \frac{d\vec{M}_i}{dt} = \sum_{j \neq i}^n \vec{N}_{ij}^{внутр} + \vec{N}_i^{внешн}; \\ \dots \dots \\ \frac{d\vec{M}_n}{dt} = \sum_{j=1}^{n-1} \vec{N}_{nj}^{внутр} + \vec{N}_n^{внешн}. \end{array} \right.$$

## § 4. Динамика твёрдого тела

Обозначение  $\vec{N}_i^{\text{внешн}}$  используется здесь, конечно же, для суммарного момента внешних сил, действующих на  $i$ -ю частицу системы. Просуммируем все левые и правые части уравнений. В

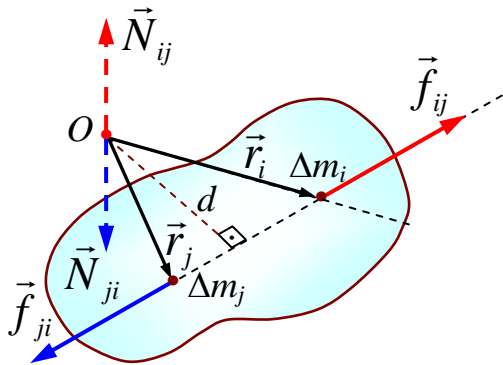


Рис. 4.5

правой части возникнут пары моментов сил  $\vec{N}_{ij} + \vec{N}_{ji}$ . Они соответствуют внутренним силам равным и противоположно направленным друг другу по 3-му закону Ньютона. Рисунок 4.5 иллюстрирует равенство плеча таких сил и позволяет

проследить, что их моменты направлены в противоположные стороны –  $\vec{N}_{ij} \uparrow \downarrow \vec{N}_{ji}$ . А значит можно утверждать, что  $\vec{N}_{ij} + \vec{N}_{ji} = 0$ . Суммирование всех подобных слагаемых в результате даёт ноль. В правой части останется лишь сумма моментов всех внешних сил  $\sum_{i=1}^n \vec{N}_i^{\text{внешн}}$ .

Левую часть можно записать как производную от суммы моментов импульса всех частиц, составляющих систему. Т.е. как раз того, что является моментом импульса  $\vec{M}$  системы материальных точек!

$$\frac{d\vec{M}}{dt} = \sum_{i=1}^n \vec{N}_i^{\text{внешн}} \quad (4.8)$$

Иначе говоря, теперь можно утверждать, что

**Скорость изменения момента импульса системы материальных точек равна сумме моментов внешних сил, действующих на все частицы этой системы**

Ясно, что это уравнение моментов справедливо также и для случая движения твёрдого тела.

❖ **Замечания**

- 1) Надо помнить, что уравнение моментов, как и в случае одной материальной точки, справедливо в инерциальной системе отсчёта. Есть, однако, особый случай, когда равенство (4.8) выполняется и в неинерциальной системе отсчёта. Это так называемая «система центра масс», о которой будет сказано ниже.
- 2) Векторное равенство (4.8), записанное относительно точки  $O$ , можно спроецировать на некоторую ось  $Z$ , содержащую эту точку. Мы получим тогда скалярную форму записи уравнения моментов:

$$\frac{dM_z}{dt} = \sum_{i=1}^n N_{zi}^{внеш}, \quad (4.8,a)$$

которая оказывается особенно плодотворной при анализе динамики движения твёрдых тел.

#### **4.4. Вращение ТТ относительно закреплённой оси. Момент инерции**

Вооружившись важными сведениями о поведении особой точки – центра масс системы – и уравнением моментов, приступим к анализу движения твёрдого тела в наиболее часто встречающихся ситуациях. Самым простым представляется вращение ТТ вокруг неподвижной оси. Например, неизменность пространственного положения реальной оси  $OZ$ , можно обеспечить, закрепив её в подшипниках. Будем опираться в этом случае на скалярную форму уравнения моментов  $\frac{dM_z}{dt} = N_z^{внеш}$ .

**4.4.1. Осевой момент импульса.** «Подсчитаем» момент импульса ТТ относительно оси – осевой момент  $M_z$ . Как обычно, “разобьём” твёрдое тело на малые элементы с массами  $\Delta m_i$ , положение которых указывают радиус-векторы  $\vec{r}_i$  – см. рис. 4.6. Мы помним, что при вращательном движении все точки тела характеризуются одним и тем же вектором угловой скорости  $\vec{\omega}$ . Этот вектор обязательно направлен вдоль оси вращения  $Z$ .

## § 4. Динамика твёрдого тела

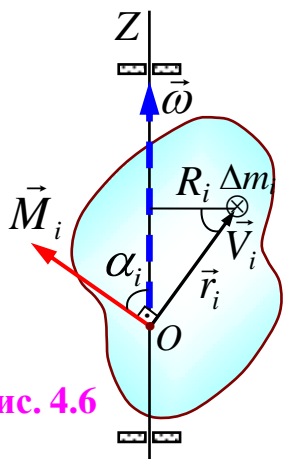


Рис. 4.6

Векторы линейной скорости и импульсов  $\Delta m_i \vec{V}_i$  этих элементов перпендикулярны как оси  $Z$ , так и векторам  $\vec{r}_i$ .

Проекция момента импульса каждого элемента  $\vec{M}_i$  на ось равна произведению его модуля  $M_i$  на косинус угла  $\alpha_i$  между вектором и осью. Запишем цепочку

простых преобразований для этой величины:

$$M_{iz} = M_i \cdot \cos \alpha_i = r_i \cdot \Delta m_i v_i \cdot \cos \alpha_i = \left\{ \begin{array}{l} \text{поменяем местами} \\ \text{буквы} \end{array} \right\} = \\ = \Delta m_i v \cdot r_i \cos \alpha_i = \Delta m_i \omega R_i \cdot R_i = \Delta m_i \omega R_i^2.$$

Здесь произведение  $r_i \cdot \cos \alpha_i$  есть расстояние от элемента  $\Delta m_i$  до оси вращения  $R_i$ . Теперь, чтобы найти осевой момент импульса всего тела, просуммируем по всем его элементам:

$$M_z = \sum_{i=1}^n M_{iz} = \sum_{i=1}^n (\Delta m_i \omega R_i^2) = \left[ \sum_{i=1}^n (\Delta m_i R_i^2) \right] \cdot \omega.$$

Обозначим  $I_z$  выделенную квадратными скобками конструкцию. Она играет важную роль при анализе всякого движения твёрдого тела кроме поступательного.

► **(Опр.) Моментом инерции твёрдого тела относительно оси  $Z$  называется сумма произведений масс всех элементов тела на квадраты их расстояний до оси:**

$$I_z = \sum_{i=1}^n (\Delta m_i R_i^2) \quad (4.10)$$

Момент инерции – скалярная величина! Элементы  $TT$  предполагаются нами настолько малыми по геометрическим размерам, чтобы расстояние  $R_i$  от любой точки элемента до оси можно было считать одинаковым. С математической точки зрения

это означает необходимость предельного перехода к бесконечно малым величинам  $\Delta m_i \rightarrow dm$  и от суммы к интегралу:

$$I_z = \int R^2 dm \quad (4.10, a)$$

Рассчитывать моменты инерции конкретных тел мы будем учиться на семинарских и практических занятиях. Здесь же заметим, что процедура, строго говоря, предполагает вычисление объёмного интеграла. Однако во многих важных случаях он может быть сведён к весьма несложному определённому интегралу.

Итак, мы видим, что при вращении вокруг закреплённой оси существует довольно простая взаимосвязь осевого момента импульса твёрдого тела с его угловой скоростью:

$$M_z = I_z \cdot \omega \quad (4.11)$$

Уже в этом соотношении можно подглядеть простую аналогию с равенством (4.3): импульс тела равен произведению его массы на скорость, а осевой момент импульса – произведению момента инерции на угловую скорость. Аналогия этим не исчерпывается!

Скорость изменения импульса тела равна произведению массы тела на его ускорение:  $\frac{d\vec{P}}{dt} = m\vec{a}_c$ . Но ведь, исходя из только что полученного результата для осевого момента импульса (4.11), легко получить:

$$\frac{dM_z}{dt} = \frac{d}{dt}(I_z \omega) = I_z \frac{d\omega}{dt} \equiv I_z \beta.$$

То есть скорость изменения осевого момента импульса равна произведению момента инерции  $II$  на его угловое ускорение. Момент инерции при вращательном движении играет роль аналогичную массе тела при его поступательном движении!  
***Момент инерции играет роль меры инертности тела по отношению к вращению.***

Из определения момента инерции видно, что он зависит не только от массы тела как таковой, но от распределения этой



## § 4. Динамика твёрдого тела

---

массы относительно оси  $Z$ . Момент инерции тем больше, чем большая часть массы тела удалена от этой оси.

### 4.4.2. Основное уравнение вращательного движения

Продолжим искать аналогии. Коль скоро мы упростили запись левой части уравнения моментов, вспомним и о его правой части. Запишем:

$$I_z \beta = N_z^{\text{внешн}} \quad (4.12)$$

✚ Такое равенство носит название *основного уравнения динамики вращательного движения ТТ*.

Аналогия с уравнением движения (вторым законом Ньютона) здесь опять налицо: вместо «массы на ускорение» – «момент инерции на угловое ускорение», а вместо суммы внешних сил в правой части – сумма моментов внешних сил!

Заметим, что аналогия всё же не полная. Надо помнить, что равенства  $\frac{d\vec{P}}{dt} = m\vec{a}_c$  и  $m\vec{a}_c = \vec{F}$  – векторные, а  $\frac{dM_z}{dt} = I_z \beta$  и  $I_z \beta = N_z^{\text{внешн}}$  – скалярные. При этом сама масса тела  $m$  величина скалярная, не зависящая от направления, тогда как момент инерции  $I_z$  существенно зависит от выбора оси  $Z$  – недаром его называют осевым моментом инерции<sup>\*)</sup>.

### 4.4.3. Теорема Гюйгенса-Штейнера

На семинарских занятиях предполагается рассчитывать моменты инерции в простейших ситуациях. Например, для однородного диска (или цилиндра) относительно оси перпендикулярной его плоскости и проходящей через середину. Здесь действовать можно строго по определению и результат не

---

<sup>\*)</sup> При анализе более сложных движений ей придают даже тензорный характер!

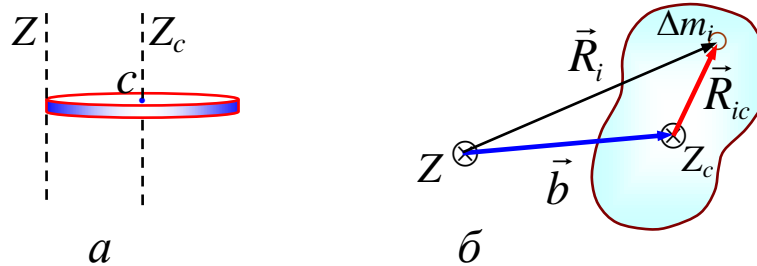


Рис. 4.7

заставит себя ждать:  $I_z = \frac{mR^2}{2}$ . Стоит, однако, всего лишь выбрать ось проходящую не через центр, а, например, через край диска, и вычисления кардинально усложнятся (см. рис. 4.7,а). На помощь приходит в таких случаях специальная теорема – теорема Гюйгенса–Штейнера («теорема о параллельных осях»):

✚ *Момент инерции  $I_z$  твёрдого тела относительно произвольной оси равен сумме момента инерции  $I_c$  относительно оси, параллельной данной и проходящей через его центр масс, и произведения массы тела на квадрат расстояния  $b$  между осями:*

$$I_z = I_c + mb^2 \quad (4.13)$$

Прежде всего, запишем результат, который даёт применение теоремы

для вышеприведённого примера с диском:  $I_z = \frac{mR^2}{2} + mR^2 = \frac{3}{2}mR^2$ . Вот как просто! А теперь докажем теорему<sup>\*)</sup>.

На рис. 4.7,б представлена проекция тела произвольной формы на плоскость, перпендикулярную оси  $Z$ . Вектор  $\vec{b}$  проведён от неё к параллельной ей оси  $Z_c$ , проходящей через центр масс тела. Тело разбито на малые элементы с массами  $\Delta m_i$ , положение которых относительно осей задают векторы  $\vec{R}_i$  и  $\vec{R}_{ic}$  соответственно. Из рисунка видно, что  $\vec{R}_i = \vec{b} + \vec{R}_{ic}$ . Момент инерции относительно оси  $Z$  по определению равен:

$$I_z = \sum_{i=1}^n (\Delta m_i R_i^2) = \sum_{i=1}^n \left[ \Delta m_i (\vec{b} + \vec{R}_{ic})^2 \right]. \quad (*)$$

<sup>\*)</sup> Это доказательство мы не считаем необходимым включать в обязательную программу курса.

## § 4. Динамика твёрдого тела

---

Во второй сумме здесь появился «скалярный квадрат» вектора  $\vec{R}_i$ , т.е. скалярное произведение вектора самого на себя. Напишем, чему он равен:  $(\vec{b} + \vec{R}_{ic})^2 = b^2 + 2(\vec{b}, \vec{R}_{ic}) + R_{ic}^2$ . После подстановки в правую часть равенства (\*) она распадается на три части, причём две из них имеют очевидный смысл:  $\sum_{i=1}^n \Delta m_i b^2 = \left(\sum_{i=1}^n \Delta m_i\right) b^2 = m b^2$  и  $\sum_{i=1}^n \Delta m_i R_{ic}^2 = J_{zc}$ .

Третья же  $2\left(\vec{b}, \sum_{i=1}^n \Delta m_i \vec{R}_{ic}\right)$  равна нулю. Ведь сумма  $\sum_{i=1}^n \Delta m_i \vec{R}_{ic}$  равна произведению массы тела на радиус-вектор, задающий положение центра масс тела *относительно самого центра масс* (см. определение центра масс). Значит это просто нулевой вектор!

Всё это и доказывает утверждение теоремы.

### 4.5. Динамика плоского движения твёрдого тела. Система центра масс

Теперь мы можем перейти к анализу более сложного и, вместе с тем, очень важного с практической точки зрения случая движения твёрдого тела – плоского движения. Даже в школьном курсе в задачах нет-нет да появлялись «шарики, скатывающиеся с наклонной плоскости». Поскольку речь шла о движении материальных точек, вращательной составляющей такого движения просто пренебрегали. Мы же можем теперь разобраться с этим поподробнее.

Напомним, что с кинематической точки зрения плоское движение можно представить как сумму поступательного и вращательного. Запишем, прежде всего, уравнение, позволяющее определиться с поступательной составляющей движения. Для этого, как мы помним, необходимо выбрать инерциальную систему отсчёта. Ускорение центра масс тела относительно этой системы можно найти из равенства, соответствующего второму закону Ньютона:

$$\vec{a}_c = \frac{\sum_{i=1}^n \vec{F}_i^{\text{внешн}}}{m}. \quad (1)$$

Мы знаем, кроме того, что в этой же системе отсчёта (см. рис. 4.8) выполняется и уравнение моментов  $\frac{dM_z}{dt} = N_z^{\text{внешн}}$ , а значит и

его следствие  $I_z \beta = N_z^{\text{внешн}}$ . На практике, однако, иметь дело с последним уравнением, которое внешне выглядит весьма просто, крайне неудобно. Обратите внимание хотя бы на то, что момент инерции тела относительно неподвижной оси  $Z$  всё время меняется.

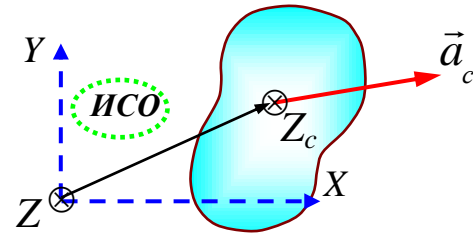


Рис. 4.8

Оказывается можно обойти эти трудности, используя особую систему отсчёта, связанную с центром масс самого тела – так называемую «систему центра масс». Такая  $CO$  движется поступательно вместе с телом (возможно ускоренно) и может быть и неинерциальной! Можно доказать<sup>\*)</sup>, однако, что уравнение моментов, записанное в этой системе относительно оси  $Z_c$ , проходящей через центр масс тела и параллельной оси  $Z$ , также справедливо в знакомой нам форме. А вот момент инерции  $I_c$  относительно этой оси – уже величина постоянная.

Если добавить ещё рассчитанное, исходя из формы и размеров тела, выражение для его момента инерции  $I_c$  и знание кинематики, то система уравнений, описывающих плоское движение, приобретает замкнутый вид:

$$\begin{cases} m\vec{a}_c = \vec{F}^{\text{внешн}}; \\ I_c \beta = N_{Z_c}^{\text{внешн}}; \\ I_c = \dots; \\ + \text{ "кинематика"} \end{cases} \quad (**)$$

<sup>\*)</sup> Доказательство мы вынесем в приложение к курсу.

## § 4. Динамика твёрдого тела

Ещё раз обратим внимание, что первое равенство – векторное (ему соответствуют несколько скалярных), а второе уравнение – основное уравнение динамики вращательного движения твёрдого тела записано относительно оси  $Z_c$  (см. рис. 4.8) жёстко связанной с центром масс тела. А теперь приведём хрестоматийный пример.

**Пример.** Цилиндр скатывается по наклонной плоскости. Выясним, от чего зависит ускорение его центра масс. Рассмотрим также вопрос об условиях качения без проскальзывания (см. рис. 4.9).

С учётом изображённых на рисунке сил, действующих на цилиндр, запишем конкретные уравнения системы вида (\*\*):

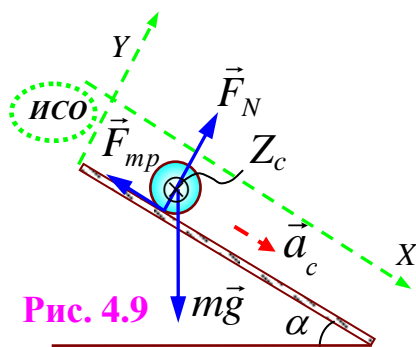


Рис. 4.9

$$\left\{ \begin{array}{l} ma_c = mg \cdot \sin \alpha - F_{mp}, \quad (1) \\ 0 = mg \cdot \cos \alpha - F_N, \quad (2) \\ I_c \beta = F_{mp} \cdot R, \quad (3) \\ I_c = \frac{mR^2}{2}, \quad (4) \\ a_c = \beta \cdot R. \quad (5) \end{array} \right.$$

Решение этой системы позволяет ответить практически на все вопросы, связанные с данным движением. Так, поступательное движение определено ускорением центра масс цилиндра:

$$a_c = \frac{mg \sin \alpha}{m + I_{zc} / R^2} = \frac{2}{3} g \sin \alpha.$$

Напомним, что соскальзывание без трения происходит с ускорением  $g \cdot \sin \alpha$ . Появившийся коэффициент  $2/3$  в нашем ответе – это «цена» вращательного движения тела при качении! Эта цена зависит от момента инерции тела, т.е. от распределения его массы относительно оси  $Z_c$ . Например, сплошной цилиндр

$\left(I_c = \frac{mR^2}{2}\right)$  скатывается быстрее полого  $(I_c = mR^2)$  независимо от массы и радиуса !

Что касается линейной скорости центра масс и угловой скорости качения, то они растут по линейному закону:

$$v_c = \left(\frac{2}{3} g \sin \alpha\right) \cdot t; \quad \omega = \left(\frac{2}{3} \frac{g}{R} \sin \alpha\right) \cdot t.$$

❖ **Замечание**

Мы рассмотрели случай скатывания цилиндра. Важно помнить, что если проскальзывание отсутствует, то мы имеем дело с силой трения покоя! Условие отсутствия проскальзывания  $F_{mp} \leq \mu \cdot F_N$  накладывает определённые ограничения на соотношение коэффициента трения  $\mu$  и угла наклона плоскости  $\alpha$ . Разберитесь для тренировки с этим вопросом самостоятельно.

Мы же добавим, что при наличии проскальзывания исчезает кинематическая связь линейного и углового ускорений  $a_c = \beta \cdot R$ , однако, добавляется уравнение для силы трения скольжения  $F_{mp}^{ск} = \mu F_N = \mu \cdot mg \cdot \cos \alpha$ . И тогда для линейного и углового ускорений несложно получить:

$$a_c = g(\sin \alpha - \mu \cos \alpha); \quad \beta = \frac{2\mu g \cos \alpha}{R}.$$

## § 5. Законы сохранения в механике

### 5.1. Закон сохранения импульса

Как мы уже отмечали, все полученные в прошлом параграфе результаты справедливы как для систем материальных точек, так и для движения твёрдого тела. Воспроизведём опять рисунок 4.3,

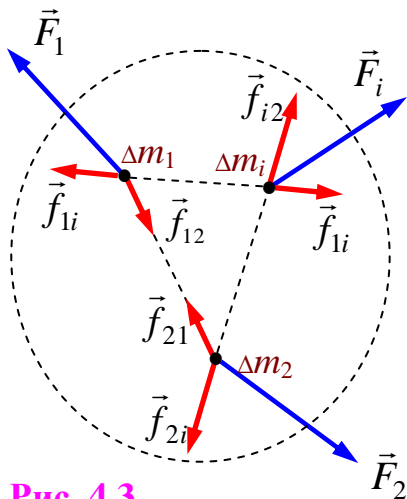


Рис. 4.3

и запишем для всех частиц систему уравнений 2-го закона Ньютона, справедливых в некоторой инерциальной системе отсчёта.

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d\vec{p}_1}{dt} = \sum_{j \neq 1} \vec{f}_{1j} + \vec{F}_1^{\text{внешн}}; \\ \dots \dots \\ \frac{d\vec{p}_i}{dt} = \sum_{j \neq i} \vec{f}_{ij} + \vec{F}_i^{\text{внешн}}; \\ \dots \dots \\ \frac{d\vec{p}_n}{dt} = \sum_{j \neq n} \vec{f}_{nj} + \vec{F}_n^{\text{внешн}}. \end{array} \right. \quad \text{"+"}$$

Здесь мы применили «ньютонову» формулировку закона с использованием понятия импульса материальных точек (частиц). Просуммируем все эти уравнения и получим:

$$\sum_{i=1}^n \frac{d\vec{p}_i}{dt} = \sum_{i \neq j} (\vec{f}_{ij} + \vec{f}_{ji}) + \sum_{i=1}^n \vec{F}_i^{\text{внешн}}.$$

Первая сумма в правой части равна нулю. Ведь для любой пары взаимодействующих друг с другом частиц по третьему закону Ньютона силы равны и противоположно направлены  $\vec{f}_{ij} = -\vec{f}_{ji}$ ! В

левой части можно поменять местами знаки суммирования и дифференцирования, а значит, получим скорость изменения

импульса всей системы  $\sum_{i=1}^n \frac{d\vec{p}_i}{dt} = \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^n \vec{p}_i = \frac{d\vec{P}}{dt}$ . Итак, как и для

одной частицы, справедливо равенство:

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i^{\text{внешн}} . \quad (5.1)$$

Теперь можно сформулировать закон сохранения импульса для системы материальных точек (а значит и для ТТ).

**✚ Если сумма всех внешних сил, действующих на тела системы равна нулю, то импульс системы не меняется с течением времени (т.е. сохраняется)**

Запишем это утверждение компактно:

$$\text{Если } \sum_{i=1}^n \vec{F}_i^{\text{внешн}} = 0, \quad \text{то } \vec{P}^{\text{"до"}} = \vec{P}^{\text{"после"}} . \quad (5.2)$$

**❖ Сделаем несколько важных замечаний**

- 1) Как видим, мы не используем никаких дополнительных терминов «изолированная» или «замкнутая система». Мы формулируем здесь конкретные ограничения на внешние силы. Т.е. на силы, которые действуют со стороны тел, не входящих в рассматриваемую систему. Будем поступать аналогично и в дальнейшем для других законов сохранения.
- 2) Конечно, надо помнить и об использовании инерциальной *СО*.
- 3) Требование  $\sum_{i=1}^n \vec{F}_i^{\text{внешн}} = 0$ , является весьма «жестким», редко выполняющимся на практике. Если удаётся найти такое направление, вдоль которого равна нулю сумма проекций внешних сил, то можно утверждать, что сохраняется проекция импульса системы на это направление:

$$\text{Если } \sum_{i=1}^n (\vec{F}_i^{\text{внешн}})_x = 0, \quad \text{то } (\vec{P})_x^{\text{"до"}} = (\vec{P})_x^{\text{"после"}} . \quad (5.2,a)$$

- 4) А вот происхождение внутренних сил  $\vec{f}_{ij}^{\text{внутр}}$  может быть самое разное. Нет никаких ограничений на их характер – это могут быть, в том числе, различные силы трения, и силы, возникающие при неупругих деформациях тел!
- 5) Закон сохранения импульса имеет те же самые границы применимости, что и второй и третий законы Ньютона.



## 5.2. Реактивное движение. Уравнение Мещерского

Вспомним теорему о центре масс: из равенства  $\vec{a}_c = \frac{\sum \vec{F}_i^{\text{внешн.}}}{m}$

следует, что в отсутствии нескомпенсированных внешних сил (при условии  $\sum \vec{F}_i^{\text{внешн.}} = 0$ ), центр масс системы покоится или движется равномерно. Никакие внутренние взаимодействия не способны сообщить ускорение системе как целому! А вот заставить двигаться с ускорением часть системы можно за счёт движения другой её части в противоположном направлении. В этом и состоит принцип реактивного движения – в его основе «эффект отдачи».

Найдём реактивную силу. Пусть ракета движется в космосе вдали от других тел – см. рис. 5.1. В некоторый момент времени  $t$  масса ракеты равна  $m$ , а её скорость относительно инерциальной системы отсчёта равна  $\vec{V}$ . Спустя малый промежуток времени  $dt$  масса ракеты уменьшится на величину  $dm$  за счёт выброса продуктов сгорания топлива реактивного двигателя ракеты. Пусть их скорость равна  $\vec{u}$  относительно ракеты. Запишем равенство, соответствующее закону сохранения импульса для системы «ракета – продукты сгорания»:

$$\underline{m\vec{V}} = \underline{(m - dm)(\vec{V} + d\vec{V})} + \underline{dm(\vec{V} + \vec{u})}.$$

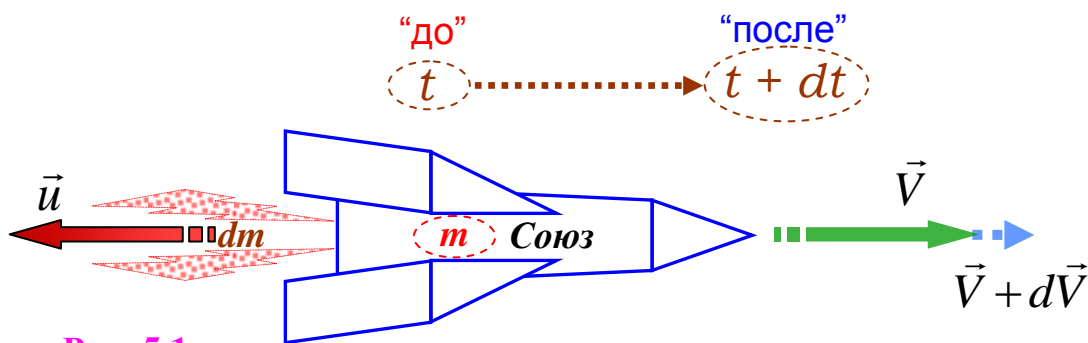


Рис. 5.1

Здесь  $\vec{V} + \vec{u}$  – скорость «выброса» продуктов сгорания из сопла двигателя ракеты относительно инерциальной системы отсчёта (по закону сложения скоростей). Раскроем скобки в правой части и приведём подобные. Будем пренебрегать, кроме того, слагаемым вида  $dm \cdot d\vec{V}$  – бесконечно малой величиной второго порядка малости. Получим в результате:  $m \cdot d\vec{V} = -dm \cdot \vec{u}$ . Поделим это равенство на интервал времени  $dt$  и запишем окончательно уравнение движения ракеты:

$$m \frac{d\vec{V}}{dt} = -\mu \cdot \vec{u}. \quad (5.3)$$

Это и есть уравнение Мещерского. В нём использовано обозначение  $\frac{dm}{dt} \equiv \mu$  для темпа выброса продуктов сгорания топлива.

Мы знаем, что произведение массы на ускорение всегда должно равняться действующей силе. В случае ракеты эта сила равна произведению  $-\mu \cdot \vec{u}$  и называется «**реактивной силой**»:

$$\vec{F}_{\text{реакт}} = -\mu \cdot \vec{u}.$$

Знак «–» указывает на то, что эта сила направлена в сторону, противоположную направлению выброса продуктов сгорания. В общем случае реактивная сила может, как разгонять, так и тормозить ракету.

Вблизи космических тел на ракету помимо реактивной силы действуют, конечно же, и силы тяготения, а на этапе её разгона в атмосфере – ещё и сила сопротивления воздуха. Чтобы учесть это, достаточно всего лишь добавить соответствующие силы ( $m\vec{g}$ ,  $\vec{F}_c$ , ...) в правую часть уравнения Мещерского.

### 5.3. Закон сохранения момента импульса

Мы знаем, что для систем материальных точек и при движении твёрдого тела выполняется уравнение моментов:

$$\frac{d\vec{M}}{dt} = \sum_{i=1}^n \vec{N}_i^{\text{внешн}}.$$

Опираясь на него, мы можем сформулировать ещё один закон сохранения:

✚ *Если сумма моментов всех внешних сил, действующих на тела системы равна нулю, то момент импульса системы не меняется с течением времени (т.е. сохраняется)*

Кратко:

$$\text{Если } \sum_{i=1}^n \vec{N}_i^{\text{внешн}} = 0, \quad \text{то } \vec{M} = \text{const} \quad (5.4)$$

#### ❖ Замечания

1. Момент импульса сохраняется в **инерциальной системе отсчёта**, в которой покоится точка  $O$ , относительно которой определены и сам момент импульса  $\vec{M}$  и все моменты, действующих на тела системы сил  $\vec{N}_i^{\text{внешн}}$ .

2. Требование  $\sum_{i=1}^n \vec{N}_i^{\text{внешн}} = 0$  опять-таки может оказаться слишком жёстким. Если равна нулю сумма проекций моментов внешних сил на некоторое направление, например, закреплённую ось вращения  $Z$ , то сохраняется проекция момента импульса системы только на это направление:

$$\text{Если } \sum_{i=1}^n (\vec{N}_i^{\text{внешн}})_z = 0, \quad \text{то } (\vec{M})_z^{\text{"до"}} = (\vec{M})_z^{\text{"после"}}. \quad (5.4, a)$$

В частности, для систем с переменным моментом инерции выполняется равенство:

$$(I_z \omega)^{\text{"до"}} = (I_z \omega)^{\text{"после"}}, \quad (5.4, б)$$

справедливость которого обычно ярко иллюстрируется в классических демонстрациях с использованием «скамьи Жуковского».

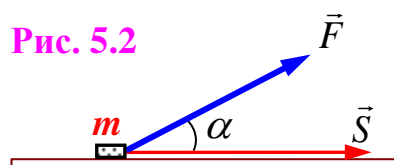
### 5.4. Работа силы

Поищем другие общие свойства «ньютоновых» сил, которые приведут нас к ещё одному закону сохранения – закону

сохранения механической энергии. На пути к нему нам необходимо вспомнить ряд важных понятий: работа силы, механическая энергия (кинетическая и потенциальная), консервативные и неконсервативные силы.

Если сила действует на движущееся тело, то говорят, что сила совершает работу. Исключением является случай, когда сила перпендикулярна вектору скорости тела. Величина силы, взаимная ориентация векторов силы и направления движения могут изменяться в процессе движения.

Для простейшего случая (см. рис. 5.2) прямолинейного движения под действием постоянной силы – не меняется ни сила



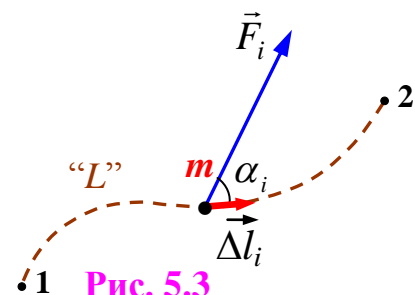
**Рис. 5.2**

$\vec{F}$ , ни угол  $\alpha$  между силой и скоростью – определение для работы известно из школьного курса 9-го класса:

$$A = F \cdot S \cdot \cos \alpha . \quad (5.5)$$

Здесь буквой  $S$  обозначен модуль перемещения  $\vec{S} \equiv \Delta \vec{r}$  для лучшей узнаваемости этого определения. Видно, что работа – величина скалярная. Если угол  $\alpha$  острый, то работа положительна, если тупой – работа данной силы отрицательна. Если сила перпендикулярна перемещению (т.е.  $\alpha = \pi/2$ ), несмотря на действие силы и наличие перемещения, работа данной силой не совершается.

Усложним задачу – пусть тело движется теперь по произвольной траектории “L” (см. рис. 5.3), а сила может изменяться как по величине, так и по направлению. Тогда, чтобы найти работу на всём этапе движения 1–2, необходимо разбить траекторию на малые



**Рис. 5.3**

## § 5. Законы сохранения в механике

участки с перемещениями  $\vec{\Delta l}_i$ , на которых силу  $\vec{F}_i$  можно считать постоянной, вычислить работу  $\Delta A_i$  на этих малых участках, используя равенство (5.5), а затем сложить все эти элементарные работы:

$$A_{12} = \sum_i \Delta A_i = \sum_i (F_i \cdot \Delta l_i \cdot \cos \alpha_i). \quad (5.6)$$

Здесь  $i$  – номер малого участка траектории. После предельного перехода с заменами:  $\vec{\Delta l}_i \rightarrow d\vec{l}$  (\*),  $\vec{F}_i \rightarrow \vec{F}$ ,  $\alpha_i \rightarrow \alpha$ ,  $\Delta A_i \rightarrow \delta A$ , аналитический путь вычисления такой суммы для бесконечного числа бесконечно малых слагаемых ведет к интегрированию. Уточним:

► **(Опр.)** *Элементарной работой  $\delta A$  называется произведение проекции силы на направление малого перемещения точки приложения силы  $d\vec{l}$  на модуль этого перемещения:*

$$\delta A = F_l \cdot dl \quad \text{или} \quad \delta A = F dl \cos \alpha \quad (5.7)$$

Нетрудно узнать в этих «конструкциях» скалярное произведение векторов  $\vec{F}$  и  $d\vec{l}$  на отдельных участках траектории. Сумма элементарных работ (а это и есть интеграл) – даёт полную работу.

► **(Опр.)** *Работа на конечном участке траектории вычисляется как сумма элементарных работ:*

$$A_{12} = \int_L dA = \int_L F_l dl \quad (5.6,a)$$

Итак, и в общем случае работа силы – величина скалярная и существенно зависит от взаимной ориентации векторов силы и скорости. В частности работа силы перпендикулярной скорости, как мы уже отмечали, всегда равна нулю. Такой случай реализуется, например, при движении по окружности под действием центростремительной силы.

---

\*) Здесь и далее для малых перемещений мы будем использовать обозначения  $\vec{\Delta l}_i$  и  $d\vec{l}$ , поскольку обозначения  $\Delta \vec{r}_i$  и  $d\vec{r}$  планируем применять в дальнейшем для перемещений в радиальном направлении.

❖ **Замечания**

1) Надо помнить, что работа зависит от выбора системы отсчёта !

2) При анализе движения твёрдого тела полезно уметь вычислять работу при его вращении относительно закреплённой оси (см. рис. 5.4). Проведём очевидные преобразования для элементарной работы при повороте тела на малый угол  $d\varphi$ :

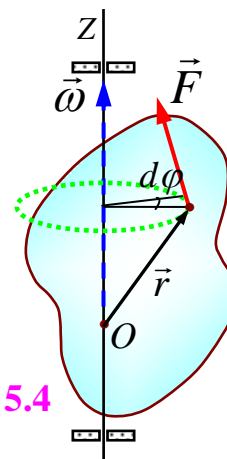


Рис. 5.4

$$\delta A = (\vec{F}, d\vec{l}) = (\vec{F}, \vec{V}dt) = (\vec{F}, [\vec{\omega}, \vec{r}])dt.$$

Теперь, используя правило перестановки в смешанном произведении векторов, получим:

$$\delta A = (\vec{F}, [\vec{\omega}, \vec{r}])dt = ([\vec{r}, \vec{F}], \vec{\omega})dt = (\vec{N}, \vec{\omega})dt = N_{\omega} \cdot \omega dt = N_z \cdot d\varphi.$$

Работу при повороте на конечный угол, как обычно, можно найти, суммируя элементарные работы  $\delta A$ , т.е. в результате интегрирования:

$$A = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} N_z d\varphi. \tag{5.8}$$

3) Быстроту совершения работы характеризует мощность силы.

➡ **(Опр.)** *Мощность силы равна отношению работы  $\delta A$ , совершаемой за малый интервал времени  $dt$  к величине этого интервала:*

$$W = \frac{\delta A}{dt} \tag{5.9}$$

Поскольку  $\delta A = Fdl \cos \alpha$ , а  $v = \frac{dl}{dt}$ , легко видеть, что мощность силы связана со скоростью движения МТ простым соотношением:

$$W = F \cdot v \cdot \cos \alpha \quad \text{или} \quad W = (\vec{F}, \vec{V}). \tag{5.10}$$

**5.5. Механическая энергия**

С понятием энергии мы сталкиваемся уже при рассмотрении механического движения, хотя оно имеет и более широкий смысл,

## § 5. Законы сохранения в механике

чем используется обычно в механике. Во многих случаях физические системы, над которыми совершают работу, могут эту работу запасать и при определённых условиях сами совершать такую же работу над другими телами или системами. Вот этот запас работы и называют механической энергией.

► **(Опр.)** *Механическая энергия есть физическая величина, измеряемая запасённой работой, которую способна совершить система тел*

Энергией обладает сжатая или растянутая пружина, притягивающиеся и отталкивающиеся тела. Энергией обладают также движущиеся тела. То есть, запас работы связан как с взаимодействием тел, так и с их движением. Поэтому различают два вида механической энергии – потенциальную и кинетическую.

### **5.6. Кинетическая энергия. Теорема о кинетической энергии**

Чтобы затормозить частицу, движущуюся со скоростью  $v$ , на неё в течение некоторого времени должна действовать сила. Это сила со стороны других тел, тормозящих частицу. Сила совершает работу, а частица, в свою очередь, способна совершить такую же по величине (с учётом 3-го закона Ньютона) работу над телами, тормозящими частицу. Нетрудно сосчитать

эту работу (проделайте это самостоятельно) – она равна  $\frac{mv^2}{2}$ .

Эту величину и принято по определению называть кинетической энергией материальной точки. Кинетическая энергия системы материальных точек равна сумме кинетических энергий частиц, входящих в систему.

► **(Опр.)** *Кинетическая энергия системы материальных точек равна*

$$T = \sum_{i=1}^n \frac{m_i v_i^2}{2} \quad (5.11)$$

❖ **Замечания**

- 1) Кинетическая энергия, как и работа, зависит от выбора системы отсчёта!
- 2) Кинетическая энергия величина аддитивная, скалярная и всегда положительная.

Докажем теперь так называемую **теорему о кинетической энергии**. Пусть материальная точка перемещается из точки 1 в точку 2 по произвольной траектории “L” (см. рис. 5.5). Найдём элементарную работу действующей на неё силы  $\vec{F}$  на малом перемещении  $d\vec{l}$ , выполняя цепочку несложных преобразований:

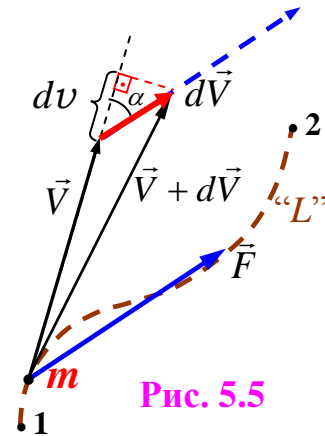


Рис. 5.5

$$\delta A = (\vec{F}, d\vec{l}) = (\vec{F}, \vec{v}) \cdot dt = \left( m \frac{d\vec{v}}{dt}, \vec{v} \right) \cdot dt = m(\vec{v}, d\vec{v}) = m \cdot \underbrace{|\vec{v}|}_{v} \cdot \underbrace{|d\vec{v}|}_{dv} \cdot \cos \alpha = mv \cdot dv.$$

Легко проверить дифференцированием, что полученный результат есть не что иное, как дифференциал (малое изменение) кинетической энергии частицы:  $mv \cdot dv = d\left(\frac{mv^2}{2}\right) \equiv dT$ .

Теперь можно просуммировать элементарные работы на всех малых участках траектории:

$$A_{12} = \int_{(1) \text{ "L" }}^{(2)} dT = T_2 - T_1 \quad \text{или} \quad \frac{mv_2^2}{2} - \frac{mv_1^2}{2} = A_{12}$$

Как работа, так и кинетическая энергия алгебраические скалярные величины. Они обладают свойством аддитивности – т.е. соответствующая величина для всей системы складывается из её составляющих для отдельных частиц. Сформулируем теперь утверждение теоремы, которое, по сути, уже доказано:



✚ *Изменение кинетической энергии системы равно работе сил, действующих на тела системы*

$$T_2 - T_1 = A_{12} \quad (5.12)$$

❖ **Замечание**

Важно помнить, что речь идёт здесь о суммарной работе  $A_{12}$  равнодействующих всех приложенных к каждому телу сил !

### 5.7. Кинетическая энергия твёрдого тела

Рассмотрим три важнейших частных случая движения твёрдого тела: поступательное, вращательное и плоское движения.

а) При поступательном движении в любой момент времени

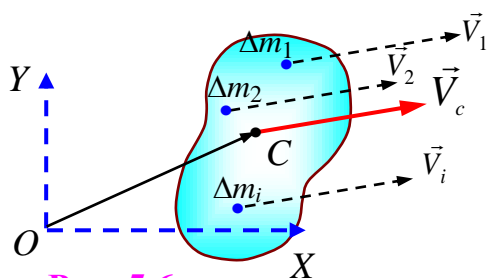


Рис. 5.6

все элементы тела  $\Delta m_i$  обладают одной и той же линейной скоростью  $\vec{V}_1 = \vec{V}_2 = \dots = \vec{V}_i$  (рис. 5.6) – той же, с которой движется его центр масс –  $\vec{V}_c$ . Поэтому *кинетическая энергия поступательно движущегося твёрдого тела равна*

$$T_{пост.} = \sum_{i=1}^n \frac{\Delta m_i v_i^2}{2} = \frac{1}{2} v_c^2 \cdot \sum_{i=1}^n \Delta m_i \Rightarrow T_{пост.} = \frac{m v_c^2}{2}, \quad (5.13)$$

где  $m$  – масса тела, а  $v_c$  – скорость его центра масс.

б) При *вращательном движении* в любой момент времени у всех элементов тела  $\Delta m_i$  одинаковы угловые скорости. Поэтому

$$T_{вращ.} = \sum_{i=1}^n \frac{\Delta m_i v_i^2}{2} = \sum_{i=1}^n \frac{\Delta m_i (\omega R_i)^2}{2} = \frac{\omega^2}{2} \sum_{i=1}^n \Delta m_i R_i^2 \Rightarrow T_{вращ.} = \frac{I_z \omega^2}{2}. \quad (5.14)$$

в) Плоское движение можно представить, как совокупность одновременно происходящих поступательного и вращательного. Чтобы найти кинетическую энергию такого движения, удобно вспомнить о понятии мгновенной оси вращения: в каждый момент времени движение представляет собой лишь поворот (рис. 5.7)

относительно такой оси, а значит  $T = \frac{I_{z_M} \omega^2}{2}$ . Момент инерции тела относительно мгновенной оси вращения  $I_{z_M}$  по теореме Штейнера можно связать с моментом инерции относительно оси, проходящей через центр масс тела  $I_c$ :

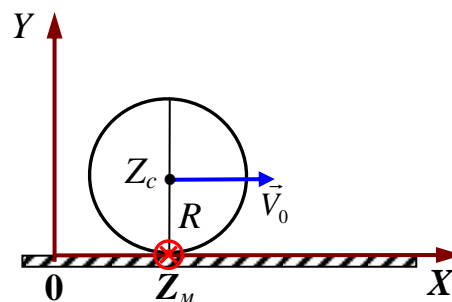


Рис. 5.7

$$I_{z_M} = I_c + mR^2,$$

где  $R$  – расстояние между этими параллельными осями. Если учесть теперь, что линейная скорость центра масс тела связана с угловой скоростью вращения равенством  $v_c = \omega R$ , нетрудно получить интересующий нас результат:

$$T_{\text{плоск.}} = \frac{(I_c + mR^2) \omega^2}{2} = \frac{I_c \omega^2}{2} + \frac{m(R\omega)^2}{2} \Rightarrow T_{\text{плоск.}} = \frac{mv_c^2}{2} + \frac{I_c \omega^2}{2}. \quad (5.15)$$

Мы поменяли местами слагаемые в итоговой записи, поскольку обычно говорят, что *кинетическая энергия при плоском движении твёрдого тела равна сумме энергии поступательного движения со скоростью центра масс и вращения относительно оси, проходящей через центр масс.*

### 5.8. Консервативные и неконсервативные силы

Прежде чем перейти к понятию потенциальной энергии нам придётся вспомнить, что по отношению к совершаемой работе все силы делятся на два класса.

➡ **(Опр.)** *Силы, работа которых не зависит от формы траектории, а определяется лишь начальным и конечным положением тела называются консервативными*

Нетрудно доказать, что для таких сил работа по замкнутой траектории равна нулю (сделайте это самостоятельно).

Силы, не обладающие таким свойством, являются неконсервативными. К последним относятся все различные виды

## § 5. Законы сохранения в механике

сил трения, реактивная сила, сила, действующая на заряженную частицу со стороны вихревого электрического поля, ...

К силам консервативным относятся гравитационные, упругие и «кулоновские» силы. Консервативными являются также внутриядерные и межмолекулярные силы. Важно помнить, однако, что «силовой центр»<sup>\*)</sup> в вышеперечисленных случаях должен покоиться в инерциальной системе отсчёта<sup>\*\*)</sup>. Докажем специальную теорему **о консервативности центральных сил**.

Уточним, прежде всего, что такое центральная сила. Это означает, что в любой точке пространства на частицу действует

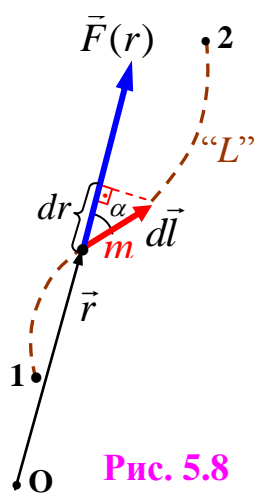


Рис. 5.8

сила, направленная к одной и той же неподвижной точке пространства  $O$  или от неё (радиально, т.е. вдоль прямой, содержащей частицу и точку  $O$  – см. рис. 5.8). Точка  $O$  называется «силовым центром». Величина силы зависит только от расстояния частицы до силового центра. Формализовать эти свойства центральной силы можно следующим образом:

$\vec{F}(\vec{r}) = F_r(r) \cdot \vec{e}_r$ . Здесь  $F_r(r)$  – проекция силы на направление радиус-вектора  $\vec{r}$ , проведённого

из силового центра к частице  $m$ ,  $\vec{e}_r = \frac{\vec{r}}{r}$  – единичный вектор, задающий радиальное направление. Говорят, что частицы находятся в центральном силовом поле или в поле центральных сил. Примерами поля центральных сил являются гравитационные и «кулоновские» силы.

Рассчитаем теперь работу центральной силы при перемещении частицы  $m$  из точки 1 в точку 2 вдоль траектории «L»:

<sup>\*)</sup> Чуть ниже мы поясняем это понятие.

<sup>\*\*)</sup> Говорят, что это «стационарные поля центральных сил».

$$A_{12} = \int_{(1)}^{(2)} (\vec{F}, d\vec{l}) = \int_{(1)}^{(2)} F_r \cdot \frac{|\vec{r}|}{r} \cdot \underbrace{|d\vec{l}| \cdot \cos \alpha}_{dr} = \int_{r_1}^{r_2} F_r(r) dr.$$

Криволинейный интеграл в начале приведённой цепочки равенств – это весьма непростая математическая «конструкция». Однако в случае поля центральной силы его удаётся, как мы видим, свести к обычному определённому интегралу! Такой интеграл, как известно, равен разности значений первообразной  $\Phi(r)$  скалярной функции  $F_r(r)$ :

$$A_{12} = \int_{r_1}^{r_2} F_r(r) dr = \Phi(r) \Big|_{r_1}^{r_2} = \Phi(r_2) - \Phi(r_1).$$

Полученный результат не зависит от формы траектории, что и подтверждает утверждение теоремы – центральные силы консервативны.

### 5.9. Потенциальная энергия

Потенциальная энергия  $U(x,y,z)$  – энергия взаимодействия тел. Эта энергия зависит только от взаимного расположения тел, т.е. только от их координат <sup>\*)</sup>. Поэтому понятие потенциальной энергии имеет смысл не для всех сил, а только для таких, для которых работа зависит лишь от положения (координат) тел системы, т.е. для консервативных сил.

► ***(Опр.) Потенциальная энергия измеряется работой, которую тела системы способны совершить при изменении своей конфигурации (взаимного расположения её частей)***

Важно понимать, что потенциальная энергия является такой функцией координат  $U = f(x,y,z)$ , что работа консервативных сил

---

<sup>\*)</sup> Под обозначением  $(x,y,z)$  мы будем понимать всю совокупность координат всех частиц системы.

## § 5. Законы сохранения в механике

$A_{12}^{(\kappa)}$  равна разности значений этой функции при изменении положений тел системы (конфигурации системы), т.е.  $A_{12}^{(\kappa)} = U_1 - U_2 = -\Delta U$ . Работа положительна, если  $U_2 < U_1$  ( $\Delta U < 0$ ). Иначе говоря, работа осуществляется за счёт убыли потенциальной энергии системы.

Как найти вид функции  $U(x, y, z)$  для конкретной консервативной силы  $\vec{F}(\vec{r})$ ? Прежде всего, необходимо договориться о так называемой нормировке. Пусть в некоторой точке пространства  $P_0(x_0, y_0, z_0^*)$  потенциальная энергия равна нулю:  $U(x_0, y_0, z_0) = 0$ . Тогда для произвольного положения частиц системы  $P(x, y, z)$  потенциальная энергия равна:

→ **(Опр.)**  $U(x, y, z) = A_{P \rightarrow P_0}$ , а значит  $U(x, y, z) = \int_{P_0}^P F_l dl$ . (5.16)

по любой траектории

Для иллюстрации данного определения понятия потенциальной энергии рассмотрим известные нам виды сил, действующих в механических системах.

### Примеры

#### 1. Гравитационное взаимодействие

(силы тяготения). Пусть материальная точка  $m$  находится в гравитационном поле некоторой планеты  $M$  (например, Земли – см. рис. 5.9). Это случай центральной, а значит консервативной силы. Она подчиняется закону всемирного тяготения и для описания состояния системы достаточно одной

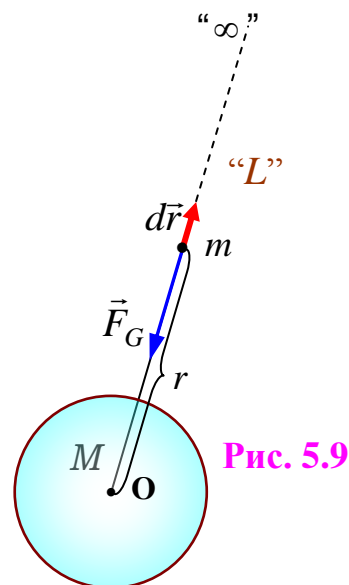


Рис. 5.9

\*Здесь в общем случае мы опять имеем в виду целый набор координат всех частиц системы.

переменной – расстояния между телами  $r$ . Договоримся считать потенциальную энергию равной нулю при бесконечно большом расстоянии между телами:  $U(\infty) = 0$  (условие нормировки). Тогда:

$$U(r) = A_{r \rightarrow \infty} = \int_r^{\infty} F_r dr = -GMm \int_r^{\infty} \frac{dr}{r^2} = -GMm \left( -\frac{1}{r} \right) \Big|_r^{\infty} = -G \frac{Mm}{r}.$$

$$\text{Итак: } U_G(r) = -G \frac{Mm}{r}. \quad U_G \rightarrow 0 \quad \text{при } r \rightarrow \infty. \quad (5.17)$$

Как видим, потенциальная энергия гравитационного взаимодействия величина отрицательная. Это соответствует притяжению тел!

### 2. *Электростатическое взаимодействие* («кулоновские» силы).

Потенциальную энергию электростатического взаимодействия  $U_e$  системы двух точечных заряженных частиц  $q_1$  и  $q_2$  можно найти совершенно аналогично. Пусть одна из них неподвижна в начале некоторой инерциальной системы отсчёта. Тогда при удалении другой на бесконечно большое расстояние (туда, где  $U_e$  будем полагать равной нулю) «кулоновская» сила совершит работу:

$$U_e(r) = \int_r^{\infty} F_r dr = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot q_1 q_2 \cdot \int_r^{\infty} \frac{dr}{r^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot q_1 q_2 \cdot \left( -\frac{1}{r} \right) \Big|_r^{\infty} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q_1 q_2}{r}.$$

$$\text{Итак} \quad U_e(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q_1 q_2}{r}. \quad U_e \rightarrow 0 \quad \text{при } r \rightarrow \infty. \quad (5.18)$$

Знак этой энергии зависит, очевидно, от того одноимёнными или разноимёнными являются эти заряды.

### 3. *Потенциальную энергию при упругой деформации* тел

определим для случая спиральной пружины. Пусть один конец её шарнирно закреплён в точке  $O$ , чтобы пружина могла поворачиваться. Тогда на материальную точку, закреплённую на противоположном конце пружины, действует центральная сила  $F_r(r) = -k(r - r_0)$ . Здесь

## § 5. Законы сохранения в механике

$r_0$  – координата МТ в отсутствии деформации пружины. Потенциальную энергию естественно считать равной нулю как раз при  $r = r_0$ . Тогда:

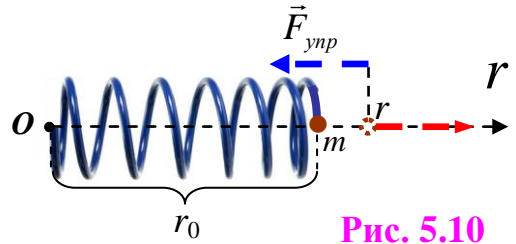


Рис. 5.10

$$U_{\text{упр}}(r) = \int_r^{r_0} F_r dr = -k \cdot \int_r^{r_0} (r - r_0) dr = -k \cdot \frac{(r - r_0)^2}{2} \Big|_r^{r_0} = \frac{k(r - r_0)^2}{2}.$$

Итак 
$$U_{\text{упр}}(r) = \frac{kx^2}{2}. \quad U_{\text{упр}} = 0 \quad \text{при} \quad x = 0. \quad (5.19)$$

В последнем равенстве мы использовали обозначение  $x = r - r_0$  для деформации пружины опять-таки ради лучшей «узнаваемости» этого известного со школы выражения потенциальной энергии деформированной пружины.

### ❖ Замечания

1. Говорят, что потенциальная энергия «определена с точностью до произвольной постоянной». Это означает лишь, что её *абсолютное значение* зависит от способа нормировки. А вот *изменение* потенциальной энергии при изменении положения тел системы от нормировки *не зависит*. Но ведь и все физически значимые величины, проявляющиеся на опыте, определяются именно изменением энергии, а не её абсолютным значением!

2. Заметим также, что в хорошо знакомом случае «однородного» поля тяготения Земли ( $U = mgh$ ) лучше говорить не о потенциальной энергии "тела, поднятого над Землей", а о потенциальной энергии системы «тело – Земля», либо о потенциальной энергии тела в поле тяготения Земли.

3. Напомним, что потенциальная энергия имеет смысл только для консервативных сил, поэтому к силе трения это понятие не применимо!

## 5.10. Связь силы и потенциальной энергии

Вопрос, обозначенный в заголовке этого параграфа предполагает, по сути, возможность решения двух задач:

1. Как найти потенциальную энергию, если известны действующие консервативные силы  $\vec{F}(x, y, z)$ ?
2. Как, зная функцию  $U(x, y, z)$  для потенциальной энергии, определить силу?

В предыдущем параграфе мы подробно обсудили как раз пути решения первой из этих задач. Второй вопрос является обратной задачей по отношению к первой. Перейдём теперь к его рассмотрению.

Мы знаем, что работа консервативной силы равна убыли потенциальной энергии системы:  $A_{12}^{(κ)} = -\Delta U$ . Поэтому для малого перемещения  $d\vec{l}$  элементарную работу можно записать двумя способами:

1.  $dA_{12}^{(κ)} = -dU$ ; (из определения потенциальной энергии)
2.  $dA_{12}^{(κ)} = (\vec{F}, d\vec{l})$ . (определение элементарной работы)

Здесь  $dU$  – бесконечно малое изменение потенциальной энергии. Приравняв правые части, получаем:  $(\vec{F}, d\vec{l}) = -dU$ . Скалярное произведение и полный дифференциал функции  $U(x, y, z)$  можно переписать иначе:

$$F_x dx + F_y dy + F_z dz = - \left( \frac{\partial U}{\partial x} dx + \frac{\partial U}{\partial y} dy + \frac{\partial U}{\partial z} dz \right). \quad (*)$$

Здесь произошла некоторая замена в обозначениях дифференциалов и, соответственно, производных: вместо привычных « $\frac{dU}{dx}$ , ...» появились « $\frac{\partial U}{\partial x}$ , ...». Таким способом в

математике принято обозначать так называемые «частные» производные. Они необходимы, когда мы имеем дело с функцией нескольких переменных, а не одной единственной. Если вспомнить математическое определение производной функции

$$\left( f' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} \right),$$

то станет ясно, что в случае функции  $f$  нескольких переменных ( $x, y, z$  – в нашем случае), определяя предел, одной из переменных сообщается бесконечно малое приращение, в то время как остальные переменные фиксируются (считаются



## § 5. Законы сохранения в механике

константами). Об этом и сигнализирует особое обозначение таких производных.

Сейчас нам придётся ещё немного потрудиться в освоении новых математических обозначений. Равенство (\*) говорит о том, что проекции вектора силы в любой точке пространства равны с противоположным знаком частным производным по координатам (в нашем случае, в декартовой системе координат) от потенциальной энергии:

$$F_x = -\frac{\partial U}{\partial x}; \quad F_y = -\frac{\partial U}{\partial y}; \quad F_z = -\frac{\partial U}{\partial z}. \quad (5.20)$$

А значит, сам вектор  $\vec{F}$  можно задать таким способом:

$$\vec{F} = -\left( \frac{\partial U}{\partial x} \vec{e}_x + \frac{\partial U}{\partial y} \vec{e}_y + \frac{\partial U}{\partial z} \vec{e}_z \right). \quad (5.20,a)$$

Математики используют в таких случаях специальное компактное обозначение:

$$\vec{F} = -\text{grad } U \quad (5.20,b)$$

и называют эту величину «градиент» (от лат. *gradiens* – рост)<sup>\*)</sup>. В чём же её смысл?

Пусть заданы значения потенциальной энергии во всех точках пространства –  $U(x, y, z)$  («поле энергий»). В этом поле можно выделить геометрическое место точек, в которых потенциальная энергия имеет одно и то же значение. Эти точки образуют так называемую эквипотенциальную поверхность. При перемещении частицы вдоль эквипотенциальной поверхности её энергия не меняется и работа не совершается. На рисунке 5.10 изображены сечения нескольких поверхностей с близкими значениями потенциальной энергии. Пусть мы хотим найти величину силы, действующей на частицу, в точке  $O$ . Проведём ось

<sup>\*)</sup> Термин «градиент» как и его обозначение, впервые в математику был введен Максвеллом в 1873 г. Кое-где вы можете встретить для градиента и иное обозначение – «оператор набла»:  $\nabla$ . Не пугайтесь – это то же самое!

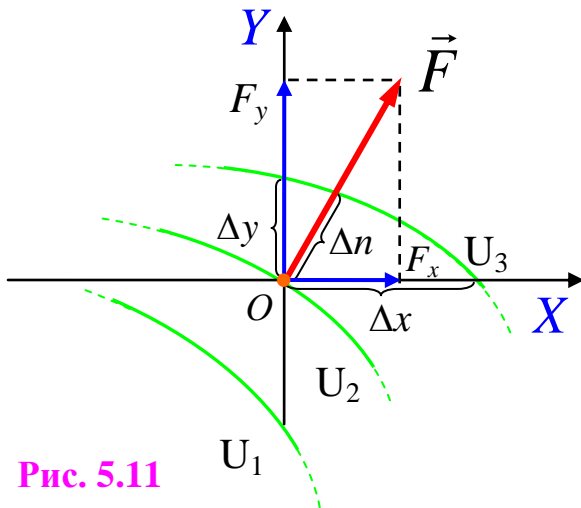


Рис. 5.11

$X$ , направленную произвольно. В соответствии с (5.20) получим (см. рис. 5.11):

$$|F_x| = \left| \frac{U_3 - U_2}{\Delta x} \right| = \left| \frac{\Delta U}{\Delta x} \right|.$$

Аналогично и для оси  $Y$ :

$$|F_y| = \left| \frac{\Delta U}{\Delta y} \right|, \text{ а для трёхмерного}$$

случая и  $|F_z| = \left| \frac{\Delta U}{\Delta z} \right|$ . Модуль

силы находим при этом, как обычно,  $F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2}$ .

А как направлен вектор силы? Поскольку при перемещении частицы вдоль эквипотенциальной поверхности работа не совершается, сила направлена по нормали к эквипотенциальной поверхности. Удобно одну из осей, например ось  $X$ , направить не произвольно, а как раз так же по нормали. При этом окажется

$$F_x = -\frac{\Delta U}{\Delta n}; \quad F_y = 0; \quad F_z = 0.$$

Здесь  $\Delta n$ , равная  $\Delta x$  – это кратчайшее расстояние между поверхностями. Поэтому в направлении нормали к эквипотенциальной поверхности изменение потенциальной энергии происходит быстрее всего. Значение модуля силы совпадает в этом случае с модулем её нормальной составляющей.

**Градиент** – вектор, имеющий компоненты  $\left\{ \frac{\partial U}{\partial x}; \frac{\partial U}{\partial y}; \frac{\partial U}{\partial z} \right\}$  и

показывающий направление, в котором быстрее всего растёт потенциальная энергия  $U$  вблизи данной точки пространства. Сами компоненты вектора градиента дают скорость роста  $U$  по координатным направлениям, а вот его модуль определяет скорость в направлении максимального изменения  $U$  (в

## § 5. Законы сохранения в механике

направлении вектора  $gradU$ ). Таким образом,  $F$  определяет изменение потенциальной энергии на единицу длины, в направлении наиболее быстрого изменения энергии. Знак «минус» означает при этом, что сила направлена в сторону убывания потенциальной энергии.

Понятие градиента как производной по направлению довольно широко используется в разных областях науки. Можно, например, говорить о градиенте температуры в помещении. Или в случае топографии градиент определяет направление самого крутого подъёма местности, а его модуль – наибольшую «крутизну» (скорость роста высоты) в этом же месте.

### 5.11. Закон сохранения механической энергии

а) Начнём с простейшего случая – пусть только *одна частица*  $m$  (МТ) движется под действием консервативных и неконсервативных сил от точки 1 до точки 2 вдоль траектории “L” (см. рис. 5.12). По теореме о кинетической энергии (см. стр. 70) изменение кинетической энергии  $\Delta T$  равно работе действующих на частицу сил. Поскольку среди этих сил могут быть консервативные и неконсервативные:

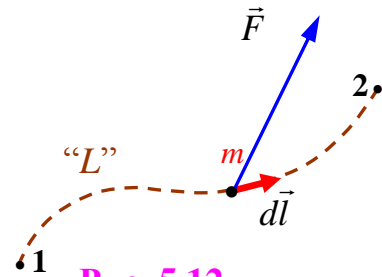


Рис. 5.12

$\Delta T = A_{12}^{(к)} + A_{12}^{(нк)}$ . Работа первых равна убыли потенциальной энергии, т.е.  $-\Delta U$ . Вот, что мы получим в итоге:

$$\Delta T = -\Delta U + A_{12}^{(нк)} \Rightarrow \Delta T + \Delta U = A_{12}^{(нк)} \Rightarrow \Delta(T + U) = A_{12}^{(нк)}. \text{ И так:}$$
$$\Delta \mathcal{E} = A_{12}^{(нк)} \quad (5.21)$$

В последней записи учтено, что

► **(Опр.)** сумму кинетической и потенциальной энергии называют **полной механической энергией**:  $\mathcal{E} = T + U$

И мы приходим к выводу, что, **если работа неконсервативных сил, действующих на частицу, равна нулю, то полная механическая энергия частицы сохраняется.**

б) Рассмотрим теперь *систему взаимодействующих друг с другом частиц* (МТ и ТТ) во внешних силовых полях. Полезно и

здесь иметь в виду рис. 4.3. Сформулируем закон сохранения механической энергии для начала в форме, справедливость которой почти очевидна:

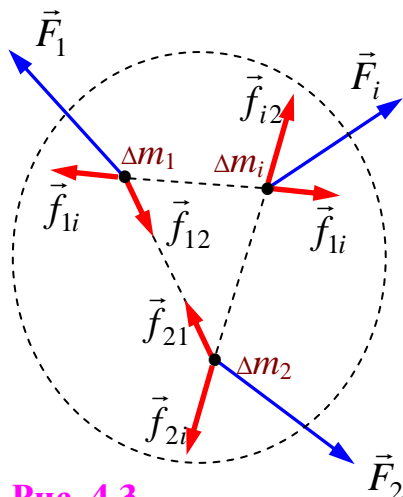


Рис. 4.3

✚ А. Если внешние силы на тела системы не действуют, а все внутренние силы консервативны, то полная механическая энергия системы не меняется с течением времени (т.е. сохраняется)

Кратко: Если 1)  $\vec{F}_i^{\text{внешн.}} = 0$  (внешних сил НЕТ!) и  
2)  $\vec{f}_{ij}^{(\text{нк})} = 0$  (внутренних неконсервативных сил НЕТ!), то  
 $\mathcal{E} = \text{const.}$

В этой формулировке использованы слишком жёсткие требования к системе. Мы знаем, что механическая энергия определяется не силой как таковой, а совершаемой этой силой работой. Поэтому ограничения можно смягчить в следующей формулировке.

✚ Б. Если равна нулю суммарная работа внешних сил, действующих на тела системы, а также равна нулю и работа внутренних неконсервативных сил, то полная механическая энергия системы не меняется с течением времени (т.е. сохраняется)

Кратко:

Если 1)  $A_{\text{внешн.}} = 0$  и  
2)  $A_{\text{внутр}}^{(\text{нк})} = 0$ , то  
 $\mathcal{E} = \text{const.}$

## § 5. Законы сохранения в механике

Мы привели формулировки закона пока без каких-либо обоснований. Внимательный анализ позволяет не только привести такие обоснования, но и ещё больше смягчить ограничения.

Пусть система переходит из состояния 1 в новое состояние 2. При этом каждая частица, входящая в состав этой системы движется вдоль своей траектории “ $L$ ” и мы можем найти для неё  $\Delta T_i$  по теореме о кинетической энергии:

$$\begin{cases} \Delta T_1 = A_1^{(к)} + A_1^{(нк)}; \\ \dots \\ \Delta T_i = A_i^{(к)} + A_i^{(нк)}; \\ \dots \\ \Delta T_n = A_n^{(к)} + A_n^{(нк)}. \end{cases}$$

Мы опять умышленно разделили работу сил в правой части на две составляющие. Ведь работа консервативных сил, в отличие от неконсервативных, равна убыли потенциальной энергии (т.е.  $-\Delta U_i$ ). Сложим все равенства и перенесём суммарное изменение потенциальной энергии системы в левую часть. Получим:

$$\sum_{i=1}^n (\Delta T_i + \Delta U_i) = \sum_{i=1}^n A_i^{(нк)}.$$

Ясно, что в левой части записано изменение полной механической энергии системы, а в правой суммарная работа всех неконсервативных сил, действующих на тела системы. Вот теперь можно дать и ещё одну формулировку.

**✚ В. Если равна нулю суммарная работа неконсервативных сил, действующих на тела системы, то полная механическая энергия системы не меняется с течением времени (т.е. сохраняется)**

Кратко:            Если             $A^{(нк)} = 0$ , то             $\mathcal{E} = const$ .

Как видим, в этой последней формулировке мы вообще отказались от деления сил на внешние и внутренние. Наш анализ

показал, что для сохранения энергии важно лишь отсутствие работы любых неконсервативных сил.

### ❖ Замечания

1. В вышеприведённом анализе мы, по сути, использовали «обобщённую» потенциальную энергию системы – она связана с запасом работы не только за счёт внутренних взаимодействий  $U^{внутр}$ , но и с работой внешних сил  $U^{внешн}$ , если эти силы консервативны (работа при перемещении тел системы «во внешних силовых полях»).

2. При невыполнении условия «если» изменение механической энергии системы равно работе соответствующих сил:  $\Delta \mathcal{E} = A^{(нк)}$  !

3. Может показаться, что вместо 3-х разных по степени ограничений формулировок стоило бы привести всего одну последнюю – самую «всеохватывающую». Нет! Помимо сугубо методологического значения формулировок А и Б, **как раз формулировкой Б и приходится чаще всего пользоваться на практике**. Дело в том, что работу внешних сил далеко не всегда удаётся учесть как убыль потенциальной энергии во внешних силовых полях даже, когда эти силы мы привыкли считать консервативными. Например, такая ситуация возникает, когда внешний силовой центр (заряженная частица или «тяготеющая масса») движутся в выбранной инерциальной системе отсчёта.

## 5.12. Итоговые замечания к разделу «Механика»

Мы завершили изучение **основных** законов классической механики. Всё остальное – это их практическое применение к конкретным системам – частные (хотя зачастую и очень важные!) случаи. Некоторые из них важны настолько, что при их рассмотрении даже формулируют специальные правила–законы (так называемые «теории ad hoc» – т.е. «по случаю») вроде закона Архимеда, Гука, Бернулли и т.д.

Законы сохранения были представлены нами, по существу, как теоремы классической механики, опираясь на законы Ньютона. Почему же их выделяют в самостоятельные законы? Назовём несколько причин.

## § 5. Законы сохранения в механике

а) Следует иметь в виду, что приведённые «доказательства» – это всего лишь проверка на согласованность с законами Ньютона. В действительности законы сохранения в механике – это частный случай более фундаментальных законов сохранения, которые «работают» даже тогда, когда законы Ньютона в той форме, о которой мы до сих пор говорили, перестают работать. Законы сохранения – самостоятельные законы физики и притом более общие, чем законы классической механики. Например, импульсом обладают не только частицы, но и электромагнитные волны. Энергией также обладают электромагнитные поля, понятие «энергия связи» молекул весьма актуально для химии, а энергия связи нуклонов в ядрах атомов – для ядерной физики и физики элементарных частиц. В микромире, где законы Ньютоновой механики не применимы, выполняются, однако, все законы сохранения.

б) Законы сохранения носят «интегральный» характер. То есть, зная состояние системы в начале процесса, и проконтролировав выполнение определённых ограничений на силы, моменты сил или их работу, можно предсказать состояние системы в конце процесса. Детали самого процесса могут быть очень сложными, но прояснять их нет необходимости. Это значительно упрощает поиск решения в ряде практически важных случаев, а зачастую и просто является единственной возможностью получить решение в аналитической форме, не прибегая к использованию численных методов. Таковы случаи различных быстропротекающих процессов – соударения, выстрелы, взрывы, взаимодействия элементарных частиц в ускорителях. Но даже в случаях, когда характер сил не представляет труда для анализа, использование законов сохранения зачастую бывает единственной альтернативой. Например, динамический подход к известной «задаче трёх тел» возможно реализовать лишь с применением численных методов решения.

## § 6. Пример применения основных законов механики – гироскоп

“Причудлив парадокса путь –  
с ним здравый смысл ты позабудь” –  
Уильям Гильберт (XVI век)

### 6.1. Основные понятия

➔ **(Опр.)** Гироскопом называется симметричное твердое тело, быстро вращающееся вокруг оси симметрии, которая может поворачиваться в пространстве

Простейшим и всем знакомым гироскопом является юла, или детский волчок (рис. 6.1). Все, даже самые удивительные (на первый взгляд) свойства гироскопа находятся в соответствии и объясняются основными законами механики. Рассмотрим далее приближённую теорию гироскопа.

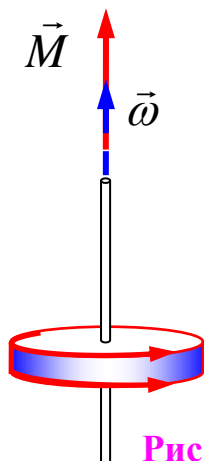


Рис. 6.1

В основе теории гироскопа лежит уравнение моментов:

$$\frac{d\vec{M}}{dt} = \vec{N}, \quad (6.1)$$

где  $\vec{N}$  – суммарный момент сил, действующих на гироскоп, а  $\vec{M}$  – момент импульса гироскопа. Важно помнить, что  $\vec{N}$  и  $\vec{M}$  должны быть вычислены относительно одной и той же (произвольной) точки пространства. Для симметричного тела<sup>\*)</sup>, вращающегося вокруг его закреплённой оси, собственный момент импульса равен

$$\vec{M} = I_z \cdot \vec{\omega},$$

где  $I_z$  – момент инерции относительно оси вращения;  $\vec{\omega}$  – угловая скорость вращения. Векторы угловой скорости и момента импульса направлены вдоль оси вращения.

<sup>\*)</sup> Будем подразумевать под этим симметричное распределение массы тела относительно оси.



### 6.2. Гироскопические эффекты

1. Если на гироскоп не действуют внешние силы или их суммарный момент равен нулю, то такой гироскоп называют **свободным**. В соответствии с уравнением моментов (6.1) при  $\vec{N} = 0$  момент импульса не меняется с течением времени ( $\vec{M} = const$ ). А значит и угловая скорость такого гироскопа остаётся постоянной как по величине, так и по направлению. В результате свободный гироскоп сохраняет неизменным в пространстве направление оси вращения. Это свойство аналогично закону инерции: в отсутствии моментов внешних сил вращающееся твёрдое тело сохраняет своё вращение сколь угодно долго. Для изменения направления, т.е. поворота оси требуются моменты сил, и тем большие, чем больше собственный момент импульса гироскопа.

На устойчивости направления оси вращения гироскопа основаны его многочисленные практические применения: нарезное оружие, навигационные приборы в авиации, космонавтике, в ракетной технике (гироскомпас, гиригоризонт), стабилизаторы положения тел в пространстве, гироскопические успокоители качки и др.

2. При действии внешних сил момент импульса гироскопа может изменяться. При этом изменение момента импульса зависит как от момента внешних сил, так и от длительности воздействия, ведь  $\Delta\vec{M} = \vec{N} \cdot \Delta t$ .

Здесь полезно рассмотреть два случая:

а) Если внешняя сила действует в течение короткого промежутка времени (как, например, при ударе или толчке) и произведение  $\vec{N} \cdot \Delta t$  мало, то изменение момента импульса также будет малым. При ударе направление оси гироскопа не уходит далеко от своего исходного положения, а слегка дрожит,

оставаясь почти неизменным. Дрожание оси гироскопа около первоначального направления после кратковременного действия силы называется *нутацей*.

б) При длительном действии силы ось гироскопа поворачивается в пространстве. Однако *движение оси гироскопа происходит не в сторону действия силы* (как это было бы в отсутствии вращения гироскопа), а в перпендикулярном направлении. Если гироскоп находится под действием постоянного момента внешних сил, его ось медленно поворачивается вокруг направления действия силы. Такое поведение гироскопа называется *регулярной прецессией*, а он сам – *гироскопическим маятником*. Разберём явление прецессии подробнее.

Рассмотрим в качестве модели гироскоп, состоящий из вращающегося маховика (ротора) и противовеса, закреплённого на оси гироскопа (рис. 6.2). Противовес обеспечивает равновесие относительно точки опоры  $O$ , находящейся под центром масс системы. Ось гироскопа может свободно поворачиваться вокруг вертикальной оси, проходящей через точку  $O$ . Очевидно, сила тяжести уравновешена реакцией опоры, и в отсутствии других внешних сил гироскоп можно считать свободным. Что произойдет, если на ось гироскопа будет действовать дополнительная постоянная внешняя сила  $\vec{F}$ , например, создаваемая небольшим грузиком, подвешенным на некотором

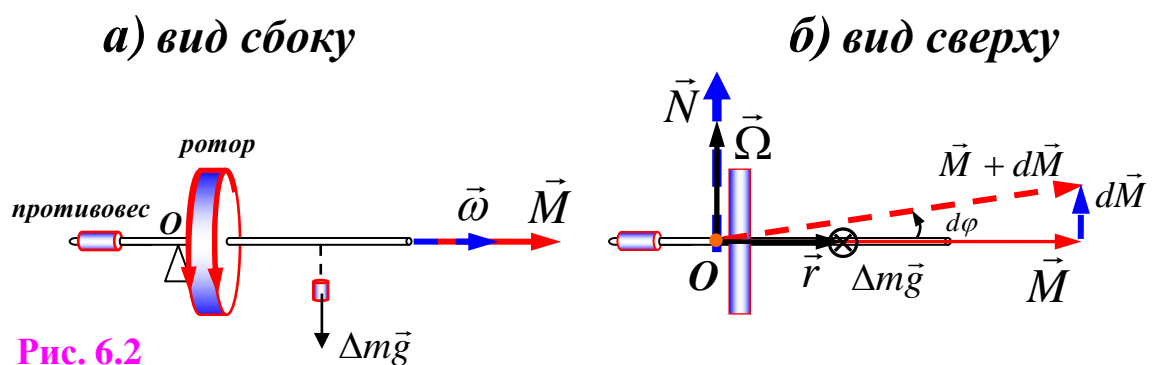


Рис. 6.2

## § 6. Гироскоп

---

расстоянии от оси? Момент  $\vec{N}$  этой силы относительно точки закрепления  $O$  направлен горизонтально перпендикулярно силе и оси гироскопа (рис. 6.2). За малый интервал времени  $dt$  происходит малое изменение момента импульса на величину  $d\vec{M}$ . Исходя из уравнения моментов  $\frac{d\vec{M}}{dt} = \vec{N}$ , она равна

$$d\vec{M} = \vec{N} \cdot dt.$$

Здесь важно обратить внимание на то, что направление вектора  $d\vec{M}$  совпадает с направлением вектора момента силы  $\vec{N}$ , а не самой силы  $\vec{F} = \Delta m \vec{g}$ . Другими словами изменение вектора момента импульса произойдёт в направлении, перпендикулярном вектору момента импульса. Если учесть, что момент импульса направлен вдоль оси вращения, то ось гироскопа повернётся в горизонтальной плоскости вокруг вертикальной оси, т.е. вокруг вектора силы  $\vec{F}$ . Такое вращение оси гироскопа и есть прецессия. При этом модуль собственного момента импульса гироскопа  $I_z \omega$  не изменяется.

Найдём угловую скорость прецессии  $\Omega$ . За время  $dt$  ось гироскопа повернётся на угол  $d\varphi$ . Поскольку угол мал, его радианная мера равна тангенсу этого угла. Из рис. 6.2 видно, что

$$d\varphi = \frac{dM}{M}.$$

Следовательно, угловая скорость прецессии равна

$$\Omega = \frac{d\varphi}{dt} = \frac{dM}{M \cdot dt}.$$

Учитывая уравнение моментов (6.1), легко получить в итоге

$$\Omega = \frac{N}{M} \quad \text{или} \quad \Omega = \frac{N}{I_z \cdot \omega}. \quad (6.2)$$

Отсюда видно, что ось гироскопа поворачивается тем быстрее, чем больший момент сил вызывает это вращение. Этот

результат согласуется с общими положениями динамики. С другой стороны, чем больше собственный момент импульса гироскопа  $M = I_z \omega$ , тем медленнее будет происходить прецессия. Собственный момент импульса гироскопа определяет инертность

*Регулярная прецессия*

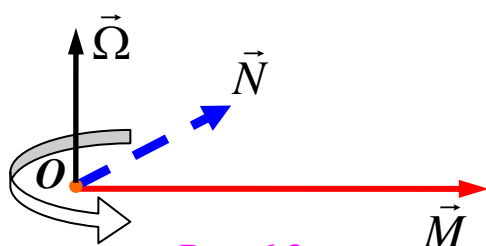


Рис. 6.3

гироскопа, в данном случае – устойчивость по отношению к внешнему воздействию.

Учитывая векторный характер величин  $\vec{\Omega}$ ,  $\vec{M}$  и  $\vec{N}$ , а также направления этих векторов (рис. 6.3), равенство (6.3) полезно

записать также и в векторном виде:

$$\vec{N} = [\vec{\Omega}, \vec{M}]. \quad (6.4)$$

Дополнительный анализ гироскопических эффектов проводится с учётом третьего закона Ньютона. Если какое-либо тело извне действует на ось гироскопа, вызывая его прецессию, то со стороны оси на это тело действует такая же по величине, но противоположно направленная сила. Такие силы противодействия со стороны прецессирующего гироскопа принято называть **гироскопическими силами**. Легко догадаться, эти силы препятствуют повороту оси гироскопа. Именно гироскопические силы ответственны за устойчивость оси гироскопа в пространстве. Любая попытка повернуть ось гироскопа вызывает противодействие тем большее, чем больше собственный момент импульса гироскопа.

С помощью представления о гироскопических силах можно, например, легко объяснить действие гирокомпаса. Ось гироскопа, находящегося на поверхности Земли поворачивается вместе с вращающейся Землёй. Гироскопические силы исчезнут, если ось гироскопа окажется параллельной оси вращения Земли.

## § 6. Гироскоп

---

Мы рассмотрели лишь элементы теории уравновешенного гироскопа. Полная теория гироскопа гораздо сложнее. Однако всё изложенное выше позволяет понять наиболее важные свойства гироскопа.

### ❖ Замечание

Гироскопические эффекты проявляют себя не только в макроскопических механических устройствах. С помощью представлений о них можно объяснить и некоторые тонкие и очень важные явления микромира, казалось бы, чрезвычайно далёкие от сферы действия классической механики. Так, например, прецессией электронных орбит атомов во внешнем магнитном поле можно объяснить диамагнетизм веществ. Методы *электронного парамагнитного резонанса* (ЭПР), а также *ядерного магнитного резонанса* (ЯМР), широко используемые в химии при изучении строения вещества, основаны на гироскопической прецессии электронных и ядерных спинов. Хотя описание этих явлений на языке квантовой физики и является более адекватным, подход, основанный на представлениях классической физики, оказался весьма плодотворным в истории науки.

---

В заключение к разделу «Механика» приведём высказывание создателя одного из новейших учений о механическом движении:

*«Пусть никто не думает, что великое создание Ньютона может быть ниспровергнуто теорией относительности или какой-нибудь другой теорией.*

*Ясные и широкие идеи Ньютона навечно сохраняют своё значение фундамента, на котором построены наши современные физические представления»*

А. Эйнштейн (1948 г.)

## **Часть 2. ЭЛЕКТРИЧЕСТВО и МАГНЕТИЗМ**

**Электродинамика – раздел физики, изучающий взаимодействия электрически заряженных тел, свойства электрических и магнитных полей**

В разделе «Механика» обсуждался пока закон лишь одного из фундаментальных взаимодействий – закон всемирного тяготения. Ему подчиняются силы тяготения. Все остальные встречавшиеся нам при анализе механического движения силы являются проявлениями другого фундаментального взаимодействия – «электромагнитного», к изучению которого мы сейчас и переходим. Да и видеть сейчас эти строки мы можем благодаря электромагнетизму: свет – это электромагнитные волны!

Начнём мы с наиболее простого случая проявления электрических свойств материи – случая электростатики (покоящиеся электрические заряженные тела). Многое при этом нам уже знакомо из школьного курса физики. И только затем перейдём к электродинамике («заряды в движении»), отталкиваясь также от ранее накопленного багажа. Дополним наши знания о магнитном поле важным законом Био-Савара-Лапласа. Расширим возможности анализа электрических и магнитных взаимодействий, сформулировав и доказав ряд мощных теорем электро- и магнитостатики. И, наконец, познакомимся с представлениями классической теории электромагнитного поля Д.К. Максвелла<sup>\*)</sup>.

---

<sup>\*)</sup> Джеймс Клерк Максвелл (1831–1879) – британский физик, математик и механик. Внёс выдающийся вклад в классическую электродинамику, кинетическую теорию газов, молекулярную физику и термодинамику. Заложил основы количественной теории цветов, автор принципа цветной фотографии.

### § 7. Закон Кулона. Электрическое поле

*“... Силы трения, сила ветра, химические связи, вязкость, магнетизм, силы, заставляющие вращаться колёса фабрик и заводов, – все эти явления – не что иное, как закон Кулона ...” –*

Дж.Р. Захариас (в журнале “Science”, 1957 г.)

#### 7.1. Электрический заряд

В электромагнитных взаимодействиях проявляет себя особое свойство некоторых элементарных частиц – *электрический заряд*. Мы уже знаем из школьного курса, что именно его величина входит в закон Кулона. Что же такое электрический заряд?

Увы, настоящего ответа, вероятно, не сможет дать никто. Это понятие относится к «начальным», не сводимым к чему-то более элементарному. Придётся, как это обычно и делается, ограничиться констатацией, что это *мера способности частиц и тел к электрическим и магнитным взаимодействиям*. Заметим при этом, что Кулон называл заряд «электрической массой» тел.

Перечислим, кроме того, основные свойства электрического заряда.

**1.** Существует два сорта электрических зарядов – «положительный» и «отрицательный». Между ними нет никакого *фундаментального* различия – в мире ничего не изменилось бы при замене «+» на «-».

**2.** Электрический заряд – неотъемлемое свойство некоторых элементарных частиц! Минимальная порция электрического заряда ( $|e| \cong 1,6 \cdot 10^{-19}$  Кл) одинакова для положительного и отрицательного электричества – относительная точность этого равенства по крайней мере не хуже  $10^{-20}$  ! Заряд макроскопических тел  $q$  величина аддитивная и изменяется дискретно, т.е. всегда  $q = \pm N \cdot |e|$ .

**3.** Электрический заряд подчиняется ещё одному фундаментальному закону сохранения – закону сохранения электрического заряда:

- *В электрически изолированной системе алгебраическая сумма электрических зарядов не изменяется с течением времени ( $\sum q_i = const$ ).*

Электрически изолированной называется система, которую не покидают и в которую не проникают извне заряженные тела и частицы.

4. Электрический заряд инвариантен по отношению к выбору системы отсчёта (то есть не зависит от неё). Кроме того, он не зависит и от состояния движения заряженной частицы.

Дав, таким образом, некоторое представление об электрическом заряде, начнём рассмотрение простейших проявлений электричества, когда заряженные тела покоятся (в некоторой системе отсчёта!). Это случай ЭЛЕКТРОСТАТИКИ.

В электростатике рассматривается взаимодействие неподвижных (статических) заряженных тел и частиц.

## **7.2. Закон Кулона – основной закон электростатики**

На основании серии проведённых прецизионных (очень скрупулёзных и точных) экспериментов с крутильными весами французский физик Шарль Кулон в 1785 г. сформулировал основной закон электростатики:

- *Сила электрического взаимодействия двух покоящихся точечных зарядов в вакууме прямо пропорциональна произведению модулей этих зарядов и обратно пропорциональна квадрату расстояния между ними. Это сила притяжения, если заряды разноимённые, и отталкивания, если они одноимённые. Сила направлена вдоль прямой, проходящей через точечные заряды*

Этой довольно громоздкой словесной формулировке можно сопоставить компактную аналитическую запись, сделав рисунок (см. рис. 7.1) и введя удобные обозначения<sup>\*)</sup>:

---

<sup>\*)</sup> аналогично мы поступали, и когда формулировали закон всемирного тяготения.



## § 7. Закон Кулона

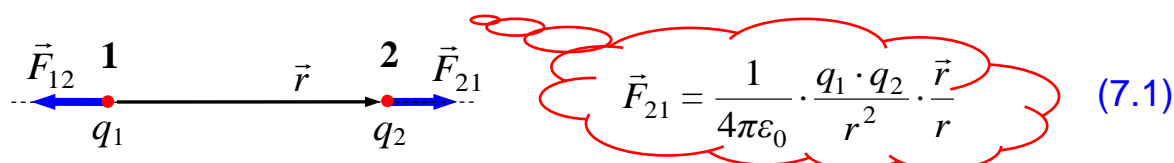


Рис. 7.1

Здесь  $\vec{F}_{21}$  – сила, действующая на второй заряд со стороны первого,  $\vec{r}$  – радиус-вектор, проведенный от первого заряда ко второму. По третьему закону Ньютона на первый заряд со стороны второго действует равная и противоположно направленная сила  $\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$ . Коэффициент пропорциональности имеет вид, использующийся обычно при записи закона в системе единиц СИ, где  $\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \text{ Ф/м}$  – электрическая постоянная системы СИ.

### ❖ Сделаем ряд замечаний к этому важнейшему закону

1. Вполне ли точна зависимость  $\frac{1}{r^2}$ ? Т.е., а точно ли показатель степени равен 2-м? На сегодняшний день экспериментально проверено, что точность, по крайней мере, не хуже, чем до 9-го знака после запятой.

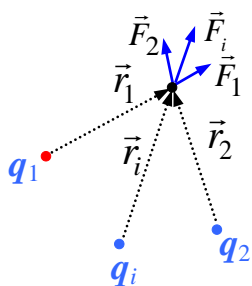
2. В однородной и изотропной диэлектрической среде сила электрического взаимодействия уменьшается в  $\epsilon$  раз.  $\epsilon$  – т.н. диэлектрическая проницаемость среды. Более подробно этот вопрос мы обсудим позже.

3. Сила, описываемая законом (7.1), действует и между движущимися заряженными частицами и телами. Однако в этом случае это уже *не вся электрическая (электромагнитная) сила*. Появляется поправка – *магнитная составляющая*, связанная как раз с состоянием движения тел! Её мы также обсудим в своё время.

### 7.3. Принцип суперпозиции. Электрическое поле. Напряжённость электрического поля

Как и в случае закона всемирного тяготения, необходимо обратить особое внимание, что формулировка закона электростатического взаимодействия даётся для «точечных» тел.

А как же быть, если хотя бы одно из заряженных тел не является таковым? Или на точечный заряд действуют одновременно несколько других точечных? Опыт показывает, что для сил электростатического взаимодействия справедлив **принцип суперпозиции**. Его суть состоит в следующем. Каждое электрическое воздействие на точечный заряд  $q_{np}$  (назовём его пробным) со стороны каждого отдельного из группы зарядов  $q_1, q_2, \dots, q_i, \dots, q_n \equiv \{q_i\}$  описывается силой  $\vec{F}_i$  – векторной величиной, которую можно найти по закону Кулона (см. рис. 7.2). Электрическое воздействие со стороны всей группы  $n$  зарядов



**Рис. 7.2**

даёт результирующая сила, равная **векторной сумме** всех сил  $\vec{F}_i$ :

$$\vec{F}(\vec{r}) = \sum_{i=1}^N \vec{F}_i(\vec{r}) \quad (7.2)$$

Это важное свойство электростатических сил, состоящее в том, что сила взаимодействия двух зарядов не меняется при наличии 3-го, 4-го и т.д. Отталкиваясь от него, будем опираться (вслед за Фарадеем и Максвеллом!) на **концепцию электрического поля, как посредника в электрическом взаимодействии тел**. Введём важнейшую характеристику этого поля – напряжённость электрического поля.

► **(Опр.)** *Напряжённостью электрического поля называется отношение силы, действующей на пробный (точечный) заряд, помещённый в данную точку поля, к величине этого пробного заряда  $q_{np}$ :*

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{\vec{F}(\vec{r})}{q_{np}} \quad (7.3)$$

Здесь  $\vec{r}$  – радиус-вектор, характеризующий положение точки поля в выбранной системе отсчёта.

## § 7. Закон Кулона

---

Проиллюстрируем данное определение и поясним, в частности, для чего понадобилось делить на величину пробного заряда. Запишем сумму сил, действующих на точечный заряд  $q_{np}$ , названный нами «пробным». На заряд, помещённый в данную точку пространства (*точку силового поля*), со стороны любой системы других точечных зарядов<sup>\*)</sup> по закону Кулона и с учётом принципа суперпозиции действует сила:

$$\vec{F}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{q_{np}q_1}{r_1^2} \cdot \frac{\vec{r}_1}{r_1} + \frac{q_{np}q_2}{r_2^2} \cdot \frac{\vec{r}_2}{r_2} + \dots + \frac{q_{np}q_i}{r_i^2} \cdot \frac{\vec{r}_i}{r_i} + \dots + \frac{q_{np}q_n}{r_n^2} \cdot \frac{\vec{r}_n}{r_n} \right). (*)$$

Здесь  $\vec{r}_i$  – радиус векторы, проведённые от  $i$ -го заряда системы в точку, где расположен пробный заряд (см. ещё раз на рис. 7.2). Видно, что все слагаемые имеют множитель  $q_{np}$ . Поэтому и результирующая сила также пропорциональна величине пробного заряда. Теперь ясно, что отношение этой силы к заряду  $q_{np}$  уже не зависит от величины пробного заряда (а также и от его наличия!), т.е. характеризует *само поле сил*. Это и есть напряжённость  $\vec{E}(\vec{r})$ .

Итак, функция  $\vec{E}(\vec{r})$  характеризует каждую точку пространства. Если задана такая функция  $\vec{E} = \vec{E}(\vec{r})$ , говорят, что «задано поле» (векторное силовое!). По сути, векторная функция  $\vec{E}(\vec{r})$  – это и есть электрическое поле! В чём удобство от введения такой характеристики? Если каким-то образом мы научимся находить по заданному распределению заряженных тел в пространстве (экспериментально или теоретически) напряжённость в произвольной точке поля как функцию её координат –  $\vec{E}(\vec{r})$ , то мы сможем найти силу, действующую со стороны поля на любой точечный заряд  $q$ , оказавшийся в данной точке поля:

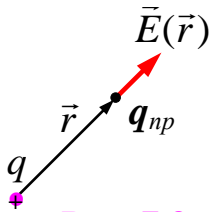
$$\vec{F}(\vec{r}) = q \cdot \vec{E}(\vec{r}). \quad (7.4)$$

---

<sup>\*)</sup> Если поле создаётся протяжёнными заряженными телами, их можно разбить на малые элементы, которые также можно будет считать точечными зарядами.

### Напряжённость поля точечного заряда

Выражение для напряжённости электрического поля, создаваемого в окружающем пространстве одиночным точечным зарядом, легко получить, исходя из определения напряжённости и из закона Кулона (рис. 7.3):



**Рис. 7.3**

$$\vec{E}_{\text{т.з.}}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q}{r^2} \cdot \frac{\vec{r}}{r}. \quad (7.5)$$

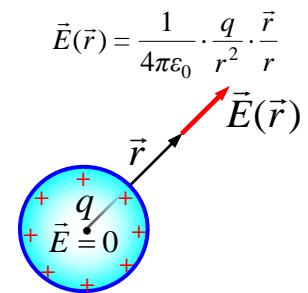
Если переписать теперь равенство (\*) в виде:

$$\vec{F}(\vec{r}) = q_{np} \cdot \left( \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1}{r_1^2} \cdot \frac{\vec{r}_1}{r_1} + \dots + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_i}{r_i^2} \cdot \frac{\vec{r}_i}{r_i} + \dots + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_n}{r_n^2} \cdot \frac{\vec{r}_n}{r_n} \right)$$

или 
$$\vec{F}(\vec{r}) = q_{np} \cdot \sum_{i=1}^N \vec{E}_i,$$

то с учётом (7.4) мы получим как следствие принцип суперпозиции для напряжённости электрического поля:  $\vec{E}(\vec{r}) = \sum_{i=1}^N \vec{E}_i.$

Чтобы найти напряжённость электрического поля, созданного протяжёнными заряженными телами, необходимо «разбить» их на малые элементы (точечные заряды), а затем использовать принцип суперпозиции электрических полей. Например, подобная процедура расчёта напряжённости поля приводит к важному результату, который в школьном курсе приводится без обоснования. Напряжённость электрического поля, созданного заряженной проводящей сферой (или шаром) в области пространства за пределами этой сферы описывается таким же выражением, как и в случае точечного заряда. Радиус-вектор при этом имеет своим началом центр сферы (см. рис. 7.4). Внутри сферы напряжённость поля равна нулю, т.е. поле отсутствует. Процедура доказательства этих утверждений, несмотря



**Рис. 7.4**

## § 7. Закон Кулона

---

на простую симметрию распределения заряда в пространстве, с математической точки зрения, весьма кропотлива<sup>\*)</sup>. Поэтому несколько позже мы увидим, как можно обосновать их гораздо проще, используя мощную «интегральную» теорему-следствие из закона Кулона и принципа суперпозиции – теорему Гаусса.

❖ В заключение пункта 7.3 сделаем замечания о понятии «пробный заряд», которым мы воспользовались при формулировании принципа суперпозиции и в определении напряжённости электрического поля.

1. Пробный заряд должен быть точечным, т. е. геометрические размеры заряженного тела должны быть малы. Но возникает вопрос – по сравнению с чем (положения и размеры заряженных тел-источников поля могут быть и неизвестны!)? Увы, этот вопрос можно решить только экспериментально – по мере уменьшения размеров пробного заряда результат расчёта напряжённости должен перестать зависеть от этих размеров.

2. Пробный заряд  $q_{пр}$  должен быть малым по величине. Что является критерием этой «малости»? Появление пробного заряда в области измерения напряжённости электрического поля не должно приводить к перераспределению зарядов-источников поля в пространстве (т. е. попросту к их смещению). Вопрос опять-таки зачастую может быть решён лишь экспериментально.

### 7.4. Линии напряжённости электрического поля

Поле можно попробовать представить наглядно, рисуя в каждой точке пространства векторы напряжённости поля от каждого точечного заряда-источника (или малого элемента протяжённого заряженного тела), а затем их складывая. Очевидно,

---

<sup>\*)</sup> Для решения задач подобного рода применительно к гравитации Ньютону, как мы помним, пришлось разрабатывать новый математический аппарат дифференциального и интегрального исчисления.

такая процедура, хотя принципиально всегда и осуществима, но практически весьма долгая и утомительная даже в случае поля всего двух точечных зарядов. Пример такой деятельности представлен на рис. 7.5,б. Там же проведены и так называемые «линии напряжённости» (или «силовые линии»).

► **(Опр.)** *Линии, касательные к которым в каждой точке поля совпадают с направлением вектора напряжённости в данной точке, называются линиями напряжённости электрического поля*

Они помогают представить структуру электрического поля – его направление и величину в разных точках пространства. О величине судят при этом по «густоте» линий напряжённости в данной области пространства, т. е. по их количеству, отнесённому к площади «пронзаемой» поверхности. Скоро мы уточним это понятие.

Майкл Фарадей, которому и принадлежит идея использования силовых линий, предложил быстрый способ складывать множество векторов. Он предложил строить картину линий напряжённости экспериментально, используя огромное количество мелких диэлектрических частичек-стрелок, которые ориентируются в каждой точке пространства вдоль вектора  $\vec{E}$  (по полю) быстро и самостоятельно.

На рис. 7.5 приведены картины силовых линий поля одиночного точечного заряда – а (для положительного они

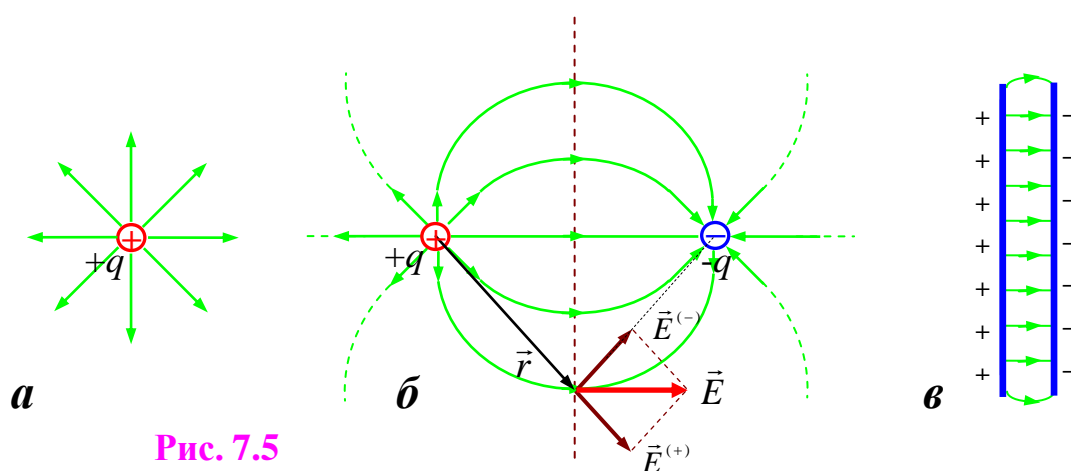


Рис. 7.5

## **§ 7. Закон Кулона**

---

направлены радиально от заряда); системы из двух разноимённых, одинаковых по модулю зарядов – б; поля между двумя плоскопараллельными разноимённо заряженными пластинами – в. В последнем случае вдали от краёв этих пластин мы имеем дело с т. н. однородным полем. Электрическое поле называется однородным, если его напряжённость одинакова во всех точках пространства. Силовые линии однородного поля – равноотстоящие друг от друга параллельные прямые.

### ***❖ Сделаем несколько важных замечаний о силовых линиях электростатического поля***

**1.** Линии напряжённости электростатического поля незамкнуты! Такое поле порождено источниками – электрическими зарядами – его силовые линии начинаются на положительных и заканчиваются на отрицательных зарядах.

**2.** Линии напряжённости не пересекаются.

**3.** Как мы уже отмечали, величина напряжённости поля пропорциональна густоте силовых линий в данной области пространства. В случае поля одиночного точечного заряда линии напряжённости отражают не только качественно верную картину структуры поля, но и точное количественное соответствие теории – густота линий уменьшается по мере удаления от заряда-источника поля обратно пропорционально квадрату расстояния от него!

### **7.5. Применение принципа суперпозиции для нахождения напряжённости поля системы зарядов и протяжённых заряженных тел**

Мы уже отмечали, что введённая нами величина – напряжённость электрического поля – будет плодотворной, если мы научимся рассчитывать её по заданному распределению

заряженных частиц и тел в пространстве. Первым способом такого расчёта является использование знания выражения для напряжённости поля точечного заряда и принципа суперпозиции электрических полей. По сути, его мы и используем (пусть и качественно) при «теоретическом» построении картины силовых линий, описанном в предыдущем пункте. Такой способ принципиально применим всегда. Другое дело, что получить точный результат аналитически, без применения численных методов и ЭВМ, удаётся только в очень ограниченном ряде случаев распределения зарядов-источников в пространстве. Приведём только простейший пример такого расчёта. Ведь наша задача сейчас продемонстрировать «стратегию» действий, а не углубляться в математические «упражнения». Примеры рассмотрения более сложных ситуаций вы найдёте в нашем учебном пособии для семинарских занятий.

**Пример.** Определим напряжённость электрического поля  $\vec{E}(x)$  на оси равномерно заряженного кольца радиуса  $R$ . Заряд кольца  $q$ ,  $x$  – расстояние от центра кольца

Прежде всего разобьём кольцо на элементы – точечные заряды  $\Delta q_i$ , каждый из которых создаёт в точке  $A$  поле с напряжённостью

$$\vec{E}_i = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\Delta q_i}{r^2} \cdot \vec{r}_i = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\Delta q_i}{(R^2 + x^2)} \cdot \frac{\vec{r}_i}{r}$$

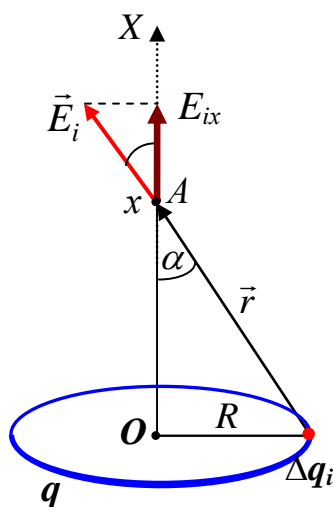


Рис. 7.6

Обратим внимание, что расстояние от элемента кольца до точки  $A$  одинаково для всех таких элементов. Все векторы располагаются под одинаковым углом  $\alpha$  к оси  $OX$  на конической поверхности (см. рис. 7.6).

Далее воспользуемся принципом суперпозиции, т.е. сложим все такие



## § 7. Закон Кулона

векторы. Вследствие симметрии задачи вклад в общую напряжённость дадут лишь составляющие  $(\vec{E}_i)_x \equiv E_{ix}$ . Поэтому модуль вектора напряжённости в точке  $A$  будет равен только сумме именно этих составляющих  $E_{ix}$  от всех элементов кольца:

$$E(x) = \sum_i (E_i \cdot \cos \alpha) = \sum_i \left[ \frac{\Delta q_i \cdot x}{4\pi\epsilon_0 (R^2 + x^2)^{3/2}} \right] = \frac{x}{4\pi\epsilon_0 (R^2 + x^2)^{3/2}} \cdot \sum_i \Delta q_i = \\ = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{x}{(R^2 + x^2)^{3/2}}.$$

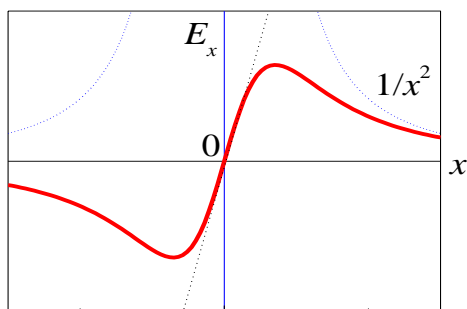


Рис. 7.7

Сам же вектор  $\vec{E}$ , очевидно, будет направлен вдоль оси  $OX$ . Окончательно полученный результат можно записать в такой форме:

$$\vec{E}(x) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q \cdot x}{(R^2 + x^2)^{3/2}} \cdot \vec{e}_x. \quad (7.6)$$

Зависимость проекции на ось  $OX$  вектора напряжённости  $E_x$  представлена на графике – рис. 7.7. Видно, что на малых расстояниях от центра кольца эта зависимость *линейная*, на больших – обратно пропорциональная квадрату расстояния (кольцо “становится” точечным зарядом).

### ❖ Сделаем несколько замечаний

1. В рассмотренном примере мы обошлись даже без высшей математики – процедуры интегрирования. В более сложных случаях «одномерного» распределения заряда (см. рис. 7.8) придется рассчитывать т. н. «криволинейные» интегралы вдоль линейного объекта « $L$ » (стержни, нити, проволоки, ...):

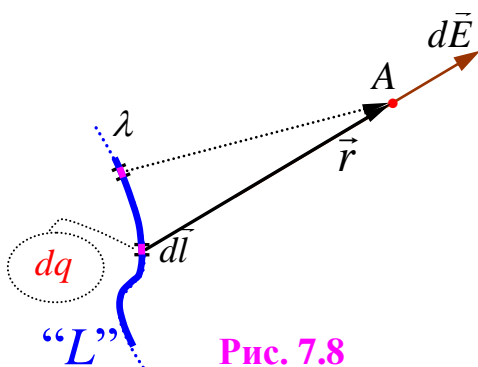


Рис. 7.8

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_L \frac{\lambda}{r^2} \frac{\vec{r}}{r} dl, \quad (7.7)$$

используя при этом понятие *линейной плотности заряда*:

► (Опр.)

$$\lambda = \frac{dq}{dl} \quad (7.8)$$

Написать равенство (7.7) не сложно, а вот «взять» такой интеграл, увы, удаётся далеко не всегда. Обратите внимание, что и положения начала векторов  $\vec{r}$  для каждого элемента разные! С некоторыми характерными случаями, когда удаётся свести такую непростую «математическую конструкцию» к обычному определённому интегралу вы познакомитесь на семинарских занятиях и в практикуме.

2. Если заряд распределён по какой-либо поверхности или в некоторой трёхмерной области пространства («по объёму»), используют соответственно поверхностные или объёмные интегралы, а также понятия *поверхностной и объёмной плотности заряда*:

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\Sigma} \frac{\sigma}{r^2} \frac{\vec{r}}{r} dS \quad \text{и} \quad \vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\Omega} \frac{\rho}{r^2} \frac{\vec{r}}{r} dV; \quad (7.9)$$

► (Опр.)

$$\sigma = \frac{dq}{dS} \quad \text{и} \quad \rho = \frac{dq}{dV} \quad (7.10)$$

Символы « $L$ », « $\Sigma$ » и « $\Omega$ » под интегралами используются в равенствах (7.9) для обозначения линии, поверхности или области пространства (это геометрические объекты!), по которым распределён заряд соответственно. Мы и в дальнейшем будем придерживаться таких обозначений. Обозначения же « $l$ », « $S$ » и « $V$ » мы сохраняем за длиной, площадью и объёмом (это числа!) этих объектов.

## § 8. Теорема Гаусса

В предыдущем пункте мы говорили о первом способе расчёта напряжённости, опирающемся непосредственно на принцип суперпозиции электростатических полей. Оказывается, однако, что из закона Кулона и принципа суперпозиции можно вывести мощную теорему-следствие, которая существенно упрощает решение задач о нахождении вектора  $\vec{E}$  для электрических полей, созданных протяжёнными телами с плоской («билатеральной»), аксиальной («цилиндрической») и сферической симметрией распределения заряда. Прежде, чем сформулировать и доказать эту теорему – теорему Гаусса<sup>\*)</sup>, нам понадобится ввести ещё одну полезную величину, характеризующую электрическое поле – поток вектора напряжённости.

### 8.1. Поток вектора напряжённости

Прежде, чем говорить о потоке через произвольную поверхность  $\Sigma$  введём понятие элементарного потока. Разобьём всю поверхность на малые элементы и каждому сопоставим вектор  $d\vec{S}$  (см. рис. 8.1 и 8.2). Модуль такого вектора равен площади элемента поверхности  $dS$ , а направлен он по нормали  $\vec{n}$  к нему (понятно, что следует договориться также о выборе «положительной» нормали).

► **(Опр.)** Элементарным потоком  $d\Phi$  вектора  $\vec{E}$  через элемент поверхности  $d\vec{S}$  называется величина:

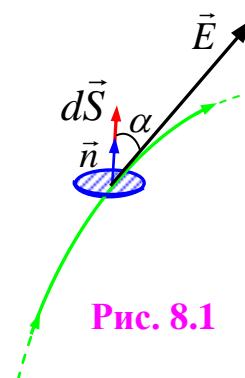


Рис. 8.1

---

<sup>\*)</sup> Математики формулируют более общую теорему «Остроградского-Гаусса» для векторных полей определённого сорта. Заметим, что М.В. Остроградский – один из учителей Д.И. Менделеева.

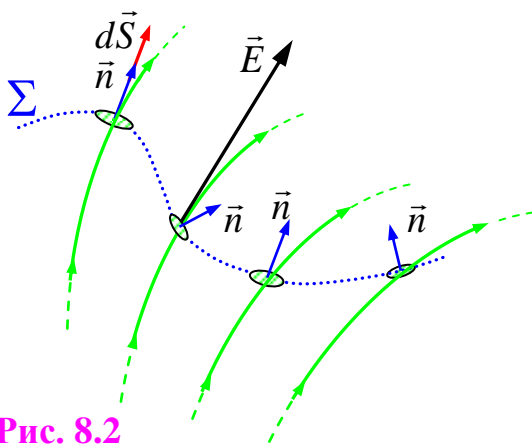


Рис. 8.2

$$d\Phi_E = E_n dS, \quad (8.1)$$

где  $E_n$  – проекция вектора  $\vec{E}$  на положительную нормаль  $\vec{n}$  к элементу поверхности  $d\vec{S}$ .

Из определения видно, что элементарный поток – это попросту скалярное произведение векторов  $\vec{E}$  и  $d\vec{S}$ . Поэтому

можно пользоваться также и другими математическими формами записи этой величины:  $(\vec{E}, d\vec{S}) = E \cdot dS \cdot \cos\alpha = E_n \cdot dS$ .<sup>\*)</sup>

Теперь легко дать определение полного потока (или просто потока) для векторного поля  $\vec{E}$  через произвольную поверхность  $\Sigma$  – по сути это просто сумма элементарных потоков через все отдельные элементы этой поверхности (см. рис. 8.2). Поскольку элементы поверхности предполагаются «физически бесконечно малых» размеров, то и суммировать придётся бесконечно много слагаемых. Математическая «цена» такого предельного перехода – интегрирование по поверхности  $\Sigma$ :

► (Опр.)

$$\Phi_E = \int_{\Sigma} E_n dS \quad (8.2)$$

❖ *Сделаем два замечания о понятии «поток вектора напряжённости»*

1. Если соблюдено условие – густота силовых линий пропорциональна модулю напряжённости поля, то справедливо и следующее важное утверждение: поток вектора напряжённости через данную поверхность пропорционален числу силовых линий проходящих сквозь неё. Этим мы воспользуемся впоследствии при доказательстве теоремы Гаусса.

<sup>\*)</sup> В дальнейшем мы, чаще всего, будем пользоваться именно этой последней формой записи.

## § 8. Теорема Гаусса

---

Только придётся сделать ещё одну важную оговорку: поскольку поток «величина алгебраическая», т.е. *может иметь разный знак в зависимости от направления*, в котором силовые линии пересекают поверхность (знака скалярного произведения  $E_n dS$  или соответствующей суммы), договоримся и «число линий» считать с учётом этого направления. Договоримся также, при этом, для замкнутых поверхностей положительными считать нормали  $\vec{n}$ , смотрящие вовне. Тогда линия «выходящая» изнутри наружу даёт вклад «+1», а «входящая» снаружи вовнутрь – «-1» в общее «число силовых линий, пересекающих поверхность»!

### 2. Принцип суперпозиции для потоков

Пусть поток вектора напряжённости (для краткости просто «поток») через некоторую поверхность  $\Sigma$  создаёт система  $N$  точечных зарядов  $q_i$  (заряженных частиц):  $q_1, q_2, \dots, q_i, \dots, q_N$ . Покажем, что полный поток  $\Phi_E$  равен в этом случае алгебраической сумме потоков  $\Phi_{E_i}$ , создаваемых каждой частицей в отдельности. Полный поток для поля всех заряженных частиц можно вычислить так:

$$\Phi_E = \int_{\Sigma} E_n(\vec{r}) dS.$$

Нормальная компонента напряжённости  $E_n(\vec{r})$  в месте расположения каждого из малых элементов  $d\vec{S}$  поверхности  $\Sigma^*$ , по которым ведётся интегрирование (суммирование!), может быть записана как сумма напряжённостей от каждого из  $N$  зарядов-источников поля по принципу суперпозиции напряжённостей:

$$E_n(\vec{r}) = \sum_{i=1}^N E_{ni}(\vec{r}),$$

---

<sup>\*</sup>) Положение каждого малого элемента задано радиус-вектором  $\vec{r}$ .

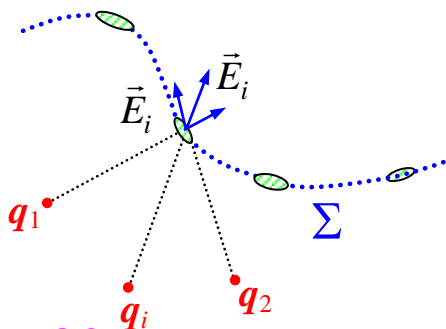


Рис. 8.3

т.е. сумме проекций напряжённостей полей от каждого из зарядов в данной точке поверхности (см. рис. 8.3). Поменяем теперь местами операции интегрирования и суммирования:

$$\Phi_E = \int_{\Sigma} \left[ \sum_{i=1}^N E_{ni}(\vec{r}) \right] dS = \sum_{i=1}^N \left[ \int_{\Sigma} E_{ni}(\vec{r}) dS \right].$$

Величина в квадратных скобках  $\int_{\Sigma} E_{ni}(\vec{r}) dS$  – это не что иное, как поток вектора напряжённости поля, создаваемого каждым из  $N$  зарядов через поверхность  $\Sigma$ , т.е.  $\Phi_{Ei}$ . Мы приходим к важному выводу, что **поток вектора напряжённости поля системы зарядов равен алгебраической сумме потоков каждого из зарядов по отдельности:**

$$\Phi_E = \sum_{i=1}^N \Phi_{Ei} \quad (8.3)$$

Мы также используем этот результат при обосновании утверждения теоремы Гаусса.

**3\*.** Понятие потока используется при описании электрического, магнитного и других векторных полей. А появилось впервые оно в гидродинамике (формула Пуазейля), и имело при этом весьма прозрачный физический смысл. Ведь просуммированное по поверхности поперечного сечения трубы произведение  $V_n \cdot dS$  даёт объём жидкости (или газа) переносимой через это сечение трубы в единицу времени:

$$\Phi_v = \int_{\Sigma} V_n dS, \quad (8.4)$$

Это и есть «поток» векторного стационарного поля скоростей  $\vec{V} = \vec{V}(x, y, z)$  элементов жидкости.

Как видим, для потока других векторных полей (электрического  $\Phi_E$ , магнитного  $\Phi_B$ ) математическая конструкция сохраняется. Они определяют важные свойства этих полей. Название сохранено, однако никакого переноса вещества в пространстве не происходит.

## 8.2. Теорема Гаусса

Сформулируем теорему.

☑ *Поток вектора напряжённости электростатического поля  $\Phi_E$  в вакууме через любую замкнутую поверхность  $\Sigma$  пропорционален суммарному заряду, расположенному внутри этой поверхности*

Коэффициент пропорциональности в системе СИ равен  $\frac{1}{\epsilon_0}$ :

$$\Phi_E = \frac{1}{\epsilon_0} \sum_{i=1}^N q_i. \quad (8.5)$$

С учётом определения потока вектора напряжённости, можно аналитической записи утверждения теоремы Гаусса (8.5) придать такой вид:

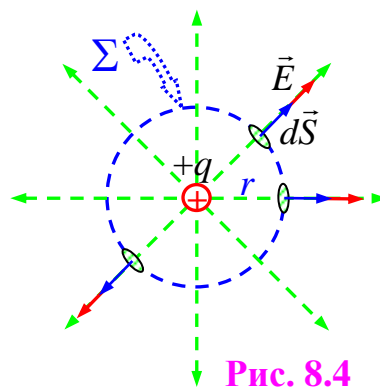
$$\oint_{\Sigma} E_n dS = \frac{1}{\epsilon_0} \sum_{i=1}^N q_i, \quad (8.6)$$

где  $N$  – число частиц или тел с зарядами  $q_i$  в области пространства  $\Omega$ , охваченной замкнутой поверхностью  $\Sigma$ . **Замкнутая поверхность всегда ограничивает конечную область пространства!** (символ “ $\oint$ ” у интеграла как раз и напоминает нам о замкнутости поверхности).

Проведём теперь доказательство утверждения теоремы «по шагам», отталкиваясь от самого простого случая:

➤ *a) сферическая поверхность охватывает точечный положительный заряд<sup>\*)</sup>, расположенный в её центре – см. рис. 8.4.*

Рассчитаем поток вектора напряжённости. Структура поля точечного заряда нам уже хорошо известна – в любой точке пространства вектор напряжённости имеет радиальное направление, а его величина обратно



<sup>\*)</sup> Для определённости здесь и далее во всех пунктах доказательства будем считать его положительным.

пропорциональна квадрату расстояния от точечного заряда-источника поля. Отметим, прежде всего, то, что для любого малого элемента сферической поверхности направления векторов  $\vec{E}$  и  $d\vec{S}$  совпадают. Это позволяет перейти от проекции вектора  $E_n$  к его модулю  $E(r)$  под знаком интеграла (мы добавили в обозначении модуля напряжённости указание на то, что имеется зависимость только от расстояния!):

$$\Phi_E = \oint_{\Sigma} E_n dS = \oint_{\Sigma} E(r) dS.$$

Далее подставим известное нам выражение для напряжённости поля точечного заряда (7.5):

$$\Phi_E = \oint_{\Sigma} \left( \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q}{r^2} \right) dS.$$

Подынтегральное выражение есть константа в пределах всей поверхности интегрирования  $\Sigma$ , поэтому её можно вынести за знак интеграла. Оставшийся интеграл в строгом соответствии с математическим определением не что иное, как площадь поверхности  $\Sigma$ , равная для сферы, как известно,  $4\pi r^2$ . В итоге получаем для искомого потока результат:

$$\Phi_E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q}{r^2} \cdot 4\pi r^2 = \frac{1}{\epsilon_0} q.$$

Как видим, он вполне соответствует утверждению теоремы.

➤ б) сместим точечный заряд из центра всё той же сферической поверхности – см. рис. 8.5.

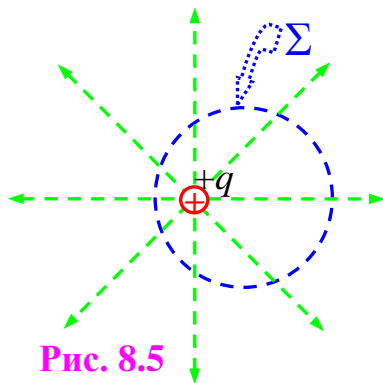


Рис. 8.5

Обратим внимание, что вычисление поверхностного интеграла (потока) в этом случае сразу существенно усложняется. Ведь теперь для каждого малого элемента поверхности угол между векторами  $\vec{E}$  и  $d\vec{S}$  разный, также как разные значения



## § 8. Теорема Гаусса

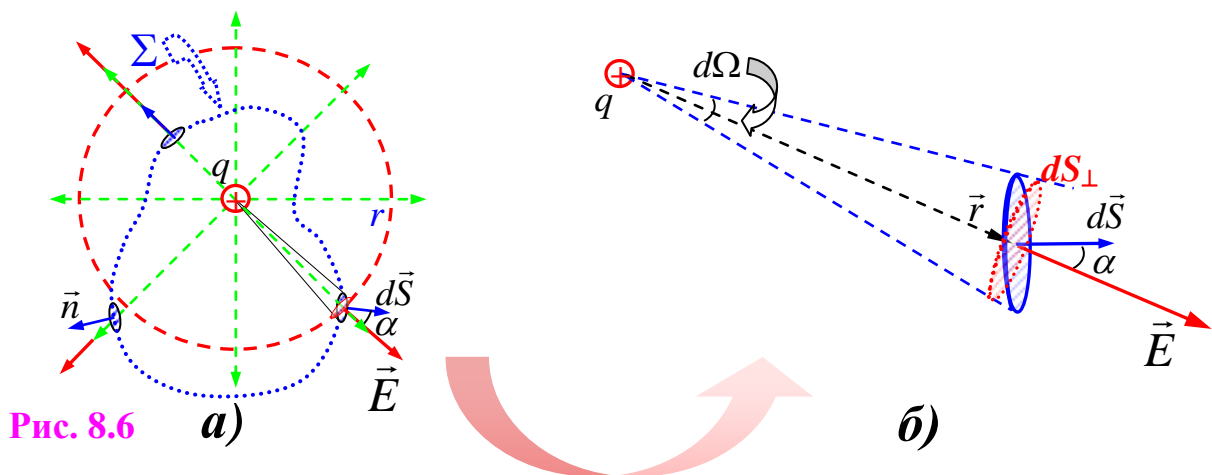
принимает и модуль напряжённости. Несмотря на такие затруднения, чуть ниже мы рассчитаем этот интеграл математически строго. Но сначала посмотрим на рисунок рис. 8.5. Он помогает понять, что обсуждаемый поток ничуть не изменяется по сравнению со случаем «а». Вспомним, что поток через поверхность пропорционален числу силовых линий пересекающих эту поверхность. Это число, очевидно, не изменилось при смещении заряда из центра. Поэтому можно предполагать, что остаётся в силе и утверждение теоремы Гаусса.

Чтобы вычислить поток математически строго, используем возможность записать скалярное произведение – выражение, стоящее под знаком интеграла (8.6) в несколько иной форме:

$$E_n \cdot dS = (\vec{E}, d\vec{S}) = E \cdot dS \cdot \cos \alpha = E \cdot dS_{\perp}.$$

Здесь обозначение  $dS_{\perp}$  использовано для проекции вектора  $d\vec{S}$  на направление напряжённости поля – см. рис. 8.6,а. Ведь, домножая  $dS$  на  $\cos \alpha$  мы получаем площадь малого элемента поверхности сферы радиуса  $r$  с центром в точке расположения заряда  $q$ . Этот элемент перпендикулярен радиус-вектору  $\vec{r}$ , проведённому от заряда к элементу поверхности. Подставим теперь сюда выражение для напряжённости поля точечного заряда (7.5):

$$E(r) \cdot dS_{\perp} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q}{r^2} \cdot dS_{\perp}.$$



Теперь необходимо привлечь дополнительные сведения из математики: отношение  $\frac{dS_{\perp}}{r^2}$  является мерой телесного угла  $d\Omega$ , опирающегося на малый элемент сферической поверхности радиуса  $r$  с площадью  $dS_{\perp}$  (рис. 8.6,б). Таким образом, выражение для искомого потока вектора напряжённости можно переписать в виде:

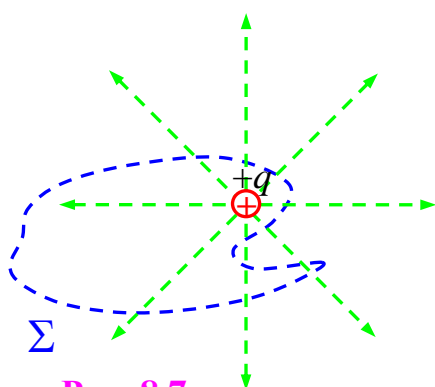
$$\Phi_E = \oint_{\Sigma} E_n dS = \oint_{\Sigma} \left( \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \right) d\Omega.$$

Выражение под знаком интеграла, очевидно, постоянная величина, а телесный угол при обходе всей замкнутой поверхности, охватывающей точечный заряд, изменяется в пределах от 0 до  $4\pi$ . Учитывая это, приходим к уже знакомому результату:

$$\Phi_E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \int_0^{4\pi} d\Omega = \frac{1}{\epsilon_0} \cdot q.$$

Убедившись в том, что опора на свойства силовых линий («поток пропорционален числу силовых линий ...») приводит к правильному результату, в обосновании дальнейших шагов доказательства будем использовать именно этот подход.

➤ **в) замкнутая поверхность произвольной формы охватывает один точечный заряд.**



**Рис. 8.7**

Из рис. 8.7 видно, что число силовых линий «истекающих» через поверхность  $\Sigma$  наружу (напомним, что мы выбрали случай положительного заряда) не изменяется даже в случае самых причудливых, например, «складчатых» замкнутых поверхностей,

охватывающих точечный заряд. Несмотря на то, что в последнем случае силовая линия может пересекать поверхность  $\Sigma$

## § 8. Теорема Гаусса

несколько раз, её итоговый «вклад» всегда равен «+1». Проследите по рисунку, что число «выходов» всегда на единицу превышает число «входов». Таким образом, и в этом случае поток пропорционален заряду  $q$  внутри поверхности  $\Sigma$ .

➤ *г) один точечный заряд находится вне замкнутой поверхности произвольной формы.*

Обратимся теперь к рисунку 8.8. Для каждой силовой линии число её пересечений с замкнутой поверхностью  $\Sigma$  всегда чётно – число пересечений «внутри» всегда равно числу «выходов наружу». Поэтому заряд  $q$ , находящийся вне замкнутой поверхности  $\Sigma$ , не создаёт дополнительного потока через эту поверхность.

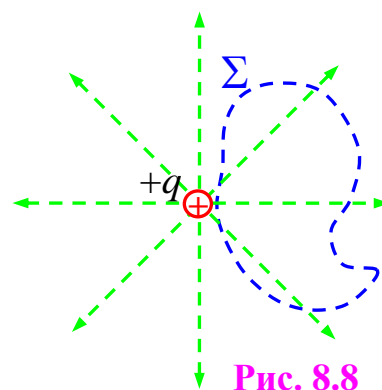


Рис. 8.8

Применим полученные результаты к самому общему случаю.

➤ *д) система  $N$  точечных зарядов  $q_1, q_2, \dots, q_i, \dots, q_N$  (или протяжённых заряженных тел<sup>\*)</sup>) находящихся как внутри, так и вне замкнутой поверхности  $\Sigma$  произвольной формы.*

Для каждого точечного заряда  $q_i$  расположенного внутри поверхности  $\Sigma$  доказано, что создаваемый им поток через замкнутую поверхность равен

$$\Phi_{Ei} = \frac{1}{\varepsilon_0} \cdot q_i.$$

В то же время, любой из зарядов  $q_k$  «снаружи» потока не создаёт. Ранее мы обосновали справедливость принципа суперпозиции для потоков вектора напряжённости электростатического поля

<sup>\*)</sup> Как обычно, такие тела можно разбить на малые элементы, которые можно считать точечными зарядами.

$$\Phi_E = \sum_{i=1}^N \Phi_{Ei}.$$

С учётом этого мы и можем утверждать, что полный поток через поверхность равен алгебраической сумме зарядов внутри поверхности:

$$\sum_{i=1}^N \Phi_{Ei} = \sum_{i=1}^N \frac{1}{\varepsilon_0} \cdot q_i; \quad \text{или} \quad \Phi_E = \sum_{i=1}^N \frac{1}{\varepsilon_0} \cdot q_i.$$

Что и требовалось доказать!

### ❖ Замечания

1. С чисто «технической» точки зрения вид аналитической записи утверждения теоремы Гаусса несколько меняется, если среди заряженных тел внутри замкнутой поверхности есть протяжённые (т.е. не только точечные заряды). Например, заряд распределён вдоль тел одномерных (нити, проволоки, ...), двумерных (поверхности тел), трёхмерных (по всему объёму тела). Заряд может быть «рассредоточен» по целым значительным областям пространства. Чтобы найти *«алгебраическую сумму зарядов, расположенных в области пространства  $\Omega$ , ограниченной замкнутой поверхностью  $\Sigma$ »* придётся прибегнуть к процедуре интегрирования. В правой части вместо суммы появится соответствующий интеграл – криволинейный, поверхностный или объёмный:

$$\oint_{\Sigma} E_n dS = \frac{1}{\varepsilon_0} \cdot \int_L \lambda dl; \quad \oint_{\Sigma} E_n dS = \frac{1}{\varepsilon_0} \cdot \int_{\Sigma^*} \sigma dS; \quad \oint_{\Sigma} E_n dS = \frac{1}{\varepsilon_0} \cdot \int_{\Omega^*} \rho dV.$$

Здесь  $\lambda$ ,  $\sigma$  и  $\rho$  – уже знакомые нам (см. с. 102, 103) линейная, поверхностная и объёмная плотности заряда соответственно, а

## **§ 8. Теорема Гаусса**

---

“ $L$ ”, “ $\Sigma^*$ ” и “ $\Omega^*$ ” – тела (области пространства), по которым распределён заряд (одномерные, двумерные и трёхмерные)<sup>\*)</sup>.

2. Ещё раз подчеркнём, что утверждение теоремы Гаусса есть следствие закона Кулона (а именно центрального характера силы электростатического взаимодействия, и зависимости  $\sim 1/r^2$  от расстояния), а также принципа суперпозиции напряжённостей.

### **8.3. Применение теоремы для расчёта напряжённости электрического поля протяжённых заряженных тел**

Ранее мы отмечали, что расчёт напряжённости электрического поля по заданному распределению заряженных частиц и тел в пространстве может быть проведён с использованием принципа суперпозиции электрических полей («первый способ» – «непосредственно») принципиально всегда. А на практике зачастую мы сталкиваемся с «техническими» трудностями при попытках получить результат аналитически даже в простейших на первый взгляд ситуациях распределения зарядов-источников поля в пространстве. Так, например, для решения «задачи Ньютона» о поле однородного шара (случай гравитационного поля) использование аппарата дифференциального и интегрального исчисления «в лоб» заводит в тяжёлые математические «дебри». С некоторыми задачами подобного рода (поле заряженного стержня, диска, ...) вы сталкиваетесь на семинарах и занятиях в практикуме.

Напротив, использование теоремы Гаусса позволяет существенно упростить «техническую» сторону дела при расчёте электрического поля, если только имеет место определённая

---

<sup>\*)</sup> Дополнительный символ «\*» в обозначениях  $\Sigma^*$  и  $\Omega^*$  нам понадобился, чтобы подчеркнуть – интегрирование ведётся не по «замкнутой поверхности»  $\Sigma$  и «ограниченной ею области пространства»  $\Omega$ , которые фигурируют в формулировке теоремы, а по заряженным телам (или их части), оказавшимся внутри этой поверхности (и в этой области пространства).

симметрия в пространственном распределении заряда – плоская, осевая или сферическая. Наличие симметрии является принципиальным моментом, она позволяет сделать заключение о структуре поля «априори» – т.е. ещё до применения каких-либо теорем. Вот тогда и можно выбрать замкнутую поверхность  $\Sigma$ , фигурирующую в формулировке теоремы Гаусса так, чтобы максимально упростить расчёт поверхностного интеграла (потока). Части этой поверхности должны быть расположены по отношению к вектору напряжённости либо перпендикулярно ( $\cos\alpha = 1$ ), либо параллельно ( $\cos\alpha = 0$ ). Модуль вектора напряжённости должен быть постоянным для части поверхности первого «типа». В такой ситуации поверхностный интеграл в левой части равенства (8.4) (поток вектора напряжённости), легко сводится к произведению модуля вектора  $\vec{E}$  на площадь части (или всей) поверхности, для которой рассчитывается поток. После этого остаётся только аккуратно «посчитать» заряд, оказавшийся охваченным замкнутой поверхностью, для которой был «рассчитан» поток.

Покажем, как всё это выглядит на практике на двух простых примерах – как и ранее (когда мы обсуждали «первый способ») наша задача продемонстрировать метод, а тренироваться в его применении, в том числе и для более сложных случаев вам предстоит на семинарах и занятиях в практикуме. (Кроме того, некоторые такие примеры разобраны и в нашем учебном пособии для семинарских занятий).

**Пример 1.** Решим «задачу Ньютона»<sup>\*)</sup> – докажем, что поле вне равномерно заряженного по всему объёму шара (диэлектрического) ничем не отличается от поля точечного заряда  $q$  на расстояниях  $r$  больших, чем радиус этого шара  $R$ .

---

<sup>\*)</sup> Мы уже отмечали, что Ньютон решал такую задачу применительно к гравитационному полю.

## § 8. Теорема Гаусса

---

Определим также и напряжённость поля  $\vec{E}(r)$  в произвольной точке **внутри** шара ( $r \leq R$ ). Будем считать при этом, что заряд  $q$  внутри шара распределён с постоянной объёмной плотностью  $\rho$ , материал шара имеет диэлектрическую проницаемость  $\varepsilon$ .

На этом и следующем простых примерах продемонстрируем подробно все основные шаги решения задач о нахождении напряжённости электрического поля с использованием теоремы Гаусса («второй способ»).

- 1. Сделать схематический рисунок, иллюстрирующий распределение заряда в пространстве. Указать на нём необходимые параметры задачи – в данном случае – радиус шара  $R$ , характеристику распределённого заряда – его плотность  $\rho$ , диэлектрическую проницаемость среды  $\varepsilon$ . Ввести подходящую систему координат (исходя из симметрии распределения заряда), указав на рисунке координатные оси (как правило, достаточно всего одной) и начало отсчёта.

✓ **В нашем примере:** Заряд распределён равномерно по всей области шара – объёмная плотность заряда есть функция только расстояния от центра шара  $r$  и не зависит от направления в пространстве. Причём  $\rho(r) = const$  при  $r \leq R$  и  $\rho(r) = 0$  при  $r > R$ . Нетрудно предположить, что адекватным выбором для такой ситуации будет сферическая система координат. Более того, поскольку нет никакого «привилегированного» пространственного

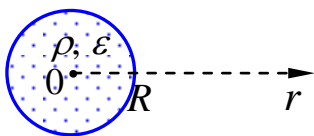


Рис. 8.9,а

направления, полярные углы нам вовсе не понадобятся, и на рисунке достаточно указать лишь начало координат (очевидно, совместив его с центром шара) и полярную ось с

необходимой для дальнейшего анализа координатой  $r$  – расстояние от центра (см. рис. 8.9,а).

- 2. Проанализировать структуру поля. Основываясь на конкретной симметрии пространственного распределения заряда, сделать вывод о направлении вектора напряжённости в произвольной точке пространства вне области распределения заряда и внутри неё. Сделать заключение о том, от каких пространственных координат может зависеть модуль этого вектора, а от каких нет. *На рисунке должны появиться векторы  $\vec{E}$ , имеющие начало в соответствующих точках пространства.*

✓ *В нашем примере:* Наши знания свойств электрического поля отдельных точечных зарядов и принципа суперпозиции позволяют утверждать, что не только пространственное распределение заряда, но и его электрическое поле имеют радиальную симметрию. В любой точке пространства, как вне шара, так и внутри него вектор напряжённости направлен строго по радиусу (от центра, если заряд шара положителен и к центру, если отрицателен). Модуль напряжённости, вероятно, зависит от расстояния  $r$ , но никак не от направления. Поэтому сразу введём обозначение  $\vec{E}(r)$ . Обратите внимание: в скобках именно модуль

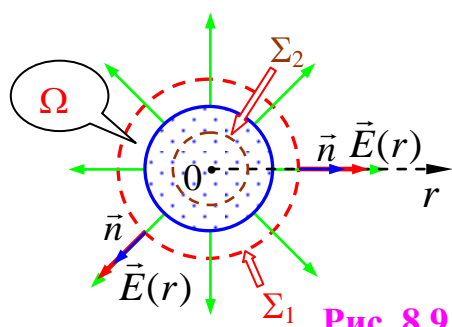


Рис. 8.9,б

$r$  – расстояние, т.е. число, а не вектор! На рисунке 8.9,б выберем две произвольные точки вне и внутри шара соответственно и укажем для них векторы напряжённости.

- 3. На основании проведённого выше анализа структуры поля *выбрать замкнутую поверхность  $\Sigma$*  (поверхности) для применения теоремы Гаусса. Как мы уже отмечали, часть этой поверхности (или вся поверхность)



## § 8. Теорема Гаусса

---

должна быть расположена по отношению к вектору напряжённости перпендикулярно, а другая часть параллельно. Модуль вектора напряжённости должен быть постоянным для частей поверхности первого «типа». *На рисунке должны появиться векторы  $\vec{n}$  (или  $d\vec{S}$ , они ведь сонаправлены) нормали к тем же самым малым элементам поверхности, для которых ранее уже были указаны и векторы  $\vec{E}$ !*

✓ *В нашем примере:* Исходя из проведённого анализа, выберем на рис. 8.9,б две замкнутые поверхности  $\Sigma_1$  и  $\Sigma_2$  – сферы с центром, совпадающим с центром шара и с радиусами  $r > R$  и  $r < R$  соответственно. Две разные поверхности нужны, чтобы найти напряжённость поля как в области пространства вне, так и внутри шара. Обратите внимание – выбранная поверхность не должна совпадать с поверхностью заряженного шара и вообще иметь какой-либо *определённый* радиус (в данном случае  $R$ ). Ведь наша задача получить функцию  $\vec{E}(r)$ , а не одно конкретное значение напряжённости для одного какого-то избранного значения  $r$ ! Укажем на рисунке *непосредственно рядом* с нарисованными ранее векторами напряжённости *векторы нормали  $\vec{n}$  (или  $d\vec{S}$ ) для тех же самых* малых элементов поверхности  $d\vec{S}$  (их выбор, как мы помним, был произволен как на поверхности  $\Sigma_1$ , так и  $\Sigma_2$ ). Это важно, так как при вычислении поверхностного интеграла, мы, по сути, суммируем скалярные произведения  $E_n dS$ , «перебирая» последовательно все такие малые элементы на поверхностях  $\Sigma_1$  и  $\Sigma_2$  соответственно.

- 4. Теперь надо «*рассчитать*» *поток вектора напряжённости через поверхность  $\Sigma$* , т.е. свести поверхностный интеграл

$\oint_{\Sigma} E_n dS$  к произведению модуля вектора  $\vec{E}$  на площадь части (или всей) поверхности  $\Sigma$ .

✓ *В нашем примере:* Всё готово для «вычисления» потока – поверхностного интеграла вида  $\oint_{\Sigma} E_n dS$ . Отметим, прежде всего, что в данном случае векторы  $\vec{E}$  и  $\vec{n}$  совпадают по направлению. Это сразу же позволяет перейти от величины  $E_n$  (проекция на направление нормали) под знаком интеграла к модулю напряжённости. Вспомним, кроме того, что эта величина есть функция только расстояния  $r$  и отметим это в обозначении этой величины –  $E(r)$ . Для сферической поверхности радиус  $r$ , очевидно, величина постоянная, а значит и сама величина  $E(r)$  также константа. Её можно вынести за знак интеграла:

$$\oint_{\Sigma} E_n dS = \oint_{\Sigma} E(r) dS = E(r) \cdot \oint_{\Sigma} dS.^*)$$

Оставшийся поверхностный интеграл – аналитическая запись математически точного определения площади поверхности  $\Sigma$ . В нашем примере обе выбранные поверхности  $\Sigma_1$  и  $\Sigma_2$  – сферы, их площадь равна  $4\pi r^2$ . Получаем окончательно для потока вектора напряжённости:

$$\oint_{\Sigma} E_n dS = E(r) \cdot 4\pi r^2.$$

Вид этого результата ничем не отличается для поверхностей  $\Sigma_1$  и  $\Sigma_2$  – разница состоит лишь в принадлежности к определённому диапазону значений радиуса  $r > R$  и  $r < R$  соответственно.

---

\*) Мы сознательно опускаем индексы «1» и «2» в обозначении поверхностей  $\Sigma_1$  и  $\Sigma_2$ , чтобы не загромождать запись.

## § 8. Теорема Гаусса

---

- 5. Далее следует *рассчитать заряд, оказавшийся охваченным замкнутой поверхностью*  $\Sigma$ , для которой был «рассчитан» поток.

✓ *В нашем примере:* Вот здесь запись результата будет отличаться для случаев поверхностей  $\Sigma_1$  и  $\Sigma_2$ . А именно, в первом случае внутри поверхности оказывается весь заряд шара. Он равен произведению постоянной объёмной плотности заряда  $\rho$  на объём шара радиуса  $R$ :

$$q = \rho \cdot \frac{4}{3} \pi R^3.$$

Поверхность  $\Sigma_2$  имеет радиус  $r$  меньший, чем у шара, и охватывает лишь часть заряда распределённого внутри него. Этот заряд равен

$$q_2 = \rho \cdot \frac{4}{3} \pi r^3.$$

\* Если заряд внутри заряженной области пространства распределён неравномерно, при вычислении заряда охваченного поверхностью  $\Sigma$  придётся выполнить интегрирование:

$$q_2 = \int_{\Omega} \rho(\vec{r}) dV.$$

Здесь  $\rho(\vec{r})$  – функция координат для объёмной плотности заряда, характеризующая пространственное распределение заряда,  $\Omega$  – область пространства, ограниченная замкнутой поверхностью  $\Sigma$ . Пример подобного расчёта можно посмотреть, в частности, в нашем пособии для семинарских занятий (см. задание 6.5).

- 6. И, наконец, остаётся *записать равенство, соответствующее утверждению теоремы Гаусса*. Из этого равенства уже легко сделать заключение о значении напряжённости в интересующей нас области пространства (направление вектора, как мы помним, было определено ещё на начальной стадии решения задачи в п. 2. Отметим, что поскольку поверхность включала в себя точки, расположенные на произвольном расстоянии от заряженных тел, полученный

результат будет представлять собой, по сути дела, функцию соответствующих координат точек пространства и обладать большой общностью.

✓ *В нашем примере:* Пришло время «пожинать плоды». Запишем два равенства отвечающие утверждению теоремы Гаусса.

$$а) \text{ Для поверхности } \Sigma_1: E(r) \cdot 4\pi r^2 = \frac{1}{\varepsilon_0} \cdot \rho \cdot \frac{4}{3} \pi R^3.$$

Отсюда делаем вывод, что напряжённость поля вне шара меняется по закону:

$$E^{(вне)}(r) = \frac{1}{3\varepsilon_0} \cdot \frac{\rho R^3}{r^2}, \quad \text{при } r > R \text{ (поле вне шара).}$$

Чтобы включить информацию о направлении напряжённости, надо перейти к векторной форме записи результата. Учтём, кроме того, что произведение  $\rho \cdot \frac{4}{3} \pi R^3$  равно полному заряду шара  $q$ :

$$\vec{E}^{(вне)}(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{q}{r^2} \cdot \frac{\vec{r}}{r}, \quad \text{при } r > R \text{ (поле вне шара).}$$

Мы доказали тем самым, что поле вне равномерно заряженного по всему объёму шара такое же, как и поле точечного заряда на расстояниях  $r$  больших, чем радиус этого шара  $R$ . Оно имеет радиальное направление и убывает обратно пропорционально квадрату расстояния от центра сосредоточения заряда.

$$б) \text{ Для поверхности } \Sigma_2: E(r) \cdot 4\pi r^2 = \frac{1}{\varepsilon\varepsilon_0} \cdot \rho \cdot \frac{4}{3} \pi r^3.*$$

Отсюда делаем вывод, что напряжённость поля внутри шара меняется по закону:

---

\*) Здесь мы учитываем, что поле в однородном изотропном диэлектрике в  $\varepsilon$  раз меньше, чем поле в вакууме.

## § 8. Теорема Гаусса

---

$$E^{(внутри)}(r) = \frac{\rho}{3\varepsilon\varepsilon_0} \cdot r, \quad \text{при } r \leq R \text{ (поле внутри шара)}.$$

Или в векторной форме:

$$\vec{E}^{(внутри)}(r) = \frac{\rho}{3\varepsilon\varepsilon_0} \cdot \vec{r}, \quad \text{при } r \leq R \text{ (поле внутри шара)}.$$

Как видим, напряжённость поля внутри шара по мере удаления от его центра нарастает по линейному закону.

*Вот так детально мы проследили на этом простом примере все этапы решения задачи с применением теоремы Гаусса для нахождения напряжённости электрического поля пространственно распределённой системы зарядов.*

На начальной стадии обучения постарайтесь точно и подробно воспроизводить все пункты этой «инструкции по применению» теоремы Гаусса. А после приобретения необходимых навыков можно будет действовать и по «сокращённой программе», получая необходимый результат весьма компактно – «в одну строчку». Конечно, вся необходимая цепочка рассуждений и анализ должны быть при этом проведены «в уме», и «готовы к предъявлению» по первому требованию.

**Пример 2.** Определим напряжённость электрического поля  $\vec{E}(r)$  бесконечного цилиндрического стержня радиуса  $R$  а) внутри и б) вне этого стержня. Пусть заряд распределён внутри стержня равномерно с объёмной плотностью  $\rho$ ;  $r$  – расстояние от оси цилиндра, диэлектрическая проницаемость материала стержня равна  $\varepsilon$ .

1. Рисунок к данной задаче мы приведём несколько позже, после анализа структуры поля и выбора поверхностей  $\Sigma_1$  и  $\Sigma_2$ .

2. Распределение заряда на этот раз имеет т.н. «аксиальную» (относительно оси) симметрию. Такая симметрия диктует и соответствующую структуру электрического поля – на рисунке 8.10,а пунктиром изображены силовые линии этого поля в одной из плоскостей перпендикулярной оси стержня. Они представляют

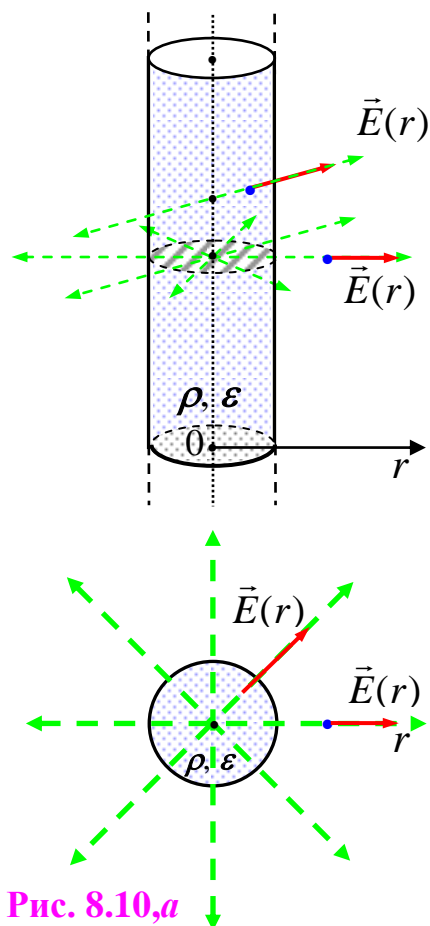


Рис. 8.10,а

собой осесимметричную систему радиально расходящихся во все стороны лучей (для определённости будем считать заряд стержня положительным). В любой точке пространства (как вне стержня, так и внутри него) вектор напряжённости перпендикулярен оси стержня и направлен вдоль одного из таких лучей (т.е. радиально). Модуль напряжённости, как и в предыдущем примере, может зависеть от расстояния от оси стержня  $r$ , но никак не от азимутального направления. На рисунке мы отметим это в обозначении  $\vec{E}(r)$  (опять-таки в скобках именно модуль  $r$ ).

3. Критериям выбора замкнутой поверхности  $\Sigma$  (на части поверхности вектор  $\vec{E}$  должен совпадать с направлением нормали и быть постоянным по модулю, а на оставшейся части перпендикулярным к ней) удовлетворяет на этот раз поверхность *прямого кругового цилиндра*, коаксиального со стержнем. Высота цилиндра выбирается произвольно, обозначим её  $h$ . Чтобы найти поле вне и внутри стержня нам опять понадобятся две замкнутые поверхности  $\Sigma - \Sigma_1$  и  $\Sigma_2$ . Разница между ними лишь в том, что радиус первого  $r > R$ , а второго  $r < R$  (кроме того, ради сугубо визуального эффекта мы выбрали для них заметно отличающуюся высоту  $h$ ). Опять обращаем внимание – боковые поверхности цилиндров  $\Sigma_1$  и  $\Sigma_2$  не совпадают с боковой поверхностью заряженного стержня. Только в этом случае,

## § 8. Теорема Гаусса

применив теорему Гаусса, мы получим функцию  $\vec{E}(r)$  для любых значений  $r$ . Каждая из поверхностей  $\Sigma_1$  и  $\Sigma_2$  состоит на этот раз в свою очередь из двух частей – боковой поверхности  $\Sigma_{бок}$  и поверхности оснований  $\Sigma_{осн}$ . На рисунке 8.10,б мы должны указать векторы напряжённости и векторы нормали  $\vec{n}$  (или  $d\vec{S}$ ) опять-таки для тех же самых малых элементов поверхности  $d\vec{S}$ . Элементы надо выбрать на произвольных расстояниях от оси стержня для обеих использующихся поверхностей ( $\Sigma_1$  и  $\Sigma_2$ ) причём как на боковой поверхности, так и на поверхности оснований.

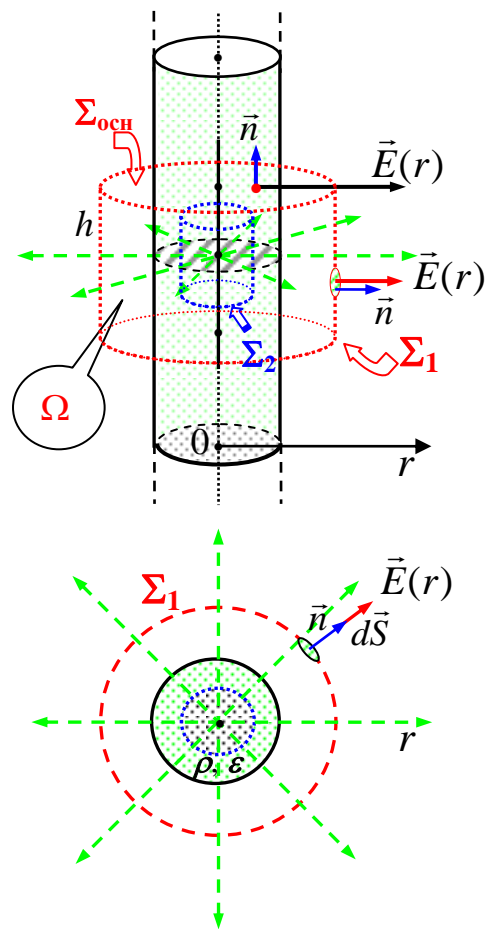


Рис. 8.10,б

4. Процедура «вычисления» поверхностного интеграла вида  $\oint_{\Sigma} E_n dS$  (т.е. потока) ничем не отличается для случаев  $\Sigma_1$  и  $\Sigma_2$ . Поэтому индексы «1» и «2» в обозначениях мы указывать не будем. Разобьём его на две части – по боковой поверхности и по поверхности оснований:

$$\Phi_E = \oint_{\Sigma} E_n dS = \int_{\Sigma_{бок}} E_n dS + \int_{\Sigma_{осн}} E_n dS.$$

Учтём прежде всего, что на поверхности оснований цилиндра векторы  $\vec{E}$  и  $\vec{n}$  взаимно перпендикулярны (см. рис. 8.10,б), поэтому подынтегральное выражение равно нулю для любого малого элемента этой поверхности ( $E_n = 0$ ). Значит и весь интеграл

$\int_{\Sigma_{осн}} E_n dS$  не даёт никакого вклада в поток через поверхность  $\Sigma$ . На боковой поверхности  $\Sigma_{бок}$  векторы  $\vec{E}$  и  $\vec{n}$  сонаправлены, поэтому  $E_n \cdot dS = E(r) \cdot dS$ . Модуль напряжённости  $E(r)$  постоянен на боковой поверхности цилиндра. Его можно вынести за знак интеграла:

$$\oint_{\Sigma_{бок}} E_n dS = E(r) \cdot \int_{\Sigma_{бок}} dS = E(r) \cdot S_{бок}.$$

Интеграл  $\int_{\Sigma_{бок}} dS$  есть площадь поверхности интегрирования  $\Sigma_{бок}$ ,

т.е. для боковой поверхности цилиндра равен  $2\pi r \cdot h$ . В итоге получаем окончательно результат «вычисления» потока через замкнутую поверхность  $\Sigma$ :

$$\Phi_E = \oint_{\Sigma_{бок}} E_n dS = E(r) \cdot \int_{\Sigma_{бок}} dS = E(r) \cdot S_{бок} = E(r) \cdot 2\pi r \cdot h.$$

Таким образом, поверхностный интеграл удалось представить в виде произведения скалярных величин. По внешнему виду он выглядит совершенно одинаково как для поверхности  $\Sigma_1$  (охватывающей часть стержня снаружи), так и для поверхности  $\Sigma_2$  (расположенной внутри стержня):

$$\Phi_E = E(r) \cdot 2\pi r h.$$

Разница здесь опять лишь в принадлежности  $r$  к определённому диапазону значений радиуса:  $r > R$  и  $r < R$  для  $\Sigma_1$  и  $\Sigma_2$  соответственно.

**5.** Отличие для поверхностей  $\Sigma_1$  и  $\Sigma_2$  обнаруживается в величине охваченного ими заряда:

*a)* В первом случае ( $r > R$ ) поверхность  $\Sigma_1$  охватывает весь заряд участка стержня длины  $h$ . При постоянной объёмной плотности заряда  $\rho$  получаем:

$$q_1 = \rho \cdot \pi R^2 \cdot h.$$

( $\pi R^2 \cdot h$  – объём прямого кругового цилиндра высоты  $h$ ).



## § 8. Теорема Гаусса

б) Цилиндрическая поверхность  $\Sigma_2$  имеет радиус  $r$  меньший, чем у стержня, и охватывает лишь часть заряда распределённого внутри участка стержня высоты  $h$ . Этот заряд равен

$$q_2 = \rho \cdot \pi r^2 \cdot h.$$

6. Теперь можно записать два равенства в соответствии с утверждением теоремы Гаусса.

а) Для поверхности  $\Sigma_1$ : 
$$E(r) \cdot 2\pi r \cdot h = \frac{1}{\varepsilon_0} \cdot \rho \cdot \pi R^2 \cdot h.$$

Делаем вывод, что вне стержня напряжённость поля меняется по закону:

$$E^{(вне)}(r) = \frac{1}{2\varepsilon_0} \cdot \frac{\rho R^2}{r}, \quad \text{при } r > R \text{ (поле вне стержня).}$$

Итак, вне стержня поле имеет радиальное направление и убывает обратно пропорционально расстоянию от оси заряженного стержня.

б) Для поверхности  $\Sigma_2$ :

$$E(r) \cdot 2\pi r \cdot h = \frac{1}{\varepsilon \varepsilon_0} \cdot \rho \cdot \pi r^2 \cdot h^*).$$

Откуда получаем, что напряжённость поля внутри стержня меняется по закону:

$$E^{(внутри)}(r) = \frac{\rho}{2\varepsilon \varepsilon_0} \cdot r, \quad \text{при } r \leq R$$

(поле внутри стержня).

Внутри стержня напряжённость поля линейно растёт по мере удаления от его оси. Полученные результаты проиллюстрируем,

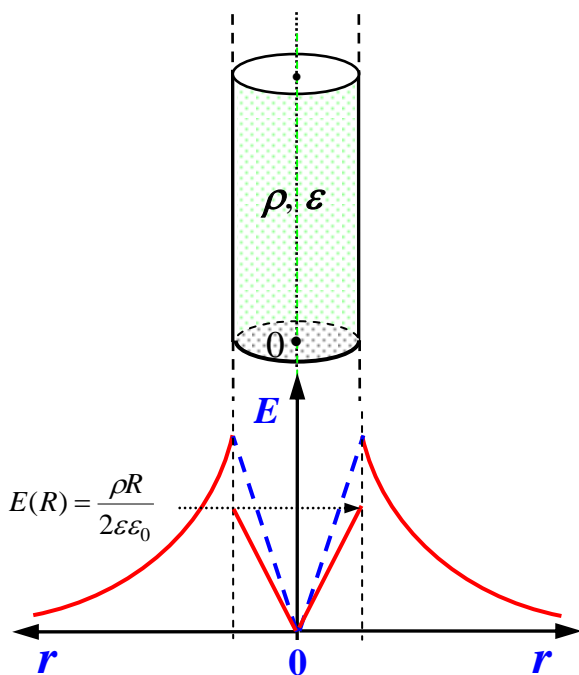


Рис. 8.11

как обычно, графически – см. рис. 8.11.

\*) Здесь мы также учли ослабление поля в диэлектрике в  $\varepsilon$  раз по сравнению с полем в вакууме.

❖ **В заключение** этого параграфа отметим, что *ключевым моментом* в проведённых решениях являлся переход от поверхностного интеграла  $\oint_{\Sigma} E_n dS$ , представляющего собой в общем случае весьма сложную с математической точки зрения конструкцию, к произведению скалярных величин вида  $E \cdot S$ . Такой переход возможен *только* при наличии одного из трёх видов симметрии распределения заряда в пространстве – *сферической, осевой* («аксиальной») или *плоской* («билатеральной» или «зеркальной»)\*). При произвольной форме заряженного тела единственно возможным остаётся лишь «первый» способ расчёта напряжённости, основанный на непосредственном применении принципа суперпозиции электрических полей, или её экспериментальное измерение.

---

\*) Применение теоремы Гаусса для случая «плоской» симметрии мы ещё затронем на примере вычисления поля внутри плоского конденсатора.

### § 9. Работа в электростатическом поле

#### 9.1. Разность потенциалов. Потенциал

В предыдущем параграфе мы обсуждали основную характеристику электрического поля – его напряжённость. Как следует из самого определения – это силовая характеристика, а значит векторная. В ряде случаев более удобными являются скалярные характеристики, которые, оказывается, тоже можно ввести для электростатического поля – разность потенциалов и потенциал. При этом мы будем опираться на важное фундаментальное свойство сил, действующих на заряд в электростатическом поле – их консервативность.

Напомним, что консервативными называются силы, работа которых не зависит от формы траектории движения тела. Работа таких сил определяется лишь координатами начальной и конечной точек перемещения. Опираясь на наши знания свойств электростатического поля, созданного произвольной системой зарядов, можно было бы провести подробное доказательство равенства работ при движении заряда между любыми двумя его точками. Но мы несколько сократим эту процедуру, вспомнив теорему о консервативности центральных сил, доказанную нами в разделе механика.

Неподвижный точечный заряд является источником поля центральных сил – это прямо следует из формулировки основного закона электростатики – закона Кулона. Из принципа суперпозиции электрических полей следует, что работа при перемещении пробного заряда в поле любой системы *покоящихся* зарядов является алгебраической суммой работ в поле каждого из зарядов в отдельности. А значит поле таких сил («кулоновских

сил»<sup>\*)</sup>) также является полем сил консервативных. Это и требовалось доказать.

Таким образом, работа сил электростатического поля  $A_{1 \rightarrow 2}^{поля^{**}}$  по перемещению точечного (пробного) заряда между двумя точками характеризует это поле. Но она зависит и от величины пробного заряда  $q_{пр}$ . Об этом говорит опыт, но это понятно и, исходя из наших знаний о кулоновских силах. Ведь они пропорциональны заряду  $q_{пр}$  в каждой точке траектории  $1 \rightarrow 2$  (исходя из закона Кулона), а работа пропорциональна силе. Чтобы охарактеризовать поле и только поле, нужно поделить работу на величину пробного заряда. То, что получится и есть «разность потенциалов». Приведём определение этого важного понятия:

➡ **(Опр.)** *Разностью потенциалов между точками электростатического поля 1 и 2 называется отношение работы поля по перемещению пробного заряда из точки 1 в точку 2 к величине этого заряда:*

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \frac{A_{12}^{поля}}{q_{пр}} \quad (9.1)$$

В системе СИ единица измерения разности потенциалов называется 1 вольт ( $1 \text{ В} = 1 \text{ Дж/Кл}$ ). Если мы научимся каким-либо образом определять разность потенциалов  $\varphi_1 - \varphi_2$  для поля системы покоящихся зарядов (теоретически или экспериментально), то это позволит находить работу поля по перемещению любого *точечного* заряда  $q$  в этом поле:

$$A_{12}^{поля} = q \cdot (\varphi_1 - \varphi_2). \quad (9.2)$$

---

<sup>\*)</sup> В дальнейшем мы для краткости нередко будем прибегать к такому жаргону вместо того, чтобы каждый раз подробно писать: «силы, действующие в электростатическом поле».

<sup>\*\*)</sup> Опять-таки для большей компактности мы часто будем вместо обозначения  $A_{1 \rightarrow 2}^{поля}$  использовать просто  $A_{12}$ .

## § 9. Работа. Разность потенциалов

Таким образом, разность потенциалов это *энергетическая характеристика* электрического поля, поскольку связана непосредственно с понятием работы.

В механике мы вводили для консервативных сил (сейчас мы, скажем: «полей консервативных сил») понятие потенциальная энергия. При этом мы руководствовались следующим принципом: работа сил поля равна убыли потенциальной энергии. Формализуем этот принцип в аналитической записи:

$$A_{12}^{поля} = \text{"убыль } U\text{"}, \text{ или } A_{12}^{поля} = -\Delta U = -(U_2 - U_1). \quad (9.3)$$

Здесь  $U_1$  и  $U_2$  – потенциальная энергия в «начальном» («1») и «конечном» («2») состояниях системы, соответственно. В обсуждаемом случае поля системы неподвижных зарядов – это энергия точечного заряда  $q$  в положении «1» (с координатами  $\{x_1, y_1, z_1\}$ ) и положении «2» (с координатами  $\{x_2, y_2, z_2\}$ ) в электростатическом поле. Т.е. потенциальная энергия заряда в этом поле – скалярная функция координат точек поля  $U = U(x, y, z)$  (или  $U = U(\vec{r})$ ). Сравнивая (9.2) и (9.3), видим – удобно считать, что разность потенциалов представляет собой разность значений ещё одной скалярной функции координат точек поля  $\varphi(x, y, z)$ . Она связана с функцией  $U(x, y, z)$  (потенциальной энергией) простым соотношением:  $U(x, y, z) = q \cdot \varphi(x, y, z)$ . Или, поскольку

$$\varphi(x, y, z) = \frac{U(x, y, z)}{q} \left[ \text{или } \varphi(\vec{r}) = \frac{U(\vec{r})}{q} \right], \quad (9.4)$$

говорят, что она «численно равна потенциальной энергии единичного положительного заряда» в данной точке поля. И называется эта величина  $\varphi$  «потенциал» данной точки электростатического поля.

Самое важное заключается в том, как найти эту функцию  $\varphi(\vec{r})$  [а значит и  $U(\vec{r})$ ] для поля конкретной системы зарядов? Какова последовательность действий?

Прежде всего, придётся договориться об условиях нормировки<sup>\*)</sup>: надо выбрать точку  $P_0$ , в которой потенциал поля будем полагать равным нулю [ $\varphi(P_0) = 0$ ]. Во многих случаях такую точку выбирают бесконечно удалённой, там где поле отсутствует [ $\varphi(\infty) = 0$ ]<sup>\*\*)</sup>. Для этого надо найти «удельную» работу поля – т.е. работу, отнесённую к величине переносимого пробного заряда (или, как нередко говорят, «по перемещению единичного положительного» заряда) из данной точки поля  $P(x, y, z)$  в точку нормировки  $P_0$ . В аналитической форме это **определение** потенциала можно записать так:

➡ **(Опр.)** 
$$\varphi_P(x, y, z) = \frac{A_{P \rightarrow P_0}^{поля}}{q_0}$$
 (9.5)

Нельзя ли выразить вновь введённые нами величины – разность потенциалов и потенциал через силовую характеристику, которую мы уже научились рассчитывать по заданному расположению зарядов в пространстве? Конечно можно. Запишем цепочку хорошо понятных нам равенств:

$$A_{1 \rightarrow 2}^{поля} = \int_{(1)}^{(2)} F_l dl = q_0 \cdot \int_{(1)}^{(2)} E_l dl \Rightarrow \varphi_1 - \varphi_2 = \frac{A_{1 \rightarrow 2}^{поля}}{q_0} = \int_{(1)}^{(2)} E_l dl.$$

по любой траектории

Выпишем последнее равенство ещё раз

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \int_{(1)}^{(2)} E_l dl. \tag{9.6}$$

<sup>\*)</sup> Вспомните процедуру расчёта потенциальной энергии для произвольной консервативной силы в механике.

<sup>\*\*)</sup> Только при решении модельных задач о заряде, распределённом по бесконечной области пространства (гипотетический случай) с плоской или осевой симметрией, подобная нормировка недопустима.

## § 9. Работа. Разность потенциалов

---

Оно даёт «рецепт» поиска разности потенциалов по известной функции напряжённости. Аналогично для потенциала:

$$A_{P \rightarrow P_0}^{\text{поля}} = \int_{(P)}^{(P_0)} F_l dl = q_0 \cdot \int_{(P)}^{(P_0)} E_l dl \quad \Rightarrow \quad \varphi(P) = \frac{A_{P \rightarrow P_0}^{\text{поля}}}{q_0} = \int_{(P)}^{(P_0)} E_l dl.$$

*по любой траектории*

И окончательно для потенциала произвольной точки поля  $P$  с координатами  $(x, y, z)$ :

$$\varphi(x, y, z) = \int_{(P)}^{(P_0)} E_l dl. \quad (9.7)$$

### 9.2. Потенциал поля точечного заряда

Опираясь на процедуру расчёта потенциала, получим выражение для случая поля точечного заряда. Это очень важно для дальнейших расчётов потенциала поля системы произвольно расположенных в пространстве зарядов.

1. **Нормировка.** Будем считать потенциал равным нулю там, где поле точечного заряда практически отсутствует:  $\varphi(\infty) = 0$ .

2. **Выбор траектории.** Пусть произвольная точка  $P(x, y, z)$  находится на расстоянии  $r$  от заряда-источника. Поскольку результат не зависит от формы траектории, для расчёта криволинейного интеграла вида (9.7) выберем простейшую радиально направленную прямую из данной точки поля вдоль силовой линии и «уходящую в бесконечность».

3. **Расчёт.** В соответствии с определением потенциала выполним расчёт «удельной» работы поля, созданного точечным зарядом  $q$ , по переносу пробного заряда вдоль выбранной траектории. Нижеприводимая цепочка равенств, надеемся, выглядит достаточно «прозрачно». Однако дадим к ней всё же минимальный комментарий. Прежде всего, отметим, что в силу нашего выбора траектории в виде радиально направленного от

заряда луча можно обозначения  $E_l$  и  $dl$  (произвольная кривая «L») поменять на  $E_r$  и  $dr$  (полярная ось «r»). Более того, поскольку вектор  $\vec{E}$  направлен радиально, для любого малого перемещения  $d\vec{r}$  вдоль траектории проекция вектора напряжённости равна  $\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2}$ . В итоге мы можем сделать

важный шаг в нашем расчёте – совершить переход от криволинейного интеграла к обычному определённом:

$$\varphi(x, y, z) = \int_{(P)}^{(P_0)} E_l dl = \int_{(P)}^{(P_0)} E_r dr.^*)$$

Теперь после подстановки проекции напряжённости поля точечного заряда, исходя из равенства (7.5), нам остаётся всего лишь математическая «рутина»:

$$\int_r^{\infty} E_r(r) dr = \int_r^{\infty} \left( \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \right) dr = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int_r^{\infty} \left( \frac{1}{r^2} \right) dr = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left( -\frac{1}{r} \right) \Big|_r^{\infty} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r}.$$

Выпишем результат ещё раз, дополнив его учётом возможного наличия газообразной или жидкой однородной диэлектрической среды с диэлектрической проницаемостью  $\epsilon$ , заполняющей всё окружающее точечный заряд пространство:

$$\varphi(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q}{\epsilon r}. \quad (9.8)$$

Потенциал поля точечного заряда, как видим, убывает с расстоянием по закону  $1/r$ .

---

\*) Как обычно, в процессе подобной процедуры интегрирования мы будем использовать одинаковое обозначение «r» для *исходного расстояния* точки от заряда и для *переменной интегрирования*, несколько погрешив при этом против «строгих» правил обозначений, принятых в математике.



### 9.3. Энергия взаимодействия двух точечных зарядов в электрическом поле

Мы уже знаем, чему равна потенциальная энергия взаимодействия точечного заряда с электростатическим полем произвольной системы зарядов (см. равенство 9.4):

$$U(x, y, z) = q \cdot \varphi(x, y, z). \quad (9.16)$$

Поэтому для частного случая двух точечных зарядов  $q_1$  и  $q_2$ , потенциальная энергия их взаимодействия равна:

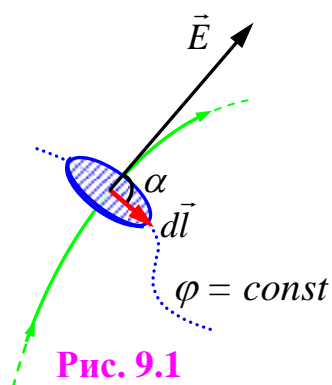
$$U = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q_1 q_2}{\epsilon r}. \quad (9.17)$$

Её удобно рассматривать, как энергию взаимодействия точечного заряда  $q_2$  с полем другого точечного заряда-источника  $q_1$  (или наоборот). Несколько позже мы ещё обсудим вопрос об энергии электростатического поля, созданного произвольной системой покоящихся зарядов.

### 9.4. Эквипотенциальные поверхности

При обсуждении силовой характеристики электростатического поля мы убедились в плодотворности понятия линий напряжённости (силовых линий). Для энергетической характеристики поля – потенциала – полезно также ввести дополнительную иллюстративную характеристику – систему «эквипотенциальных поверхностей». Из самого названия ясно («экви» означает «равный»), что это поверхности постоянного потенциала, которые характеризуют способность сил поля совершать работу при перемещении заряда. Вдоль таких поверхностей работа, очевидно, вообще не совершается. Она максимальна по направлениям, по которым максимальна густота (плотность) расположения эквипотенциальных поверхностей. В этих местах

максимальна и напряжённость поля. Нетрудно сообразить, какова и взаимная ориентация силовых линий и эквипотенциальных поверхностей в местах их пересечений: *они взаимно перпендикулярны*.



**Рис. 9.1**

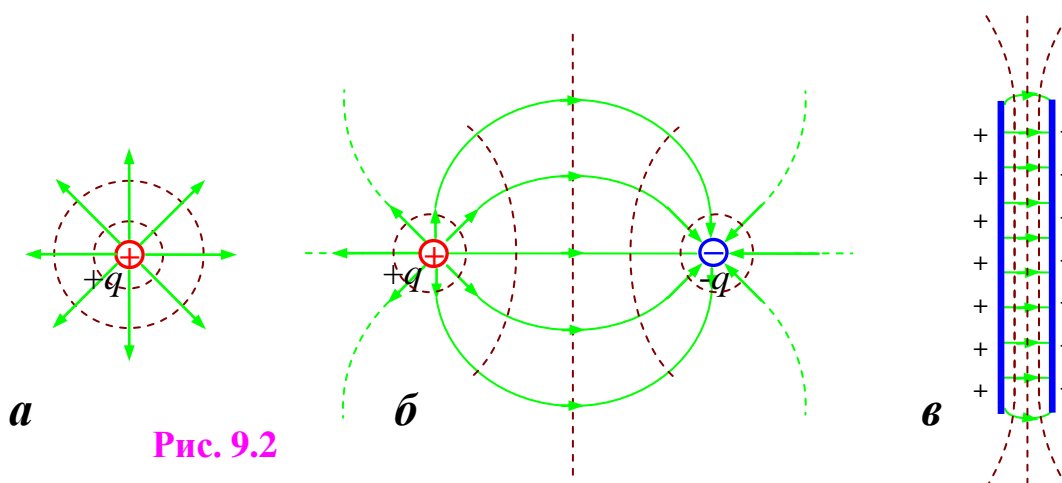
Ведь при любом малом перемещении вдоль эквипотенциальной поверхности элементарная работа равна нулю, а это возможно только в случае, если равна нулю касательная составляющая вектора напряжённости, т.е. он направлен строго по нормали к поверхности. Ниже мы приводим цепочку соответствующих этим

словам, надеемся, довольно очевидных равенств:

$$d\varphi = 0 \Rightarrow dA = q \cdot E_t \cdot dl = 0 \Rightarrow E_t = 0 \Rightarrow \vec{E} \perp d\vec{l}. \text{ (или } \vec{E} \parallel \vec{n} \text{)}$$

Вместе с рис. 9.1 они доказывают, по сути, уже сформулированное утверждение: *линии напряжённости пересекают* (или «подходят к ...») *эквипотенциальные поверхности под прямым углом!*

Приведём картину эквипотенциальных поверхностей (и силовых линий тоже) для некоторых простейших уже хорошо нам знакомых случаев электростатического поля: а) поле точечного заряда; б) поле двух одинаковых по модулю разноимённых точечных зарядов; в) поле между двумя разноимённо заряженными плоскопараллельными большими (по сравнению с расстоянием между ними) пластинами – см. рис. 9.2.



**Рис. 9.2**

### 9.4. Потенциал поля системы точечных зарядов

Нетрудно показать, что для потенциала поля системы неподвижных точечных зарядов  $q_i$  справедлив принцип суперпозиции: он равен алгебраической сумме потенциалов полей, создаваемых в данной точке каждым зарядом в отдельности:

$$\varphi = \sum_{i=1}^N \varphi_i \quad (9.9)$$

Доказательство этого утверждения основано на двух известных нам обстоятельствах: 1) потенциал равен удельной работе по перемещению пробного заряда из данной точки поля в точку нормировки; 2) работа силы есть величина аддитивная, т.е. работа нескольких сил, действующих на тело всегда равна алгебраической сумме работ каждой из сил в отдельности (мы отмечали этот факт ещё в разделе «Механика»).

Для поля системы точечных зарядов, соответственно, можно написать (см. рис. 9.3):

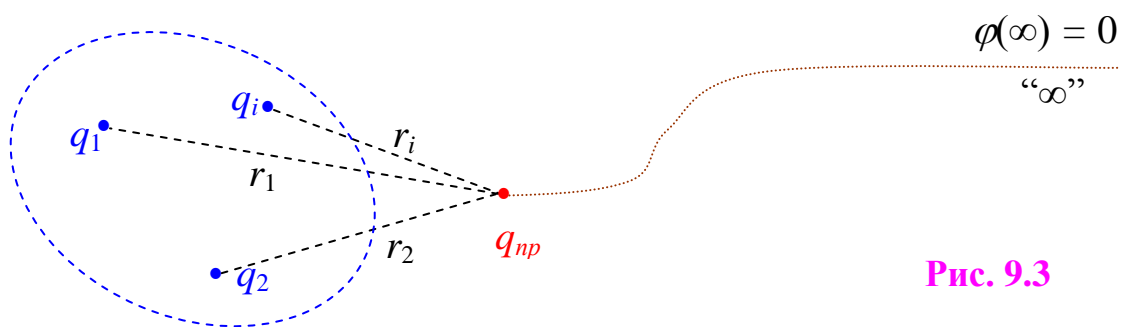


Рис. 9.3

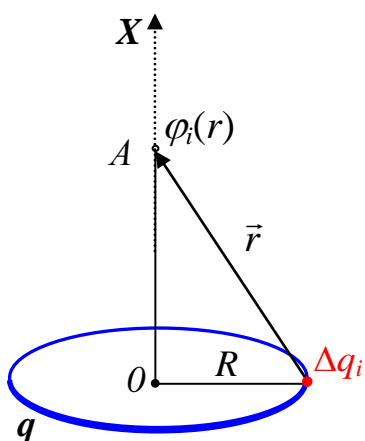
$$\varphi(x,y,z) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_i \frac{q_i}{r_i}, \quad (9.10)$$

где  $r_i$  – расстояние от  $i$ -го заряда до точки поля с координатами  $\{x,y,z\}$ . Приведём простой пример расчёта потенциала поля, создаваемого протяжённым заряженным телом, основанного на применении принципа суперпозиции для потенциалов.

**Пример.** Определим потенциал электрического поля  $\varphi(x)$  на оси равномерно заряженного кольца радиуса  $R$ . Заряд кольца  $q$ ,  $x$  – расстояние от центра кольца

Повторяя частично наши действия при расчёте напряжённости для этого случая (см. п. 7.5), обнаруживаем существенные упрощения ситуации. Потенциал – величина скалярная и после разбиения кольца на малые элементы –

точечные заряды  $\Delta q_i$ , остаётся лишь в соответствии с принципом суперпозиции просуммировать совершенно одинаковые величины – потенциалы поля, которое создаёт в интересующей нас точке каждый из этих зарядов (см. рис. 9.4):



**Рис. 9.4**

$$\varphi_A = \sum_i \left( \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\Delta q_i}{r} \right) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 \sqrt{R^2 + x^2}} \cdot \sum_i \Delta q_i \cdot$$

Оставшаяся сумма даёт, конечно, полный заряд кольца  $q$ . Поэтому запишем

результат окончательно:

$$\varphi_A = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{\sqrt{R^2 + x^2}}. \quad (9.11)$$

Обратим внимание, что этот результат получен с математической точки зрения чрезвычайно просто именно в силу скалярного характера потенциала. Решите самостоятельно вопрос о потенциале в центре, скажем, равномерно заряженной полусферы. Вы убедитесь, что ответ может быть получен, что называется, «в уме». В то время как поиск напряжённости – математически весьма непростая задача.

### 9.5. Связь напряжённости электростатического поля с разностью потенциалов

Мы уже знаем, как найти разность потенциалов между любыми двумя точками электростатического поля, если силовое поле задано функцией  $\vec{E}(x, y, z)$ :

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \int_{(1)}^{(2)} E_l dl. \quad (9.6)$$

А можно ли наоборот, зная функцию  $\varphi(x, y, z)$ , судить о напряжённости, т.е. рассчитывать векторное поле  $\vec{E}(x, y, z)$ ?

Определим работу сил поля при малом перемещении  $d\vec{l}$  пробного заряда  $q_{np}$  двумя способами:

$$1. dA = q_{np} \cdot E_l \cdot dl.$$

Здесь использованы хорошо нам известные соотношения:

$$dA = F_l \cdot dl \text{ – по определению элементарной работы силы;}$$

$$F_l = q_{np} \cdot E_l \text{ – по определению напряжённости;}$$

$$2. dA = -q_{np} \cdot d\varphi.$$

А здесь мы опирались на определение разности потенциалов  $q_{np} \cdot (\varphi_1 - \varphi_2) = A_{12}$ . Знак “–”, объясняется тем, что  $d\varphi$  – это не что иное, как бесконечно малое приращение потенциала  $\Delta\varphi^* = (\varphi_2 - \varphi_1) = -(\varphi_1 - \varphi_2)$ .

Выпишем равенства 1 и 2 ещё раз, как систему уравнений:

$$\begin{cases} dA = q_{np} \cdot E_l \cdot dl; \\ dA = -q_{np} \cdot d\varphi. \end{cases}$$

Приравнивая правые части и сокращая на  $q_{np}$ , получаем:

$$E_l \cdot dl = d\varphi \text{ или чуть иначе: } E_l = -\frac{d\varphi}{dl}. \quad (9.12)$$

\*) Определяя «приращение» всегда из конечного значения вычитают начальное.

Это соотношение означает, что проекция напряжённости поля вдоль направления  $d\vec{l}$  равна скорости изменения потенциала от точки к точке поля вдоль этого направления. Знак “–” отражает тот факт, что напряжённость поля  $\vec{E}$  направлена в сторону *убывания* потенциала  $\varphi$ .

Поскольку направление бесконечно малого перемещения  $d\vec{l}$  предполагалось нами произвольным, то оно может быть направлено и вдоль любой из координатных осей некоторой выбранной системы отсчёта. Например, в случае использования прямоугольной декартовой системы координат это могут быть направления осей  $OX$ ,  $OY$  и  $OZ$ . Тогда получим:

$$E_x = -\frac{\partial\varphi}{\partial x}; \quad E_y = -\frac{\partial\varphi}{\partial y}; \quad E_z = -\frac{\partial\varphi}{\partial z}. \quad (9.13)$$

Цепочка равенств (9.13) говорит о том, что составляющие вектора напряжённости в любой точке электростатического поля равны частным производным<sup>\*)</sup> по координатам (в нашем случае, в декартовой системе координат). Значит, сам вектор  $\vec{E}$  можно было бы задать таким способом:

$$\vec{E} = -\left( \frac{\partial\varphi}{\partial x} \vec{e}_x + \frac{\partial\varphi}{\partial y} \vec{e}_y + \frac{\partial\varphi}{\partial z} \vec{e}_z \right). \quad (9.14)$$

Напомним, что математики используют в таких случаях специальное компактное обозначение:

$$\vec{E} = -\text{grad } \varphi \quad (9.15)$$

и называют эту величину «градиент» (от лат. *gradiens* – рост<sup>\*\*)</sup>. В чём же её смысл? Градиент потенциала – вектор, имеющий компоненты  $\left\{ \frac{\partial\varphi}{\partial x}; \frac{\partial\varphi}{\partial y}; \frac{\partial\varphi}{\partial z} \right\}$  и показывающий направление, в

<sup>\*)</sup> Пояснения по поводу понятия «частная производная» см. на стр. 76 данного пособия.

<sup>\*\*)</sup> С понятием градиента мы тоже уже, конечно, встречались в разделе «Механика» в п. 5.10.

## § 9. Работа. Разность потенциалов

котором быстрее всего изменяется потенциал  $\varphi$  электростатического поля в данном месте. В самом деле: если пробный заряд перемещать вдоль этой поверхности, то работа не совершается. При наличии поля и перемещения это возможно только, если вектор напряжённости перпендикулярен к эквипотенциальной поверхности. А в этом случае расстояние между эквипотенциальными поверхностями кратчайшее.

Сами компоненты вектора градиента дают скорость роста потенциала по координатным направлениям, а вот его модуль определяет скорость в направлении максимального роста  $\varphi$  (в направлении вектора  $\text{grad}\varphi$ ). Знак «минус» перед  $\text{grad}\varphi$  в равенстве (9.15) означает, что напряжённость электростатического поля направлена всегда в сторону убывания его потенциала.

Стоит помнить, что в других координатных системах, выражение для градиента будет несколько отличаться. С этим вы встретитесь и разберётесь на семинарских занятиях. А сейчас приведём пример использования установленной взаимосвязи напряжённости с градиентом потенциала.

**Пример.** Определим напряжённость электрического поля  $\vec{E}(x)$  на оси равномерно заряженного кольца радиуса  $R$  по известной зависимости потенциала  $\varphi(x)$ . Заряд кольца  $q$ ,  $x$  – расстояние от центра кольца

Такую задачу мы уже решили, опираясь на принцип суперпозиции напряжённостей (см. пример в п. 7.5). А в предыдущем пункте получили мы и выражение для функции  $\varphi(x)$ :

$$\varphi(x) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{\sqrt{R^2 + x^2}}. \quad (9.11)$$

Чтобы найти напряжённость, используя этот результат, достаточно воспользоваться соотношением  $\vec{E} = -\text{grad}\varphi$ , и мы получим ответ на поставленный перед нами вопрос простым дифференцированием этой функции по координатам:

$$\left\{ \begin{array}{l} E_x = -\frac{\partial\varphi}{\partial x} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q \cdot x}{(R^2 + x^2)^{3/2}}; \\ E_y = 0; \\ E_z = 0. \end{array} \right. \Rightarrow \vec{E}(x) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q \cdot x}{(R^2 + x^2)^{3/2}} \cdot \vec{e}_x$$

Результат, конечно, в точности совпадает с полученным ранее – (9.6).

### ❖ **Заключительные замечания к §9**

Зачем нам понадобилось вводить какие-то дополнительные характеристики электростатического поля? С какой стати нам понадобился потенциал? Ведь применение закон Кулона в сочетании с принципом суперпозиции позволяет рассчитать это поле по любому заданному распределению электрических зарядов в пространстве. По сути всё сводится к вычислению интеграла вида (9.11), а если повезет, то есть возможность применить более хитроумный приём – использовать теорему *Гаусса*.

Попробуем обосновать полезность нового понятия.

**1.** Ещё раз подчеркнём – потенциал скалярная величина. С ней гораздо проще «работать» математически: при вычислении на основании принципа суперпозиции достаточно суммировать (интегрировать) числа, а не векторы, как в случае напряжённости. А, уже имея функцию  $\varphi(x,y,z)$ , получить зависимость  $\vec{E}(x, y, z)$ , т.е. интересующее нас векторное поле, совсем не сложно. Ведь взять производную, как вы знаете, можно от любой функции (в отличие от интеграла)!

**2.** Давая определение напряжённости, мы, по сути, «прописали» и процедуру её измерения. Однако не существует удобных приборов для измерения напряжённости в



## **§ 9. Работа. Разность потенциалов**

---

лабораторной практике. Напротив, приборы для измерения потенциала или разности потенциалов есть и широко используются. Один из таких приборов – «пламенный зонд» позволяет определять потенциал в любой точке пространства между заряженными телами. С различными электрометрами и вольтметрами, вероятно, вы давно знакомы ещё со школы.

**3.** В совокупности с линиями напряжённости поверхности равного потенциала (эквипотенциальные поверхности), как мы уже говорили, позволяют наиболее наглядно представить себе структуру электростатического поля.

## § 10. Проводники в электростатическом поле

До сих пор обсуждались, по сути, свойства электрического поля в пространстве между заряженными телами. Правда, «авансом» мы уже декларировали, что если всё это пространство заполнено жидкой или газообразной непроводящей средой (позже мы скажем: «однородным и изотропным диэлектриком»), то поле уменьшается в  $\varepsilon$  раз. Теперь нам предстоит заняться полем в веществе поподробнее.

Вспомним, прежде всего, что среди веществ есть «проводники» и «диэлектрики». Первые отличаются тем, что в них есть значительное количество «свободных» заряженных микрочастиц. Даже минимальные знания о строении вещества говорят нам, что в любом веществе есть огромное количество заряженных микрочастиц. Однако «свободные» – означает, что они могут легко перемещаться по всему объёму макроскопических тел, т.е. не связаны с каким-то отдельным атомом вещества. Такие вещества способны проводить электрический ток, и именно поэтому они называются «проводниками». Диэлектриками же называются вещества, в которых, напротив, практически отсутствуют свободные заряженные микрочастицы. Начнём наш анализ с особенностей поведения электростатического поля в присутствии проводящих тел – проводников.

### 10.1. Поле заряженного проводника

Для определённости будем считать проводник металлическим. Внутри такого проводника всегда есть огромное количество свободных электронов – порядка  $10^{23}$  в каждом кубическом сантиметре! Рассмотрим, прежде всего, к чему приводит установление *равновесия зарядов внутри заряженного*

## § 10. Проводники в электростатическом поле

*проводника.* Сформулируем основные следствия наличия свободных зарядов в форме отдельных утверждений.

- **1. Напряжённость электрического поля в проводниках равна нулю**

Появление в любой области внутри проводника электрического поля вызывает немедленное «перетекание» свободных заряженных частиц (электронов) – электрический ток. Их пространственное перераспределение происходит ровно до тех пор, пока средняя напряжённость поля не обратится в нуль – т.е. пока поле внутри проводника не исчезнет. Отметим, что по времени всё это занимает лишь мизерные доли секунды!

- **2. Потенциал всех точек проводящего тела одинаков**

Т.е. в условиях *электростатики* проводник является эквипотенциальным телом ( $\varphi = const$ ). Откуда это следует? Вспомним о взаимосвязи напряжённости и потенциала  $\vec{E} = -\text{grad } \varphi$ . Поскольку  $\vec{E} = 0$  всюду внутри проводника, равен нулю и градиент потенциала! Это и означает его постоянство.

- **3. Весь избыточный заряд проводника распределён по его поверхности**

Иначе говоря, полный заряд любой макроскопической области внутри проводника равен нулю, т.е. внутри проводника везде  $\rho(x,y,z) = 0$ . Это утверждение легко обосновать, используя теорему Гаусса. Выберем замкнутую поверхность  $\Sigma$  в виде поверхности, охватывающей всю внутреннюю область проводника (см. рис. 10.1) за исключением тонкого приповерхностного слоя (толщиной порядка  $10^{-9}$  м или 1 нм). Поскольку в любой точке внутри проводника  $\vec{E} = 0$ , поток вектора напряжённости через выбранную поверхность также равен нулю:  $\oint_{\Sigma} E_n dS = 0$ . Но ведь согласно теореме Гаусса поток пропорционален заряду внутри поверхности. Отсюда и следует равенство

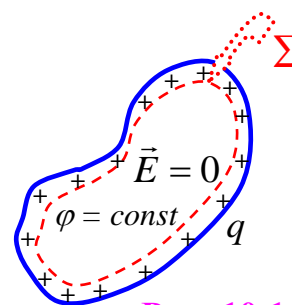


Рис. 10.1

нулю полного заряда. Конечно, это не означает отсутствия внутри проводника заряженных частиц, просто заряд частиц разного знака точно скомпенсирован!

- **4. Вне проводника силовые линии электростатического поля вблизи от его поверхности перпендикулярны к ней**

Мы ведь знаем, что линии напряжённости всегда перпендикулярны эквипотенциальным поверхностям, которые они пересекают или подходят к ним. Поверхность проводника как раз и является таковой, ведь весь проводник – эквипотенциальное тело.

- **5. Напряжённость поля заряженного проводника вблизи поверхности пропорциональна поверхностной плотности заряда**

Докажем, прежде всего, что напряжённость поля заряженного проводника вблизи его поверхности определяется поверхностной плотностью избыточного заряда  $\sigma$ . Выделим для этого малый элемент поверхности  $d\vec{S}$  заряженного проводника и применим теорему Гаусса. Поскольку элемент мал, то можно считать его плоским, а плотность заряда  $\sigma$  постоянной. Замкнутую поверхность  $\Sigma$  (см. рис. 10.2), охватывающую элемент, удобно выбрать в виде прямого цилиндра, основания которого

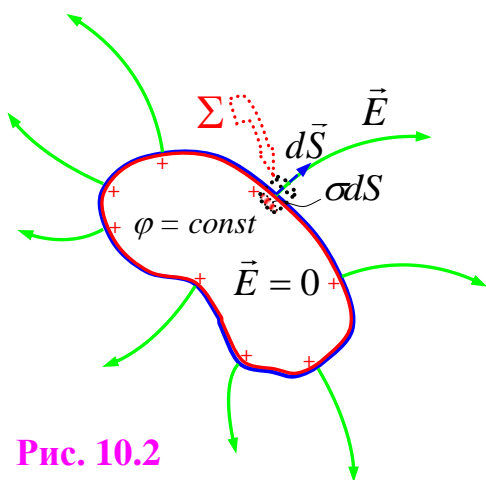


Рис. 10.2

перпендикулярны вектору  $d\vec{S}$  – одно из них располагается вне тела на малом расстоянии от поверхности, а другое внутри. Поскольку вне проводника поле перпендикулярно поверхности, а внутри его просто нет, то поток вектора напряжённости вычисляется очень легко:

$$\Phi_E = \oint_{\Sigma} E_n dS = E \cdot dS.$$

## § 10. Проводники в электростатическом поле

Полный заряд, оказавшийся внутри поверхности  $\Sigma$ , равен, очевидно, произведению поверхностной плотности заряда  $\sigma$  на площадь поверхности элемента  $d\vec{S}$ . Поэтому по теореме Гаусса можем записать:

$$E \cdot dS = \frac{1}{\varepsilon_0} \cdot \sigma \cdot dS.$$

Отсюда после сокращения на  $dS$  получаем результат:

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}. \quad (10.1)$$

Напряжённость вблизи поверхности заряженного проводника прямо пропорциональна поверхностной плотности заряда. Очевидно, эта связь имеет локальный характер и нам стоит поинтересоваться вопросом – а чем же определяется само распределение заряда по поверхности заряженного проводника?

### • 6. Плотность поверхностного заряда проводника зависит от её кривизны

Попробуем лишь качественно подбраться к прояснению этого вопроса. Для этого заменим реальное проводящее тело произвольной формы (с различной кривизной поверхности) его грубой моделью. Пусть минимальная кривизна поверхности проводника характеризуется радиусом  $R_1$ , а максимальная  $R_2$ . Тогда наша модель будет состоять из двух проводящих шаров с радиусами  $R_1$  и  $R_2$ , соединённых тонкой проводящей проволокой. Если расположить шары далеко друг от друга, то можно считать, что избыточный заряд по их поверхности распределён равномерно. Запишем систему уравнений, сопроводив их краткими пояснениями:

$$\left\{ \begin{array}{ll} \varphi_{1,2} = k \cdot \frac{q_{1,2}}{R_{1,2}} & \text{– потенциал заряженного шара;} \\ q_{1,2} = \sigma_{1,2} \cdot 4\pi R_{1,2}^2 & \text{– заряд каждого шара;} \\ \varphi_1 = \varphi_2 & \text{– потенциалы шаров одинаковы} \\ & \text{поскольку они соединены проводником.} \end{array} \right.$$

Подстановка первых двух соотношений в последнее равенство даёт:

$$k \cdot \frac{\sigma_1 \cdot 4\pi R_1^2}{R_1} = k \cdot \frac{\sigma_2 \cdot 4\pi R_2^2}{R_2}.$$

Откуда получаем после очевидных сокращений:

$$\frac{\sigma_1}{\sigma_2} = \frac{R_2}{R_1}.$$

Мы видим, что поверхностная плотность заряда оказалась обратно пропорциональна радиусу кривизны поверхности:

$$\sigma \sim \frac{1}{R}. \quad (10.2)$$

Если учесть, что напряжённость вблизи поверхности заряженного проводника прямо пропорциональна  $\sigma$ , то можно сделать вывод, что в нашем примере и напряжённость зависит от кривизны поверхности так же:

$$E \sim \frac{1}{R}. \quad (10.3)$$

### ❖ Замечания

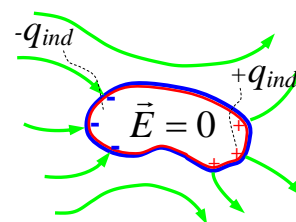
1. Подчеркнём ещё раз, что мы лишь качественно оценили зависимость, по которой можно сравнивать  $\sigma$  (а значит и  $E$ ) для участков поверхности с разной кривизной в пределах одного проводящего тела. В соотношениях (10.2) и (10.3) радиус кривизны следует считать положительной величиной для выпуклых поверхностей. Для вогнутых же поверхностей, хотя формально радиус кривизны отрицателен, поверхностная плотность заряда, а значит и поле вблизи поверхности равны нулю. Очень большой (бесконечный) радиус кривизны поверхности соответствующий плоским её участкам означает лишь меньшую поверхностную плотность заряда по сравнению с выпуклыми участками, а вовсе не обращение её в ноль.

## § 10. Проводники в электростатическом поле

2. Очень малые значения радиусов соответствуют большой кривизне поверхности и характерны для заострённых её участков. На таких участках – остриях – скапливается основная часть заряда проводника. Поэтому вблизи острия может быть реализована экстремально большая напряжённость электрического поля, усиливающая все «полевые эффекты». Например, может наблюдаться т.н. «ионный ветер». Первый в истории микроскоп, который позволил «увидеть» атомы, т.е. на котором было достигнуто предельное разрешение порядка  $10^{-10}$  м – «ионный проектор» – использовал именно эту особенность проводящего острия. Она же используется и в самых современных приборах с атомным разрешением – «туннельном сканирующем» (СТМ) и «атомно-силовом» микроскопах (АСМ).

### **10.2. Проводники во внешнем электрическом поле. (Теоремы Фарадея. Проводящие оболочки)**

Мы говорили до сих пор об электрическом поле уединённого (то есть находящегося далеко от других тел) заряженного проводника. Обсудим теперь ситуацию, когда нейтральный проводник находится в поле других заряженных тел. При внесении проводника во внешнее электрическое поле (или, наоборот, при появлении заряженных тел вблизи проводника) в нём также происходит очень быстрое перераспределение свободных заряженных частиц. Это явление называется «электростатической индукцией». В результате по поверхности оказывается распределён т.н. индуцированный заряд. Рисунок 10.3 поясняет смысл такого термина и суть самого явления. На части поверхности проводящего тела находящейся ближе к положительно заряженным внешним телам концентрируются свободные электроны. На



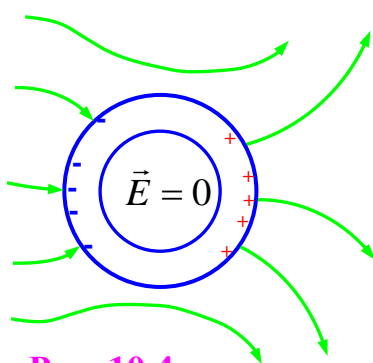
**Рис. 10.3**

более удалённых частях поверхности возникает область, обеднённая этими частицами – т.е. они оказываются положительно заряженными. Утверждения 1 – 5 предыдущего пункта остаются верными и в этом случае. С той лишь разницей, что проводник в целом не несёт теперь избыточного заряда.

Напомним, что избыточный заряд в соответствии с утверждением 3 локализован в тонком поверхностном слое. То же самое можно сказать и об индуцированных зарядах. Отсюда следует и ещё одно обстоятельство: если удалить любую внутреннюю часть проводника, это никак не отразится на равновесии зарядов в проводнике и на электрическом поле внутри и вне него. То, что получается в этом случае, называется «проводящая оболочка».

Приведём несколько положений о проводящих оболочках, которые иногда называют теоремами или, в совокупности, теоремой Фарадея.

- *а) Если внутри полости проводящей оболочки нет заряженных тел, то эта область пространства свободна от электрического поля*



**Рис. 10.4**

То есть поле, созданное заряженными телами вне оболочки, не проникает в охваченную проводником полость (см. рис. 10.4). Это является основой так называемой «электростатической защиты». Внутри полости можно помещать электрические схемы, устройства и измерительные приборы, а также располагаться и самому экспериментатору. Проводимые эксперименты в этом случае будут ограждены от влияний посторонних электрических воздействий. Дополнительного



## § 10. Проводники в электростатическом поле

доказательства этому утверждению нам уже не требуется – достаточно воспроизвести логику рассуждений об условиях равновесия зарядов в проводнике (п. 1 раздела 10.1).

А как обстоит дело, если внутрь полости поместить заряженные тела. В этом случае поле в полости, конечно, появится.

- б) *Суммарный заряд, индуцированный на внутренней поверхности полости, равен алгебраической сумме зарядов, находящихся внутри полости проводника, взятой с противоположным знаком*

Для обоснования этого утверждения достаточно применить теорему Гаусса для произвольной замкнутой поверхности  $\Sigma$ ,

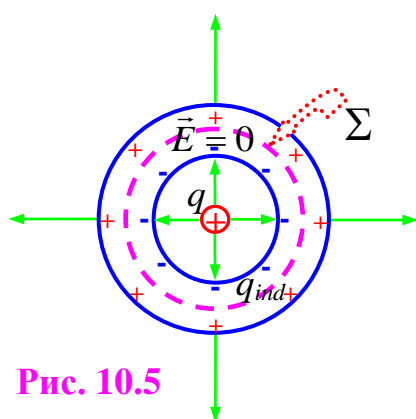


Рис. 10.5

выбранной между внутренней и внешней поверхностями проводящей оболочки – см. рис. 10.5. Поскольку в любой точке внутри проводника напряжённость электростатического поля равна нулю, то равен нулю, очевидно, и интеграл  $\oint_{\Sigma} \vec{E}_n dS$ , т.е. поток

вектора напряжённости. Следовательно, равен нулю и суммарный заряд внутри этой поверхности:

*суммарный заряд внутри полости + индуцированный на внутренней поверхности заряд = 0.*

Если ввести обозначения:

*алгебраическая сумма зарядов внутри полости –  $\sum_i q_i$ ,*

*индуцированный на внутренней поверхности заряд –  $q_{ind}$ ,*

то это соотношение можно переписать ещё раз в виде  $\sum_i q_i + q_{ind} = 0$ , откуда и следует обсуждаемое утверждение

теоремы, т.е. :

$$q_{ind} = -\sum_i q_i . \quad (10.4)$$

Из условия сохранения общего заряда проводника (оболочка не заряжена!) следует и ещё одно утверждение.

- *в) Индукционный заряд, появившийся на внешней поверхности оболочки, равен по модулю и противоположен по знаку заряду, индуцированному на внутренней её поверхности*

Иначе говоря, он в точности равен заряду, помещённому в полость. Отметим при этом, что распределение индуцированного заряда на внутренней поверхности определяется расположением зарядов внутри полости и формой поверхности. А вот распределение заряда по внешней поверхности и, соответственно, электрическое поле вне оболочки

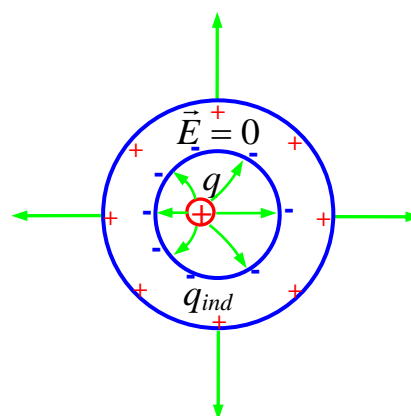


Рис. 10.6

диктуется *только её формой* и *никак не зависит* от расположения зарядов внутри полости – см. рис. 10.6. Заряды на внешней поверхности отделены от всех зарядов внутри областью пространства, в которой поле отсутствует !

### 10.3. Конденсаторы. Электроёмкость

- ➡ *(Опр.) Конденсатором называется система, состоящая из двух проводников, между которыми возникает изолированное от внешних тел электрическое поле при сообщении проводникам равных по модулю и противоположных по знаку зарядов*

Поясним, прежде всего, смысл термина «изолированное» в данном контексте. Здесь под ним понимается требование, чтобы все линии напряжённости начинались на одном проводнике и заканчивались на другом независимо от того, есть ли какие-либо иные заряженные или не заряженные тела вблизи конденсатора.

## § 10. Проводники в электростатическом поле

Такое условие может быть реализовано только в том случае, когда проводники располагаются напротив друг друга на очень малом (по сравнению с их размерами) расстоянии. В этом случае проводники обычно называют «обкладками» конденсатора. В такой ситуации поле практически не выходит за пределы малой области между обкладками. Поэтому, на него не влияет «окружение» – поле изолировано. Почему это важно мы поймём чуть ниже.

Из школьного курса вам известен т.н. плоский конденсатор. Как можно догадаться из названия, он представляет собой две плоскопараллельные металлические пластинки, разделённые тонким диэлектрическим зазором. Но существуют и другие конденсаторы, например, цилиндрические, сферические и т.д. Возможны (и на практике применяются!) и иные формы обкладок – см. рис. 10.7. Но и для них, по-прежнему, важна малость расстояния между обкладками.

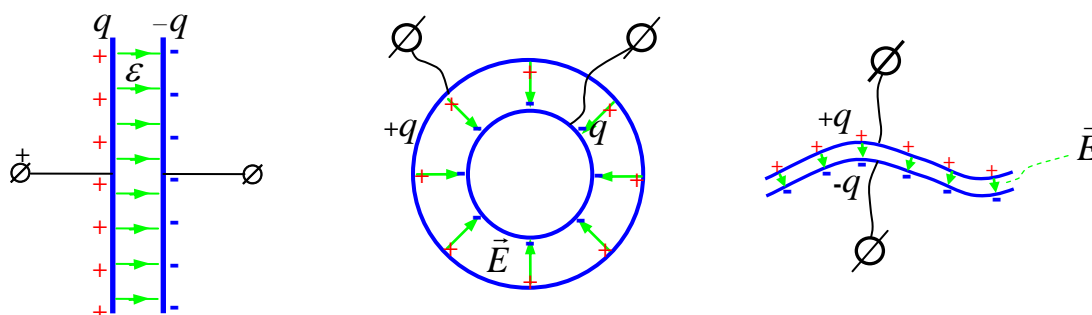


Рис. 10.7

Для чего же нужны конденсаторы и откуда такое название? Они нужны, чтобы копить (конденсировать) электрический заряд, электрическую энергию и, конечно, то, что с ними неразрывно связано – электрическое поле. Как охарактеризовать эту способность к накоплению? Способность сосудов к «накоплению» жидкости характеризуют её ёмкостью – мы говорим, например: «этот кувшин имеет ёмкость 2 литра, а эта бутылка – 0,75 литра».

При этом мы имеем в виду, что в них требуется залить соответствующий объём определённой жидкости, чтобы уровень достиг фиксированной метки. Аналогично этому вводится и понятие «электроёмкости». Мы выясняем, какой заряд (сколько «электрической жидкости») следует сообщить обкладкам конденсатора, чтобы разность потенциалов между ними стала равна единице (в системе единиц СИ это 1 В). Дадим определение и обоснуем его однозначность.

► ***(Опр.) Электроёмкостью конденсатора называется отношение модуля заряда каждой из его обкладок к разности потенциалов между ними***

В аналитической форме это определение выглядит так:

$$C = \frac{q}{\varphi_1 - \varphi_2} \quad (10.5)$$

Здесь  $\varphi_1 - \varphi_2$  – разность потенциалов между ними, причём из потенциала положительной обкладки вычитается потенциал отрицательной (т.е. эта разность – положительная величина). А обозначение  $q$  – как и было отмечено выше, означает модуль заряда каждой из обкладок конденсатора.

Теперь поясним, почему данная характеристика является однозначно определяемой и зачем нам, собственно, понадобилось требование изолированности поля внутри конденсатора. Запишем для этого, как можно рассчитать разность потенциалов между обкладками конденсатора после сообщения им равных по модулю и противоположных по знаку зарядов:

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \int_{(1)}^{(2)} E_l dl.$$

Это справедливо для любого электростатического поля и любой траектории, начинающейся на положительной (1) и заканчивающейся на отрицательной (2) обкладке конденсатора.

## § 10. Проводники в электростатическом поле

Если поле изолировано, то на него не влияют окружающие конденсатор тела, и оно полностью определяется геометрическими факторами (формой и размерами обкладок, расстоянием между ними) и зарядом обкладок. Более того, можно утверждать, что в этом случае в каждой точке поля его напряжённость пропорциональна заряду  $q$  на обкладках. Поэтому можно констатировать и такую пропорциональность:

$$\int_{(1)}^{(2)} E_l dl \sim \text{заряд на обкладках } (q).$$

Но ведь это означает, что разность потенциалов между обкладками данного конденсатора строго пропорциональна сообщённому ему заряду. Коэффициент пропорциональности как раз и есть величина обратная его электроёмкости:

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \int_{(1)}^{(2)} E_l dl = \frac{1}{C} \cdot q. \quad (10.6)$$

А отсюда следует корректность (однозначность) данного выше определения:  $C = q/(\varphi_1 - \varphi_2)$ .

От чего зависит электроёмкость конденсатора? Из только что проведённого анализа следует, что это, прежде всего, геометрические факторы:

1. размеры обкладок;
2. форма обкладок;
3. расстояние между ними.

Есть и ещё один важный фактор, влияющий на электроёмкость:

4. диэлектрическая проницаемость изолятора между обкладками –  $\varepsilon$ .

Пока что мы введём эту величину достаточно формально. Будем считать, что она равна как раз отношению электроёмкости конденсатора, заполненного однородным диэлектриком к

электроёмкости воздушного (строго говоря, незаполненного) конденсатора:

$$\varepsilon = \frac{C}{C_0}. \quad (10.7)$$

Можно ли рассчитать электроёмкость конденсатора, зная его «геометрию» и  $\varepsilon$ ? В аналитической форме результат может быть получен лишь для некоторых простейших (хотя и наиболее актуальных) случаев, характеризующихся определённой симметрией – для плоского, цилиндрического и сферического конденсаторов. Какова процедура расчёта электроёмкости конденсатора в каждом конкретном случае?

✓ 1. Прежде всего, надо определить напряжённость поля в области пространства между обкладками  $\vec{E}(\vec{r})$ . Поскольку речь идёт только о выше оговоренных типах конденсаторов, для этого удобно применить теорему Гаусса.

✓ 2. Найти разность потенциалов между обкладками можно теперь, используя соотношение  $\varphi_1 - \varphi_2 = \int_{(1)}^{(2)} E_l dl$  и выбрав для этого простейшую траекторию от положительной обкладки (1) к отрицательной (2) – вдоль силовой линии. Как мы уже с вами знаем из анализа понятия электроёмкости конденсатора (см. 10.6), результатом обязательно будет величина, пропорциональная заряду обкладок  $q$ .

✓ 3. Воспользоваться определением электроёмкости конденсатора, поделив модуль заряда обкладок  $q$  на полученный в предыдущем пункте результат для разности потенциалов  $\varphi_1 - \varphi_2$ .

## § 10. Проводники в электростатическом поле

**Пример.** Покажем, как реализовать на практике эту программу действий на примере расчёта *ёмкости плоского конденсатора*

✓ 1. Плоский конденсатор, как мы хорошо помним из школьного курса, состоит из двух плоскопараллельных проводящих пластин разделённых тонким диэлектрическим зазором (см. рис. 10.7). На первый взгляд теорема Гаусса не годна для определения напряжённости поля в области пространства между обкладками  $\vec{E}(\vec{r})$  в такой системе – ведь очевидно, что поле существенно несимметрично *по отношению к каждой из заряженных пластин*. Выбрать поверхность, соответствующую требованиям, о которых мы говорили, обсуждая применение теоремы Гаусса (см. п. 10.4), не представляется возможным. Всё, однако, меняется, если мы уберём на время одну из пластин, а оставшуюся будем считать «бесконечной плоскостью» (на практике – тонкой пластиной очень больших размеров). Процедуру применения теоремы Гаусса для этого случая проведём «по укороченной схеме» – надеемся, вы хорошо её уже освоили на наших практических занятиях.

Начнём, как обычно, с рисунка, и большую часть необходимой «работы» проиллюстрируем именно на нём – см. рис. 10.8. Поток вектора напряжённости через выбранную нами замкнутую поверхность  $\Sigma$  прямого кругового цилиндра равен:

$$\oint_{\Sigma} E_n dS = E \cdot 2S_{\text{осн.}}$$

Заряд, оказавшийся внутри этой поверхности, равен  $\sigma \cdot S_{\text{осн.}}$ . В соответствии с теоремой Гаусса приравниваем:

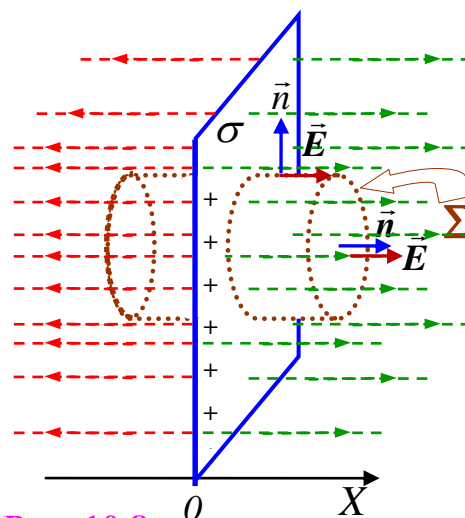


Рис. 10.8

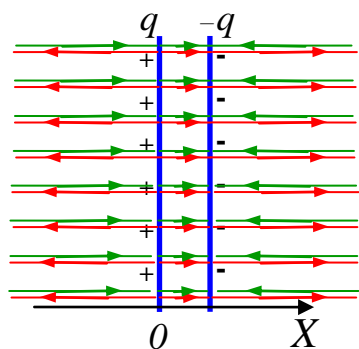
$$E \cdot 2S_{осн.} = \frac{1}{\epsilon_0} \cdot \sigma \cdot S_{осн.}$$

и получаем отсюда значение напряжённости поля:

$$E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}. \quad (10.8)$$

Как видим, напряжённость не зависит от координаты  $x$  – расстояния от заряженной плоскости, т.е. это поле является однородным. Конечно же, это соответствует лишь гипотетическому случаю «бесконечной заряженной плоскости». В реальности таких бесконечных зарядов быть не может – практически это означает, что полученный нами результат (10.8) будет справедлив на небольших расстояниях от заряженной плоскости вдали от её краёв.

Теперь вернёмся к вопросу о поле между обкладками плоского конденсатора. Оказывается это поле совсем нетрудно теперь найти, используя принцип суперпозиции. Проиллюстрируем его применение на рисунке – см. рис. 10.9.



**Рис. 10.9**

Изобразим силовые линии полей, созданных каждой из пластин разными цветами по отдельности. Видно, что между пластинами напряжённости полей совпадают по направлению, а вне этой области направлены в противоположные стороны. Поскольку заряды пластин  $q$  (а значит и плотности зарядов  $\sigma$ ) равны по модулю, то равны по модулю и напряжённости. Это означает, что поля снаружи пластин взаимно уничтожают друг друга и напряжённость результирующего поля равна нулю. Напротив, в области между пластинами направление полей совпадают и результирующая напряжённость оказывается вдвое больше, чем у поля одной пластины. Обобщим эти выводы:



## § 10. Проводники в электростатическом поле

$$\begin{cases} \vec{E}^{вне} = \vec{E}^{(+)} + \vec{E}^{(-)} = 0 & \text{— поле вне конденсатора;} \\ \vec{E}^{внутри} = \vec{E}^{(+)} + \vec{E}^{(-)} = 2\vec{E}^{(+)} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \vec{e}_+ + \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \vec{e}_+ & \text{— поле внутри конденсатора.} \end{cases}$$

Здесь для придания векторного характера нашим записям мы использовали обозначение  $\vec{e}_+$  — единичный вектор направления поля положительной пластины в области между обкладками конденсатора. Выпишем ещё раз результат уже только для модуля напряжённости:

$$\begin{cases} E^{вне} = 0 & \text{— поле вне конденсатора;} \\ E^{внутри} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} & \text{— поле внутри конденсатора.} \end{cases} \quad (10.9)$$

✓ 2. Чтобы найти разность потенциалов между обкладками плоского конденсатора выберем траекторию вдоль любой силовой линии, а значит и вдоль оси  $OX$ , (рис. 10.10) от положительной обкладки до отрицательной. Получим:

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \int_{(1)}^{(2)} E_l dl = \int_0^d E_x dx = \int_0^d \frac{\sigma}{\varepsilon_0} dx = \frac{\sigma \cdot d}{\varepsilon_0}.$$

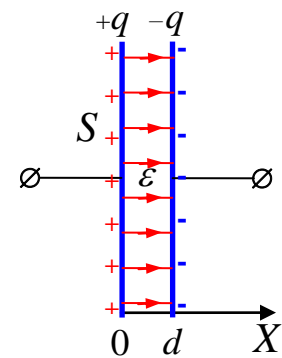


Рис. 10.10

✓ 3. Теперь остаётся только воспользоваться определением электроёмкости конденсатора и очевидным соотношением между зарядом пластин, их площадью и поверхностной плотностью заряда  $\sigma = q/S$ :

$$C_0 = \frac{q}{\varphi_1 - \varphi_2} = \frac{q}{\sigma \cdot d / \varepsilon_0} = \frac{\varepsilon_0 S \cdot q}{q \cdot d}.$$

Сократив  $q$ , мы получаем электроёмкость «воздушного» плоского конденсатора. Учтём теперь, что электроёмкость конденсатора, заполненного однородным диэлектриком, как следует из соотношения (10.7), равна электроёмкости воздушного конденсатора умноженной на диэлектрическую проницаемость  $\varepsilon$ .

Окончательно получаем хорошо знакомую со школы «формулу» для электроёмкости плоского конденсатора:

$$C = \varepsilon \cdot C_0 \Rightarrow C = \frac{\varepsilon \varepsilon_0 S}{d}. \quad (10.10)$$

где  $S$  – площадь обкладок конденсатора, а  $d$  – расстояние между ними.

#### **10.4. Энергия заряженного конденсатора. Энергия электрического поля**

Ещё со школы вам известно, чему равна энергия заряженного конденсатора («формула»  $Cu^2/2$ ). Как это обосновать? В разделе «механика» мы договорились считать энергию «запасом работы» системы. В данном случае запас этот возникает, благодаря работе по разделению зарядов между обкладками конденсатора в процессе его зарядки. Рассчитаем эту работу. Элементарная работа внешних сил по перемещению заряда  $dq$  в электрическом поле конденсатора равна:

$$dA = dq \cdot (\varphi_1 - \varphi_2) = dq \cdot \frac{q}{C},$$

(Заметим в скобках, что тут нам нет необходимости беспокоиться о правильности знаков – ясно, что такая работа внешних сил осуществляется против сил поля и, конечно, положительна) Полную работу можно найти суммированием элементарных работ, т.е. интегрированием:

$$A = \int_0^Q \frac{q}{C} dq = \frac{Q^2}{2C}.$$

Здесь мы временно использовали обозначение  $Q$  для предельного значения заряда конденсатора из соображений математической корректности записи, и чтобы отличать его от обозначения «промежуточного» («текущего») значения заряда  $0 \leq q \leq Q$ . Эта работа и определяет энергию «запасённую» конденсатором. Используя ещё раз связь заряда конденсатора с разностью

---

<sup>\*)</sup> Мы использовали определение электроёмкости конденсатора  $C = q/(\varphi_1 - \varphi_2)$ .

## § 10. Проводники в электростатическом поле

потенциалов  $(\varphi_1 - \varphi_2)$  между ними  $Q = C \cdot (\varphi_1 - \varphi_2)$ , можно записать энергию заряженного конденсатора в виде:

$$W_e = \frac{C(\varphi_1 - \varphi_2)^2}{2}, \quad \text{или} \quad W_e = \frac{Cu^2}{2} \quad (10.11)$$

В последнем равенстве мы для большей компактности заменили обозначение  $(\varphi_1 - \varphi_2)$  на  $u$ . Эту величину часто называют ещё «напряжением» на конденсаторе. А вот саму энергию мы обозначили на этот раз  $W_e$ . Почему? С чем следует ассоциировать эту энергию? По нашим современным представлениям – это *энергия электрического поля*.\*) Сегодня мы можем утверждать это достаточно определённо, поскольку нам хорошо известны случаи, когда само поле «отделяется» от заряженных тел и, распространяясь в пространстве в виде электромагнитных волн, переносит энергию на большие расстояния, «забывая» об источнике.

Раз энергия присуща полю, попробуем выразить её через *характеристику самого этого поля – его напряжённость*. Хотя результат (10.11) получен для любого конденсатора, используем его для электрического поля внутри *плоского конденсатора*. Во-первых, мы знаем, что это поле однородно, а значит, существует очень простая связь разности потенциалов и напряжённости поля:  $\varphi_1 - \varphi_2 = E \cdot d$ . Кроме того, для такого случая мы знаем выражение для ёмкости (10.10). Получим:

$$W_e = \frac{Cu^2}{2} = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 S}{d} \cdot \frac{(Ed)^2}{2} = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 E^2}{2} \cdot Sd = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 E^2}{2} \cdot V, \quad (10.12)$$

где  $V$  – объём области между обкладками конденсатора.

Однородность поля внутри плоского конденсатора позволяет, используя полученный только что результат, легко выразить ещё

\*) Индекс «e» означает как раз, что речь идёт о поле электрическом.

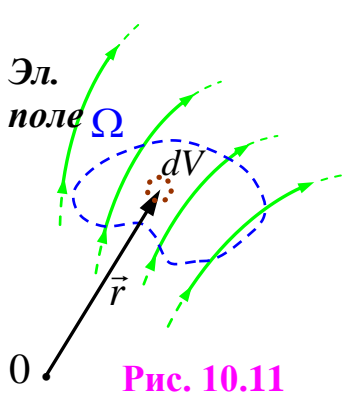
одну весьма полезную характеристику – так называемую *объёмную плотность энергии* электрического поля. Чуть позже мы дадим более точное определение этой величины. Пока же, для однородного поля, это просто отношение энергии поля  $W_e$  к объёму той области пространства  $V$ , в которой есть это поле:

$$w_e = \frac{W_e}{V} \Rightarrow w_e = \frac{\epsilon\epsilon_0 E^2}{2} \quad (10.13)$$

Важно, что плотность энергии нам удалось выразить через основную характеристику электрического поля. Важно ещё и то, что, хотя мы получили результат (10.13) для поля однородного, он остаётся справедливым и в случае неоднородного поля. Объёмная плотность энергии – локальная характеристика поля, т.е. она относится к любой малой области пространства, в пределах которой модуль напряжённости поля равен  $E$ .

Уточним понятие объёмной плотности энергии. Для общего случая выделим малый элемент неоднородного поля объёмом  $dV$ , положение которого можно задать, как обычно, радиус вектором  $\vec{r}$  или координатами  $\{x,y,z\}$  – рис. 10.11.

► **(Опр.)** *Объёмной плотностью энергии называется величина*



$$w_e = \frac{dW_e}{dV}, \quad (10.14)$$

где  $dW_e$  – энергия, сосредоточенная в этой малой области поля. Если известна напряжённость поля как функцию координат точек электрического поля  $E(\vec{r})$ , можно рассчитать полную энергию этого поля в той

или иной области пространства  $\Omega$  конечных размеров (см. рис. 10.11):

\*) Иногда говорят для краткости, что это «энергия, приходящаяся на единицу объёма пространства, где есть электрическое поле».

## § 10. Проводники в электростатическом поле

$$w_e = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 E^2(\vec{r})}{2} \Rightarrow W_e = \frac{\varepsilon_0\varepsilon}{2} \int_{\Omega} E^2(\vec{r})dV. \quad (10.15)$$

Интегрирование (суммирование!) ведётся по всей области пространства  $\Omega$ , для которой вычисляется энергия поля. Здесь мы опять сталкиваемся с проблемой вычисления объёмного интеграла, который в ряде актуальных (практически важных) случаев может быть сведён к обычному определённомu. Как это делается мы, как обычно, будем отрабатывать на практических занятиях.

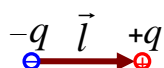
Следует заметить, что соотношения (10.15) записаны для диэлектрической среды с однородными электрическими свойствами, т.е. для случая  $\varepsilon = const$ . В противном случае диэлектрическая проницаемость остаётся под интегралом. Отметим, кроме того, что они остаются справедливыми и в случае переменного во времени электрического поля, например, электромагнитной волны (в частности, света)!

## § 11. Электрическое поле в диэлектриках

### 11.1. Электрический диполь

Прежде чем перейти к разговору о диэлектриках остановимся кратко на поведении так называемых «диполей» в электрическом поле. Ведь именно электрические диполи, как мы увидим ниже, играют определяющую роль в анализе поведения электрического поля в диэлектрических средах.

➡ **(Опр.)** *Электрическим диполем называется система, состоящая из двух одинаковых по модулю и противоположных по знаку точечных зарядов  $q$ , находящихся на расстоянии  $l$  друг от друга*



Основной характеристикой диполя является его дипольный момент:

Рис. 11.1

$$\vec{p} = q \cdot \vec{l}, \quad (11.1)$$

где вектор  $\vec{l}$ , проведённый от отрицательного заряда к положительному, называется «плечом» диполя (см. рис. 11.1).

Электрические системы, которые можно описать моделью диполя, довольно многообразны. На макроскопическом уровне это могут быть небольшие наэлектризованные диэлектрические тела, например, такие как используемые при «визуализации» структуры электрического поля – при построении картины силовых линий (см. п. 8.4). Продолговатое металлическое тело, к

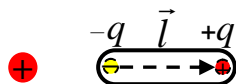


Рис. 11.2

которому поднесли заряд – см. рис. 11.2<sup>\*)</sup>. Нас же в дальнейшем в основном будут интересовать диполи микроскопических размеров. Будем называть их «элементарными диполями», модель

которых часто применяется для описания электрического поведения отдельных атомов или молекул вещества. Действительно, хотя такие, например, молекулы как  $H_2O$ ,  $HCl$  и  $NH_3$ , как и любые

<sup>\*)</sup> Это хорошо известный случай «электростатической индукции» – электризации через влияние.

## § 11. Электрическое поле в диэлектриках

молекулы в целом электронейтральны, положительные и отрицательные заряды в них пространственно смещены друг относительно друга. Эти молекулы обладают значительным дипольным моментом и называются «полярные». Впоследствии мы увидим, что и другие, т.н. «неполярные», молекулы способны приобретать дипольный момент при определённых условиях. Чтобы перейти к обсуждению свойств электрического поля в диэлектрических средах сейчас наша задача понять, как ведёт себя электрический диполь во внешнем электрическом поле<sup>\*)</sup>.

• **Однородное поле.** Начнём со случая однородного поля. Поскольку напряжённость такого поля одинакова во всех точках пространства, действующие на точечные заряды диполя  $q$  и  $-q$  силы  $\vec{F}^{(+)}$  и  $\vec{F}^{(-)}$  равны по величине и противоположны по направлению – результирующая сила равна нулю. Однако отличен от нуля **момент** этих сил, если только диполь не располагается вдоль силовых линий поля ( $\alpha \neq 0$ , см. рис. 11.3)! Определим этот момент. Для начала запишем, чему равен модуль момента сил относительно оси, перпендикулярной плоскости рисунка и проходящей через отрицательный заряд диполя:

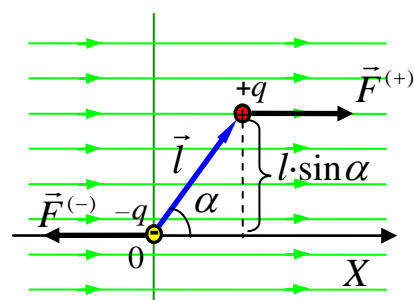


Рис. 11.3

$$N = \underbrace{F^{(+)}}_{\text{сила}} \cdot \underbrace{l \sin \alpha}_{\text{плечо}} = (qE) \cdot (l \sin \alpha) = pE \sin \alpha.$$

Можно показать, что этот результат не зависит от положения такой оси, перпендикулярной плоскости рисунка. А можно и написать, чему равен вектор момента силы:

$$\vec{N} = [\vec{p} \cdot \vec{E}], \quad (11.2)$$

<sup>\*)</sup> Собственное поле одиночного электрического диполя мы подробно обсудим на семинарских занятиях.

Итак, мы видим, что однородное электрическое поле оказывает на диполь ориентирующее действие, стремясь его повернуть, «выстраивая» вектор  $\vec{p}$  по направлению поля.

• **Неоднородное поле.** В неоднородном поле *помимо вращающего момента* и сила, действующая на диполь, уже не равна нулю. Чтобы найти эту силу будем для начала считать, что поле изменяется лишь в одном направлении. Выберем в этом направлении координатную ось  $OX$  (см. рис. 11.4). Сложим проекции сил, действующих на каждый из точечных зарядов диполя:

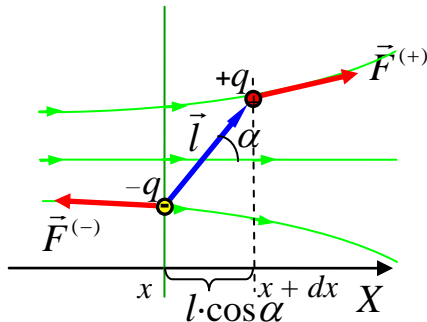


Рис. 11.4

$$F_x = F^{(+)} - F^{(-)} = qE^{(+)} - qE^{(-)} = q \cdot dE = q \cdot \frac{\partial E}{\partial x} dx.$$

Здесь  $E^{(+)}$  и  $E^{(-)}$  – модуль напряжённости поля в месте нахождения положительного  $+q$  и отрицательного  $-q$  зарядов диполя соответственно. Глядя на рисунок, легко заметить, что один заряд диполя смещён относительно другого вдоль оси  $OX$  на расстояние  $dx$ , равное  $l \cdot \cos \alpha$ . Поэтому проекцию результирующей силы, действующей на диполь можно записать также в виде:

$$F_x = q \cdot \frac{\partial E}{\partial x} l \cos \alpha = ql \cdot \frac{\partial E}{\partial x} \cdot \cos \alpha = p \cdot \frac{\partial E}{\partial x} \cdot \cos \alpha.$$

Знак проекции  $F_x$  силы определяется, таким образом, знаком производной модуля напряжённости по координате и ориентацией вектора напряжённости относительно поля (углом  $\alpha$ ):

$$F_x = p \cdot \frac{\partial E}{\partial x} \cdot \cos \alpha. \quad (11.3)$$

Пусть угол  $\alpha$  не превышает  $90^\circ$ . Забегая несколько вперёд, скажем, что это соответствует ориентации большинства элементарных диполей поляризованной диэлектрической среды,



## § 11. Электрическое поле в диэлектриках

поскольку поле оказывает на диполи ориентирующее воздействие – мы будем говорить, что дипольные микрочастицы среды сориентированы «преимущественно по полю». Если поле убывает в направлении оси  $OX$  (этот случай на рис. 11.4), то, как нетрудно сообразить, знак проекции  $F_x$  отрицателен (ведь «приращение»  $\Delta E$  в этом направлении отрицательно). Это значит, что отрицателен и знак проекции силы – т.е. сила направлена против оси  $OX$ . Наоборот, если поле вдоль оси  $OX$  нарастает, то знак проекции положителен. ***В обоих случаях диполи втягиваются в область поля с большей напряжённостью!***

В общем случае поле может изменяться при смещении в произвольном направлении, а его приращение равно

$$d\vec{E} = \left( \frac{\partial E}{\partial x} dx \right) \cdot \vec{e}_x + \left( \frac{\partial E}{\partial y} dy \right) \cdot \vec{e}_y + \left( \frac{\partial E}{\partial z} dz \right) \cdot \vec{e}_z.$$

А результат для действующей на диполь силы можно обобщить так:

$$\vec{F} = \left( \frac{\partial E}{\partial x} \cdot p_x \right) \cdot \vec{e}_x + \left( \frac{\partial E}{\partial y} \cdot p_y \right) \cdot \vec{e}_y + \left( \frac{\partial E}{\partial z} \cdot p_z \right) \cdot \vec{e}_z. \quad (11.4)$$

$$\vec{F} = \frac{\partial \vec{E}}{\partial x} \cdot p_x + \frac{\partial \vec{E}}{\partial y} \cdot p_y + \frac{\partial \vec{E}}{\partial z} \cdot p_z. \quad (11.4,a)$$

Хотя его вид существенно усложнился, общий вывод остаётся тем же: ***диполи ориентируются вдоль силовых линий и втягиваются в область поля с большей напряжённостью.*** Именно так ведёт себя жидкий парамагнитный диэлектрик, например, керосин – он втягивается в зазор между пластинами заряженного конденсатора.

- ***Энергия диполя в электрическом поле***

Какова энергия взаимодействия диполя с электрическим полем? Проще всего подсчитать эту энергию, используя наше

знание энергии взаимодействия с полем точечных зарядов, из которых состоит диполь:

$$W = q \cdot \varphi^{(+)} - q \cdot \varphi^{(-)} = q \cdot (\varphi^{(+)} - \varphi^{(-)}),^{*})$$

где  $\varphi^{(+)}$  и  $\varphi^{(-)}$  – потенциалы тех точек поля, где располагаются положительный и отрицательный точечные заряды диполя соответственно. Пусть, опять-таки, поле изменяется лишь в одном направлении – вдоль оси  $OX$ . Разность потенциалов в скобках, с учётом того, что мы имеем дело с «элементарным» диполем, может быть представлена так:

$$\varphi^{(+)} - \varphi^{(-)} = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \cdot dx = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \cdot l \cos \alpha.$$

Учтём теперь связь между напряжённостью и потенциалом:

$E_x = -\frac{\partial \varphi}{\partial x}$ . Энергию диполя можно записать тогда в виде:

$$W = -p \cdot E \cdot \cos \alpha. \quad (11.5)$$

Хотя мы предполагали, что поле меняется лишь в одном направлении ( $OX$ ), полученный результат справедлив для любого электрического поля. В этом случае  $\alpha$  – угол между векторами  $\vec{p}$  и  $\vec{E}$ , а выражение для потенциальной энергии удобно представить в виде скалярного произведения этих векторов:  $W = -(\vec{p}, \vec{E})$ . Обратите внимание, что полученный нами ранее результат (11.3) для силы, действующей на элементарный диполь со стороны неоднородного электрического поля, легко может быть получен теперь и с использованием известного ещё из механики общего соотношения между силой и потенциальной энергией:  $\vec{F} = -grad(W)$ . Для отдельной проекции силы:

$$F_x = -\frac{\partial W}{\partial x} = p_x \cdot \frac{\partial E}{\partial x} = p \cdot \frac{\partial E}{\partial x} \cdot \cos \alpha.$$

---

<sup>\*)</sup> Напомним, что  $q$  – это модуль зарядов, входящих в состав диполя, т.е. величина положительная

### 11.2. Диэлектрики

Мы уже знаем кое-что об электрическом поле в отсутствии какой-либо среды между заряженными телами (в вакууме). Почти ничего не изменится и при наличии разреженного газа – воздуха, например. Кроме того, мы выяснили, что в проводящие тела и внутрь проводящих оболочек электростатическое поле извне не проникает ( $\vec{E} = 0$ ). А как обстоит дело при наличии достаточно плотной диэлектрической среды?

Вспомним, что диэлектриками называют вещества, не проводящие электрический ток («изоляторы»), т.к. в них нет свободных электрически заряженных частиц. Однако в них есть, конечно, заряженные частицы, входящие в состав атомов и молекул – т.н. «связанные заряды». Под действием внешнего электрического поля такие заряды могут смещаться на расстояния не более  $10^{-9}$  м (т.е. одного нанометра). Говорят, что в результате диэлектрик поляризуется – его суммарный дипольный момент становится отличным от нуля:

$$\sum_i \vec{p}_i^m \neq 0.$$

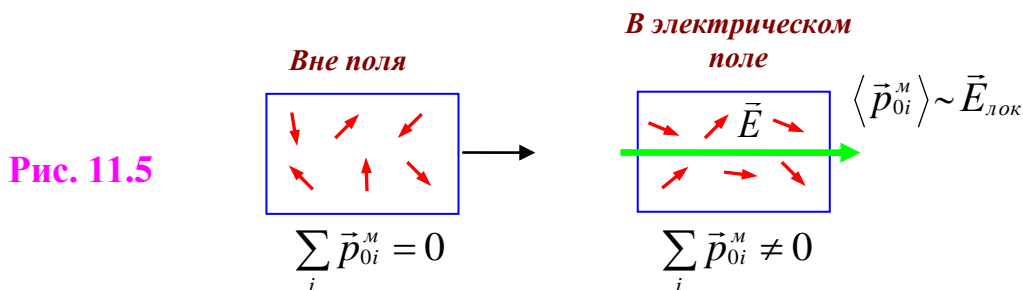
Здесь  $\vec{p}_i^m$  – дипольный момент каждой отдельной молекулы, о чём сигнализирует верхний индекс «*m*» в нашем обозначении. Разберёмся поподробнее в этом процессе – «поляризация диэлектриков».

### 11.3. Понятие о механизмах поляризации диэлектриков

Договоримся, что в дальнейшем, прежде всего, мы будем обсуждать лишь газообразные и жидкие (или твёрдые, но аморфные) непроводящие среды, т.е. *однородные и изотропные диэлектрики*. Такие вещества могут состоять как из полярных, так и из неполярных молекул. В различных диэлектриках механизмы поляризации также различны.

### 1. Ориентационная (дипольная) поляризация

Такой механизм характерен для среды, полярные молекулы которой обладают дипольным моментом  $\vec{p}_{0i}^M$  и в отсутствии внешнего электрического поля. Например, это молекулы  $H_2O$ ,  $HCl$ ,  $NH_3$ , ... В отсутствии поля ориентация т.н. «жёстких» диполей случайна вследствие хаотичности теплового движения. Однако, электрическое поле, как мы знаем (см. п. 11.1), оказывает на элементарные диполи ориентирующее воздействие – появляется некоторая преимущественная ориентация диполей в направлении электрического поля (см. рис. 11.5)! В результате



средний дипольный момент каждой макроскопической области вещества оказывается отличным от нуля. *Опыт показывает, что он пропорционален напряжённости электрического поля, действующего на молекулы.*

#### ❖ **Замечание**

Расчёты по законам статистической физики позволяют установить и точное количественное соотношение:

$$\langle \vec{p} \rangle = \frac{p_0^2}{3kT} \cdot \vec{E}^* \quad (11.6)$$

Такой результат качественно понятен и без расчётов. Ведь, чем больше напряжённость поля, тем больше, очевидно, и его ориентирующее воздействие – т.е. ориентация диполей вдоль вектора

<sup>\*)</sup> Обозначению  $\vec{E}$  здесь и далее соответствует напряжённость т.н. «локального электрического поля» в месте расположения данной молекулы ( $\vec{E}_{лок}$ ). Чуть позже мы ещё уточним это понятие.

## § 11. Электрическое поле в диэлектриках

$\vec{E}$ . С другой стороны нетрудно понять и то, что результат от поляризующего воздействия поля тем меньше, чем выше температура – т.е. разупорядочение, хаос теплового движения  $\left( \text{см. } \frac{p_0^2}{3kT} \right)!$

### 2. Электронная поляризация (поляризация смещения)

Вещество может состоять и из неполярных молекул, например,  $Ar$ ,  $H_2$ ,  $N_2$ ,  $O_2$ ,  $CCl_4$ , ... . В отсутствии внешнего электрического поля у таких молекул отсутствует дипольный момент. Он появляется лишь под действием поля, благодаря смещению электронной плотности в молекулах вдоль поля (см. рис. 11.6). Обычно величина такого смещения в не слишком больших полях ( $< 10^9$  В/м) не превышает 1 нм и оказывается пропорциональна величине напряжённости этого поля ( $l \sim E$  – аналогично удлинению пружины в случае выполнения закона Гука). Отсюда ещё один термин для данного типа поляризации – «упругая» поляризация. Наведённые дипольные моменты молекул малы, но зато строго параллельны напряжённости внешнего поля  $\vec{p}^m \parallel \vec{E}$  у всех молекул:

$$\vec{p}^m = \alpha \varepsilon_0 \cdot \vec{E}, \quad (11.7)$$

Коэффициент  $\alpha$  в этом соотношении называется *поляризуемостью* молекулы,  $\varepsilon_0$  – как и ранее, электрическая постоянная. Поляризуемость молекулы не зависит от напряжённости поля и не зависит от температуры!

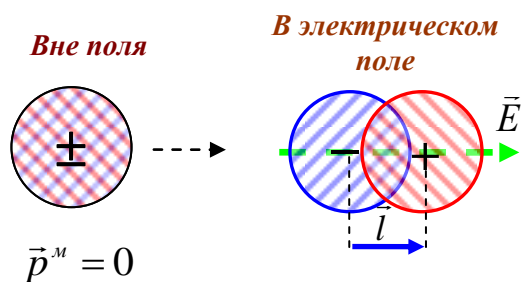


Рис. 11.6  $\vec{p}^m = q \cdot \vec{l}$

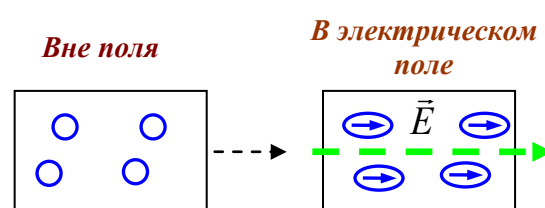


Рис. 11.7

❖ **Замечание**

Существует и ещё один механизм поляризации – ионная решёточная. Как ясно из самого названия, такая поляризация характерна для кристаллов – твёрдых тел ( $NaCl$ ,  $CsCl$ , ...). Для них возможна анизотропия электрических свойств и рассмотрение вопроса сильно усложняется. Мы же, как и договаривались, ограничимся рассмотрением жидких и газообразных изотропных диэлектрических сред.

### 11.3. Вектор поляризации среды

Мы обсудили механизмы поляризации среды на «микро-» уровне. А как характеризовать результат этих процессов на «макро-» уровне? Для этого, обычно, используется **вектор поляризации среды**:

➡ (Опр.)

$$\vec{P}(\vec{r}) = \frac{\sum_i \vec{p}_i^m}{\Delta V} \quad (11.8)$$

Здесь  $\Delta V$  – объём «физически бесконечно малого элемента» среды, включающего в себя точку, пространственное положение которой определено радиус-вектором  $\vec{r}$ . Таким образом, вектор поляризации – локальная характеристика диэлектрической среды и, вообще говоря, может быть разным в разных точках диэлектрика –  $\vec{P} = \vec{P}(\vec{r})$ ! Отталкиваясь от определения, говорят также, что вектор поляризации – это «дипольный момент единицы объёма» поляризованной среды. С учётом вышесказанного, следует помнить об условности такой терминологии.

Независимо от механизма поляризации изотропных диэлектриков вектор поляризации оказывается пропорциональным вектору напряжённости внешнего поля:

---

<sup>\*)</sup> Другое название этой характеристики (вектора  $\vec{P}$ ) – «поляризованность» диэлектрика.

## § 11. Электрическое поле в диэлектриках

$$\vec{P} = \kappa \cdot \varepsilon_0 \vec{E}, \quad (11.9)$$

Коэффициент  $\kappa$  называется «*диэлектрической восприимчивостью*». Это безразмерная величина, не зависящая от величины напряжённости поля  $E$ .

В общем случае, если среда состоит как из полярных, так и из неполярных молекул теперь нетрудно записать выражение для диэлектрической восприимчивости  $\kappa$ :

$$\kappa = \frac{1}{\varepsilon_0} \left( \frac{p_0^2}{3kT} \cdot n_{пол} + \alpha \varepsilon_0 \cdot n_{н.п.} \right). \quad (11.10)$$

Здесь  $n_{пол}$  и  $n_{н.п.}$  – концентрации полярных и неполярных молекул.

### 11.4. Локальное поле. Сторонние и связанные заряды

Уточним теперь, что это за напряжённость поля  $\vec{E}$  входит в равенство (11.9)? Ясно, что это поле в диэлектрике. Оно складывается из поля связанных зарядов отдельных молекул и зарядов, не входящих в состав молекул в объёме вещества. Это избыточные заряды на поверхности диэлектрика (например, возникшие при электризации трением), либо заряды вне диэлектрика. Такие заряды называют «сторонними». В результате напряжённость микроскопического (или «истинного») поля равна:

$$\vec{E}_{микро} = \vec{E}_{стор} + \vec{E}_{связ}. \quad (11.11)$$

Однако на микроскопическом масштабе (в пределах одного атома или молекулы) это поле значительно изменяется вблизи ядер и электронов атомов и молекул. Меняется оно и с течением времени (вследствие движения микрочастиц). В любых опытах (на макроскопическом уровне) проявляют себя лишь пространственно усреднённые (на масштабах больше атомного) поля:

$$\vec{E} = \vec{E}_{макро} \equiv \langle \vec{E}_{стор} + \vec{E}_{связ} \rangle. \quad (11.12)$$

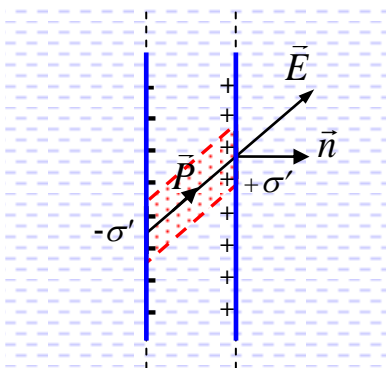
Если обозначить напряжённость поля «сторонних» (внешних) зарядов  $\vec{E}_0$ , а напряжённость усреднённого поля «связанных»  $\vec{E}' = \langle \vec{E}_{связ} \rangle$ , то получим:

$$\vec{E} = \vec{E}_0 + \vec{E}' . \quad (11.13)$$

Именно эта характеристика поля и должна использоваться во всех вышеприведённых соотношениях этого пункта (11.6 – 11.9). Везде далее под  $\vec{E}$  мы будем понимать также усреднённое поле, определяемое равенством (11.13).

### 11.5. Поверхностная плотность связанных зарядов

Зная вектор поляризации среды  $\vec{P}$ , можно определить поляризационные заряды и наоборот. Мысленно выделим очень тонкий слой внутри диэлектрической среды. В некоторой части этого слоя (см. рис. 11.8) напряжённость электрического поля можно считать постоянной и, следовательно,  $\vec{P} \sim \vec{E}$ . Выделим также мысленно тонкий параллелепипед (или косо́й цилиндр) вдоль векторов  $\vec{E}$  и  $\vec{P}$ . На его основаниях связанные заряды характеризуются плотностью  $-\sigma'$  и  $+\sigma'$ . Выясним, как они связаны



**Рис. 11.8**

с  $\vec{E}$  и  $\vec{P}$ . Очевидно, величина дипольного момента выделенного элемента равна

$$P \cdot \Delta V = P \cdot \Delta S l \cdot \cos \alpha . \quad (11.14)$$

Её можно также вычислить, умножая заряд на торцах элемента на его длину  $P \cdot \Delta V = q \cdot l$ , или в виде  $P \cdot \Delta V = \sigma' \Delta S \cdot l$ . Тогда равенство (11.14) приобретает вид:

$$\sigma' \Delta S \cdot l = P \cdot \Delta S l \cos \alpha . \quad (11.14,a)$$

Отсюда следует:

$$\sigma' = P \cdot \cos \alpha \quad \text{или} \quad \sigma' = P_n . \quad (11.15)$$



## § 11. Электрическое поле в диэлектриках

Т.о. поверхностная плотность связанных зарядов равна нормальной составляющей вектора поляризации. Учитывая связь векторов поляризации и напряжённости (11.9), запишем также:

$$\sigma' = \kappa \varepsilon_0 \cdot E_n, \quad (11.16)$$

Там, где  $E_n > 0$  (т.е. линии напряжённости выходят из диэлектрика)  $\sigma' > 0$ . Наоборот, там, где  $E_n < 0$  (линии напряжённости входят в диэлектрик)  $\sigma' < 0$ .

### 11.6. Законы электрического поля в изотропных диэлектрических средах

#### а) Диэлектрик занимает всю область однородного поля

Такая ситуация может быть реализована, например, между обкладками заряженного плоского конденсатора. Напряжённость поля, как мы выяснили ранее, равна сумме напряжённостей полей сторонних и связанных зарядов  $\vec{E} = \vec{E}_0 + \vec{E}'$ . Сторонние заряды распределены равномерно по поверхности пластин-обкладок конденсатора, а нескомпенсированные связанные – по

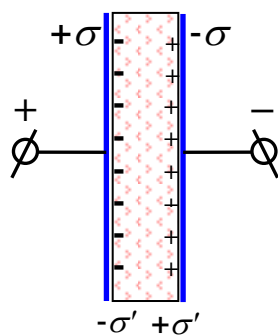


Рис. 11.9

поверхностям диэлектрического слоя, примыкающим к ним (см. рис. 11.9). Легко видеть, что поле связанных зарядов направлено при этом навстречу полю сторонних зарядов, поэтому модуль напряжённости результирующего поля равен:

$$E = E_0 - E'. \quad (11.17)$$

Каждая из величин  $E_0$  и  $E'$  определяется, как известно, соответствующей поверхностной плотностью заряда (вспомним выражение для напряжённости поля внутри плоского конденсатора) и равна:

$$E_0 = \frac{\sigma}{\epsilon_0}; \quad E' = \frac{\sigma'}{\epsilon_0}. \quad (11.18)$$

Кроме того  $\sigma' = \kappa\epsilon_0 \cdot E_n$  (см. 11.16). В рассматриваемом случае  $E_n = E$ , следовательно

$$E = E_0 - \frac{\kappa\epsilon_0 \cdot E}{\epsilon_0} = E_0 - \kappa \cdot E, \quad (11.19)$$

Откуда, наконец, получаем очень важный результат:

$$E = \frac{E_0}{1 + \kappa} = \frac{E_0}{\epsilon}. \quad (11.20)$$

Величина  $1 + \kappa = \epsilon$  называется *диэлектрической проницаемостью среды*. Она показывает, во сколько раз ослабляет поле присутствие диэлектрической среды. Мы уже использовали это ранее.

**б) Поле точечного заряда** (а также сферически симметрично распределённого заряда) **в диэлектрической среде**

Будем предполагать, что однородная и изотропная диэлектрическая среда заполняет всё пространство, окружающее

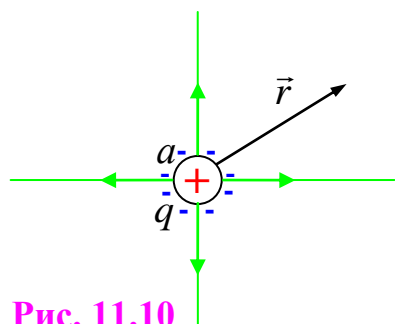


Рис. 11.10

заряженный шарик радиуса  $a$ . Поле в этом случае, радиально симметрично и складывается из двух противоположно направленных –  $\vec{E}_0$  и  $\vec{E}'$ . Поэтому

$$E(r) = E_0(r) - E'; \quad \text{или}$$

$$E = E_0 - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\sigma' \cdot 4\pi a^2}{r^2}, \quad (11.21)$$

где  $\sigma' = \kappa\epsilon_0 \cdot E(a)$ . Кроме того, так как густота линий напряжённости уменьшается при удалении от источника обратно пропорционально квадрату расстояния, можно утверждать, что

$$\frac{E(a)}{E(r)} = \frac{r^2}{a^2}.$$

Используя это, равенство (11.21) можно преобразовать к виду:

## § 11. Электрическое поле в диэлектриках

---

$$E(r) = E_0 - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\kappa\epsilon_0 E(r)r^2 \cdot 4\pi a^2}{r^2 \cdot a^2}.$$

После очевидных сокращений получаем:

$$E(r) = E_0(r) - \kappa \cdot E(r). \quad (11.19,a)$$

И мы опять приходим к соотношениям (11.20). Учитывая сонаправленность векторов  $\vec{E}$  и  $\vec{E}_0$ , можно записать также и векторные равенства:

$$\vec{E} = \frac{\vec{E}_0}{1 + \kappa} = \frac{\vec{E}_0}{\epsilon}, \quad \vec{E}(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{\epsilon r^2} \cdot \frac{\vec{r}}{r}. \quad (11.22)$$

Потенциал поля также, очевидно, уменьшается в  $\epsilon$  раз:

$$\varphi(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{\epsilon r} \cdot \frac{\vec{r}}{r}. \quad (11.23)$$

**в) Обобщение.** В тех случаях, когда однородный изотропный диэлектрик занимает всю область пространства, где есть электрическое поле, присутствие диэлектрика сводится к уменьшению поля (т.е.  $\vec{E}$  и  $\varphi$ ) в  $\epsilon$  раз. Соответственно уменьшаются и силы взаимодействия заряженных тел.

### ❖ Замечания

1) Последнее утверждение справедливо и в тех случаях, когда граница диэлектрика совпадает с эквипотенциальной поверхностью поля сторонних зарядов.

2) Вне нашего анализа остались твёрдые диэлектрики, сегнетоэлектрики и большие электрические поля (сравнимые с внутриатомными  $E \geq 10^{11}$  В/м).

3) По экспериментальным температурным зависимостям  $\epsilon = \epsilon(T)$  можно делать вывод о преобладании того или иного механизма поляризации, определять дипольный момент полярных молекул и даже их размеры.

## § 12. Постоянный электрический ток

### 12.1. Сила тока и плотность тока

➔ **(Опр.)** *Электрический ток – это упорядоченное движение заряженных частиц (тел) в веществе или в вакууме.*

Частицы, ответственные за перенос заряда, называются «носителями тока». В металлах – это свободные электроны, в электролитах – ионы, в газах – электроны и ионы, в полупроводниках – электроны и дырки. За направление тока со времён Б. Франклина принято считать направление перетекания положительного заряда. Линии, касательные к которым совпадают со скоростями  $\vec{v}_{др}$  направленного движения положительных носителей тока, называют «линиями тока». Здесь  $\vec{v}_{др}$  – так называемая «дрейфовая скорость»<sup>\*)</sup>. Напомним, что дрейфовая скорость много меньше, чем скорость их беспорядочного (хаотичного) теплового движения.

Количественными характеристиками электрического тока являются *сила тока и плотность тока*.

➔ **(Опр.)** *Силой тока  $I$  называется отношение заряда  $dq$ , переносимого через некоторую поверхность  $\Sigma$  за малый промежуток времени  $dt$ , к величине этого промежутка:<sup>\*\*)</sup>*

$$I = \left. \frac{dq}{dt} \right|_{\Sigma} \quad (12.1)$$

Как видим из определения, сила тока – величина скалярная. Электрический ток называется *постоянным*, если сила тока и его направление не изменяются с течением времени. Для

---

<sup>\*)</sup> По аналогии с дрейфом, например, льда в океане, который несет ветер и течение – заряженные частицы «сносит» электрическое поле.

<sup>\*\*)</sup> Иногда говорят так: «плотность тока равна заряду, переносимому в единицу времени через единичную поверхность, перпендикулярную к току».

## § 12. Постоянный ток

постоянного тока можно пользоваться «школьным» определением

$I = \frac{\Delta q}{\Delta t}$  и промежуток времени  $\Delta t$  может быть любым.

Если ток протекает по тонким проводам, то поверхность  $\Sigma$  в определении (12.1) – это просто поперечное сечение провода. Однако ток может течь и по проводящей среде произвольной формы – вспомните, например, ток в «электролитической ванне». При этом перенос заряда через поверхность  $\Sigma$  может быть распределён неравномерно по этой поверхности. Для более детальной характеристики используют плотность тока  $\vec{j}$ .

➔ **(Опр.)** Плотность электрического тока  $\vec{j}$  – вектор, направление которого совпадает с направлением упорядоченного движения  $\vec{v}_{\text{др}}$  положительных носителей тока. Модуль этого вектора равен отношению силы тока через малый элемент поверхности, перпендикулярный току к площади этого элемента\*):

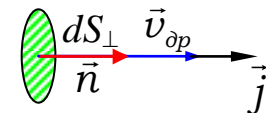


Рис. 12.1

$$j = \frac{dI}{dS_{\perp}} \quad (12.2)$$

При желании информацию о направлении можно учесть в векторной аналитической записи определения:

$$\vec{j} = \frac{dI}{dS_{\perp}} \cdot \frac{\vec{v}_{\text{др}}}{v_{\text{др}}} \quad (12.3)$$

Нетрудно понять, исходя из определения, что если заряд носителей тока равен  $q$ , а их концентрация  $n$  (число частиц в единице объёма), то плотность тока равна

☑  $\vec{j} = qn\vec{v}_{\text{др}}$  (12.4)

Плотность тока – характеристика локальная, т.е., вообще говоря, может изменяться от точки к точке проводящей среды

\*) Иногда говорят так: «плотность тока равна заряду, переносимому в единицу времени через единичную поверхность, перпендикулярную к току».

$\vec{j}(x, y, z) \equiv \vec{j}(\vec{r})$ ! Зная вектор  $\vec{j}(\vec{r})$  в каждой точке пространства, можно найти силу тока через любую интересующую нас поверхность  $\Sigma$ :

$$I = \int_{\Sigma} j_n dS. \quad (12.5)$$

Нам хорошо знакома такая математическая «конструкция» – это не что иное, как «поток» векторного поля  $\vec{j} = \vec{j}(x, y, z)$ ! Как видим, термин «ток» весьма удачно отражает суть дела.

## 12.2. Закон Ома (для однородного участка цепи)

Мы знаем, что при равновесии зарядов в проводниках, т.е. в отсутствие тока, потенциал всех точек проводника одинаков. А как обстоит дело при протекании постоянного тока по тонкому проводу? Опыты с электрометром показывают, что потенциал **падает** вдоль такого проводника с током. Действительно, заряды внутри проводника переносятся за счёт работы электрического поля!

Выяснению точной количественной закономерности о соотношении между силой протекающего тока и величиной падения потенциала, а также других закономерностей постоянного тока посвятил свои эксперименты Георг Ом в первой половине XIX века (1820 – 1826 гг.). **Закон Ома для однородного участка цепи (без ЭДС) гласит:**

► **Сила тока прямо пропорциональна разности потенциалов между концами однородного участка цепи:**

$$I \sim \varphi_1 - \varphi_2.$$

Для большей компактности разность потенциалов  $\varphi_1 - \varphi_2$  обозначают одной буквой  $u^*$ . С учётом этого закон можно записать в виде:

$$I = \Lambda \cdot u \quad (12.6)$$

---

\*) Данную величину часто называют также «напряжением на участке цепи», но мы не будем с этим торопиться.

## § 12. Постоянный ток

Коэффициент пропорциональности  $\Lambda$  называется проводимостью, а величина обратная ему «электрическим сопротивлением» участка цепи  $R$ . Таким образом, **определением электрического сопротивления** (его называют также «омическим») следует считать соотношение:

➔ (Опр.)

$$R = \frac{u}{I}, \quad (12.7)$$

а окончательная запись **закона Ома** приобретает, наконец, привычный вид:

$$\triangleright \quad I = \frac{1}{R} \cdot u \quad \left( \text{или} \quad I = \frac{u}{R} \right) \quad (12.6, a)$$

Г. Ом исследовал экспериментально также, от чего зависит электрическое сопротивление  $R$ . Для участка однородного проводника простой цилиндрической формы длины  $l$  с площадью поперечного сечения  $S$  оно равно

$$\checkmark \quad R = \rho \frac{l}{S}. \quad (12.8)$$

Здесь  $\rho$  – удельное сопротивление материала проводника<sup>\*)</sup>. Удельное сопротивление определяется электрическими свойствами материала проводника, а также существенно зависит от его состояния. Важнейшим фактором при этом является температура. Ом установил, что для металлических проводников в не очень больших температурных интервалах и при не очень низких температурах<sup>\*\*)</sup> удельное сопротивление зависит от температуры  $t^\circ$  прямо пропорционально:

$$\checkmark \quad \rho = \rho_0(1 + \alpha t^\circ). \quad (12.9)$$

Здесь  $\rho_0$  – удельное сопротивление при температуре  $t = 0^\circ\text{C}$ ,  $\alpha$  – «температурный коэффициент сопротивления».

<sup>\*)</sup> Величина обратная удельному сопротивлению  $\sigma = 1/\rho$  называется удельной проводимостью данного материала.

<sup>\*\*)</sup> Открытое в 1911 г. Камерлинг Оннесом явление «сверхпроводимости» при температурах вблизи абсолютного нуля мы нам ещё предстоит обсудить, но после знакомства с квантовой механикой

### 12.3. Закон Ома в дифференциальной форме

Приведённые выше закономерности очень важны, например, для электротехники. Физику же хотелось бы найти в них отражение более общих свойств и законов – «фундаментальный смысл».

Рассмотрим для этого малый элемент проводящей среды (небольшой отрезок «трубки тока»), по которой протекает постоянный ток. Запишем для него цепочку простых равенств:

$$\left\{ \begin{array}{ll} I = \frac{1}{R} \cdot (\varphi_1 - \varphi_2); & \text{закон Ома} \\ I = j \cdot dS; & \text{связь между силой и плотностью тока} \\ R = \rho \frac{dl}{dS}; & \text{омическое сопротивление} \\ \varphi_1 - \varphi_2 = E \cdot dl & \text{связь разности потенциалов и напряжённости} \end{array} \right.$$

Если подставить теперь всё это в первое равенство и выполнить очевидные сокращения, получим очень важное соотношение, которое и носит название **закона Ома в дифференциальной (локальной) форме**:

$$\vec{j} = \frac{1}{\rho} \vec{E} \quad (\text{или} \quad \vec{j} = \sigma \cdot \vec{E}) \quad (12.10)$$

Отметим особо два обстоятельства:

- 1) Векторный характер указанной закономерности;
- 2) Локальный характер означает, что этот закон устанавливает пропорциональную связь электрического состояния среды –  $\vec{j}(\vec{r})$  и характеристику электрического поля  $\vec{E}(\vec{r})$  в каждой данной точке ( $\vec{r} \equiv \{x, y, z\}$ ) этой среды !

### 12.4. Работа и мощность тока

*а) Закон Джоуля – Ленца в интегральной форме.*

При протекании электрического тока по *однородному* участку цепи 1–2 с сопротивлением  $R$  (см. рис. 12.2)

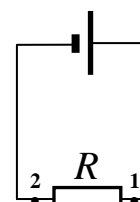


Рис. 12.2



## § 12. Постоянный ток

---

электрическое поле совершает работу по перемещению носителей тока внутри этого проводника. Эту работу принято называть «*работой тока*». Как мы знаем из электростатики работа электрического поля равна:

$$A_{12} = q \cdot (\varphi_1 - \varphi_2) \quad \text{или} \quad A_{12} = u \cdot q = u \cdot (I \cdot \Delta t). \quad (12.11)$$

Согласно закону сохранения энергии работа тока равна изменению энергии участка цепи. Она может расходоваться на выделение тепла, протекание химических реакций, излучение, совершение механической работы движущимися проводниками с током и т.д. Если же проводник неподвижен, не происходит химических реакций, и отсутствуют иные потери энергии, то вся работа тока расходуется на выделение в нём тепла  $Q = A_{12} = u \cdot I \cdot \Delta t$ . В этом случае справедлив закон Ома  $u = IR$ , и мы приходим к важному соотношению (впервые установленному экспериментально).

➤ *Количество теплоты  $Q$ , выделяемое в проводнике при протекании по нему постоянного тока, определяется законом Джоуля – Ленца:*


$$Q = I^2 R \Delta t \quad (12.12)$$

Закон Джоуля – Ленца выполняется не только для металлических проводников, но также и для растворов электролитов и для газов.

### ❖ Замечание

Говоря о законе Джоуля – Ленца, наряду с равенством (12.12) часто приводят соотношения  $Q = Iu\Delta t = \frac{u^2}{R}\Delta t$ . Надо помнить, что если на участке цепи происходит переход энергии в механическую или «химическую», то выделяющееся тепло меньше работы тока. Например, она может расходоваться на вращение ротора электродвигателя или выделение вещества при электролизе.

**б) Закон Джоуля – Ленца в дифференциальной (локальной) форме.** А как обстоит дело на микроуровне (т.е. на локальном)? Применим тот же приём, что и при обосновании дифференциальной формы закона Ома – выделим «физически бесконечно малый» элемент проводящей среды и запишем для него цепочку достаточно понятных равенств:

$$\left\{ \begin{array}{ll} dQ = R \cdot I^2 dt & \text{закон Джоуля – Ленца} \\ \frac{dQ}{dt} \equiv W ; & \text{мощность "тепловыделения"} \\ \frac{dW}{dV} \equiv w ; & \text{"удельная мощность тепловыделения"} \\ I = j \cdot dS ; & \text{связь силы и плотности тока} \\ R = \rho \frac{dl}{dS} ; & \text{омическое сопротивление.} \end{array} \right.$$

Если выразить отсюда **удельную мощность тепловыделения  $w$**  – т.е. количество теплоты, выделяющееся «в единицу времени и в единице объёма» проводящей среды, то после всех сокращений как раз получим **закон Джоуля – Ленца в дифференциальной форме**:

$$w = \rho \cdot j^2 \quad \left( \text{или} \quad w = \frac{1}{\rho} \cdot E^2 \right) \quad (12.13)$$

Локальный характер этого соотношения опять-таки означает, что все величины в левой и правой части равенства относятся к определённой точке, точнее очень малой области проводящей среды, положение которой задано радиус-вектором  $\vec{r} \equiv \{x, y, z\}$ .

## § 13. Электродвижущая сила

### 13.1. Источники тока. ЭДС

Постоянный ток в электрической цепи возможен, если внутри проводников этой цепи существует постоянное электрическое поле. Создать его можно перераспределив определённым образом заряды вдоль проводников цепи. Однако перенос заряда под действием электростатических сил быстро приводит к электрическому равновесию, выравниванию потенциала всех проводников и прекращению тока. Для поддержания тока необходимо организовать «круговорот зарядов» в цепи. Чтобы поддерживать ток в цепи *постоянным*, в каком-то её участке (или во всей цепи) должны действовать силы, перемещающие заряды *против сил электростатического поля*. Такие силы, в отличие от «кулоновских», называют «*сторонними*». Роль сторонних сил принято характеризовать величиной, называемой ЭДС.

► **(Опр.)** Величина, равная отношению работы сторонних сил по перемещению заряда в цепи к величине этого заряда, называется электродвижущей силой (ЭДС) источника тока ( $\mathcal{E}$ ):

$$\mathcal{E} = \frac{A^{cm.}}{q} \quad (13.1)$$

Обычно сторонние силы действуют только на отдельных участках цепи в устройствах, которые называются источниками тока. Что это за устройства, и каковы эти сторонние силы?

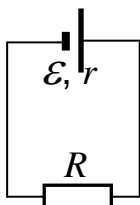


Рис. 13.1

На рис. 13.1 показана т.н. замкнутая цепь, состоящая из источника тока, соединительных проводов и однородного участка «внешней цепи». По внешней цепи заряды дрейфуют под действием электростатического поля в проводах. Конструкция гипотетического источника тока предполагает наличие «бесконечной ленты»

транспортёра, «перебрасывающего» «поступающие» из внешней цепи на положительный «полюс» источника тока электроны обратно на «отрицательный» полюс. Заряды внутри источника движутся, таким образом, против сил электростатического поля! Тем самым и создаётся «запас работы», благодаря *механической работе* сторонних сил  $A^{ст} = A^{мех}$  – приводные валики транспортёра необходимо вращать.

Может показаться, что предложенная модель источника тока чересчур гипотетична. Но она, по сути, описывает принцип действия «электростатического генератора Ван-де-Граафа». С его помощью удаётся достичь значений ЭДС, измеряемых миллионами вольт. Однако это устройство не годится для поддержания значительных токов, а практически используется лишь для ускорения элементарных частиц.

Широкое распространение получили «химические элементы питания» (батарейки, аккумуляторы). В них для разделения зарядов используется энергия химических реакций, связанных с обменом носителями зарядов – электронами и ионами. Какие же «сторонние силы» работают в этом случае? Как нам известно, не существует специальных «химических» сил. Конечно же в химических реакциях проявляют себя силы электромагнитной природы. Но это не электростатические силы! ЭДС «классического» химического элемента питания определяется суммой электрохимических потенциалов материалов положительного (медь) и отрицательного (цинк) электродов по отношению к разделяющему их электролиту. Они равны соответственно +0,6 и -0,5 В. Поэтому ЭДС такого источника тока равна 1,1 В. Как её измерить? ЭДС источника тока равна разности потенциалов между его полюсами в отсутствии тока во внешней цепи (без нагрузки). Измерить её можно с помощью электростатического вольтметра или вольтметра с очень большим

## § 13. Постоянный ток

внутренним сопротивлением (идеального), подсоединив его к полюсам «ненагруженного» источника. Под нагрузкой же (при наличии тока во внешней цепи) проявляет себя другая важная характеристика источника тока, о которой мы скажем позже.

### 13.2. Закон Ома для неоднородного (содержащего ЭДС) участка цепи

Закон Ома для участка цепи с ЭДС (см. рис. 13.2) связывает силу постоянного тока, протекающего по участку, разность потенциалов на его концах  $\varphi_1 - \varphi_2$  и действующую на участке ЭДС

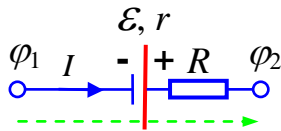


Рис. 13.2

$\mathcal{E}$ . За время  $\Delta t$  по участку переносится заряд равный  $\Delta q = I\Delta t$ . Электрическое поле и сторонние силы, действующие на участке, совершают работу:

$$\Delta A = \Delta q \cdot (\varphi_1 - \varphi_2) + \Delta q \cdot \mathcal{E}. \quad (*)$$

На участке цепи выделяется при этом тепло:

$$\Delta Q = R_{12} \cdot I^2 \cdot \Delta t = R_{12} \cdot I \cdot (I\Delta t) = R_{12} \cdot I \cdot \Delta q. \quad (**)$$

Если на участке цепи проводники не движутся, а значит, не совершается механическая работа, то эти величины можно приравнять. После сокращения на  $\Delta q$  получим

$$I \cdot R_{12} = \varphi_1 - \varphi_2 + \mathcal{E} \quad \text{или} \quad \circ$$

➤ 
$$I = \frac{\varphi_1 - \varphi_2 + \mathcal{E}}{R_{12}} \quad (13.2)$$

Это и есть **закон Ома для неоднородного (содержащего ЭДС) участка цепи**. Сделаем к нему ряд важных замечаний.

#### ❖ Важные замечания

1. В соотношении (13.2)  $I$  и  $\mathcal{E}$  – следует понимать как **алгебраические** величины, т.е. имеющие определённый знак. При движении вдоль участка от точки 1 к точке 2 знаки силы тока  $I$  и

действующей на участке ЭДС  $\mathcal{E}$  выбираются положительными, если направление тока и ЭДС источника совпадают с направлением обхода. При этом ЭДС приписывается условное направление от отрицательного полюса источника тока к положительному (т.е. в направлении повышения потенциала

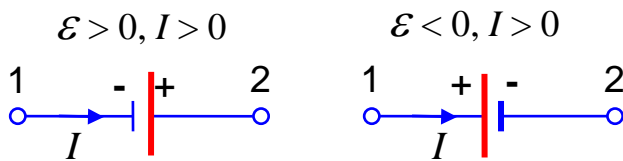


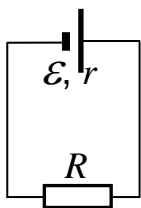
Рис. 13.3

положительных зарядов – сторонние силы совершают положительную работу!). Рисунок 13.3 иллюстрирует это правило знаков.

2. В отсутствии сторонних сил на участке цепи (источников тока) мы естественным образом приходим к уже знакомому закону Ома для однородного участка:

$$I = \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{R}.$$

3. Если же точки 1 и 2 – концы неоднородного участка цепи замкнуть, то получится так называемая «полная цепь»: источник



тока с ЭДС  $\mathcal{E}$  и внутренним сопротивлением  $r$ , подключенный соединительными проводами к участку внешней цепи с сопротивлением  $R$  – см. рис. 13.4. В этом случае выполняется закон Ома для полной цепи:

Рис. 13.4

➤ *Сила тока, протекающего в полной цепи, равна отношению ЭДС источника тока к полному сопротивлению этой цепи (к сумме сопротивлений внешнего и внутреннего её участков):*

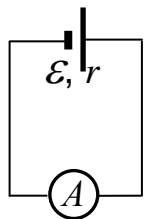
$$I = \frac{\mathcal{E}}{R + r}. \quad (13.3)$$

4. Пока несколько формально мы использовали некую характеристику участка цепи  $R_{12}$  – его «полное сопротивление»,

### § 13. Постоянный ток

ответственное за выделение тепла Джоуля-Ленца. Если выделить из этой величины омическое сопротивление однородных участков (не входящих в источник тока)  $R$ , то останется так называемое «внутреннее сопротивление» источника тока:

$$r = R_{12} - R. \quad (13.3)$$



Как же узнать внутреннее сопротивление  $r$  источника тока на практике? Для этого надо замкнуть перемычкой полюса источника и измерить так называемый «ток короткого замыкания  $I_{\text{к.з.}}$ » – см рис. 13.5. Тогда внутреннее сопротивление источника можно будет найти так:

Рис. 13.5

$$r = \frac{\mathcal{E}}{I_{\text{к.з.}}}. \quad (13.4)$$

5. Ещё одно замечание касается терминологии. Разность потенциалов  $\varphi_1 - \varphi_2$  часто называют «падением напряжения» или просто «напряжением» на участке цепи. Такая подмена правомерна лишь для *однородного участка цепи!* В общем случае «напряжение» определяется как *удельная работа электростатических и сторонних сил* на участке цепи. Оно равно произведению силы тока на полное сопротивление участка цепи:  $U_{12} = \varphi_1 - \varphi_2 \pm \mathcal{E}$  и, как видим, не равно разности потенциалов!

✚ **Дополнение.** Приведём пример, помогающий понять, как применяется закон Ома для неоднородного участка. Рассмотрим участок цепи постоянного тока между точками 1 с потенциалом  $\varphi_1$  и точкой 2 с потенциалом  $\varphi_2$  (см. рис. 13.6). Пусть ток протекает по участку от точки 1 к точке 2. Построим график изменения потенциала  $\varphi$  вдоль участка цепи между этими точками.

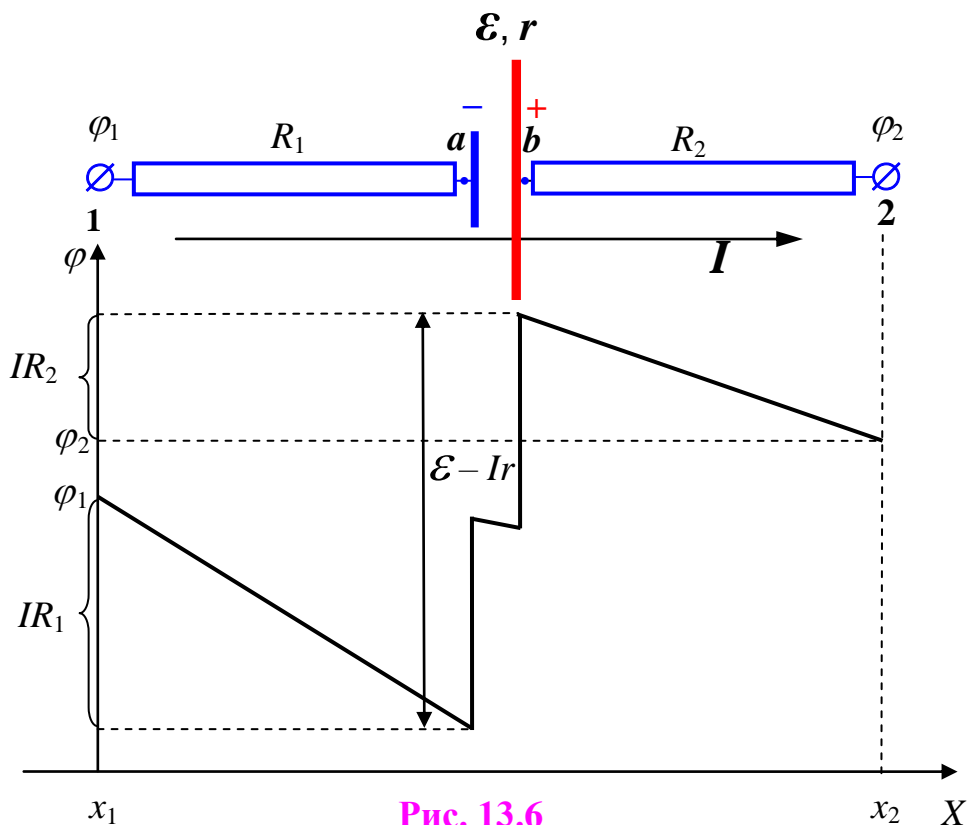


Рис. 13.6

В направлении протекающего тока потенциал сначала на однородном участке  $1 - a$  с сопротивлением  $R_1$  равномерно уменьшается от точки 1 до отрицательного полюса источника тока<sup>\*)</sup>. Падение потенциала по закону Ома для однородного участка цепи составляет  $I \cdot R_1$ . Будем предполагать, что на участке включён «химический» источник тока. Тогда при переходе от его отрицательной пластины к электролиту потенциал увеличивается скачком на величину его электрохимического потенциала. Второй скачок потенциала вверх происходит при переходе от электролита к положительной пластине источника. Сумма этих скачков равна ЭДС источника тока  $\mathcal{E}$ . Внутри же источника ток протекает по проводящему веществу – электролиту, и потенциал опять-таки уменьшается на величину  $I \cdot r$ , как и на любом однородном участке цепи.

<sup>\*)</sup> Для большей выразительности рисунка мы предлагаем считать сопротивления  $R_1$  и  $R_2$  распределёнными равномерно вдоль однородных участков между точками 1, 2 и соответствующими полюсами источника тока.



### § 13. Постоянный ток

Аналогично, потенциал уменьшается равномерно на однородном участке между положительным полюсом источника и точкой 2 на величину  $I \cdot R_2$ , достигая конечного значения потенциала –  $\varphi_2$ .

В нашем примере мы получили, что он оказался больше, чем потенциал  $\varphi_1$  (см. рис. 13.6) – т.е. ток течёт в направлении повышения потенциала в цепи. Отсюда и ответ на вопрос: «Может ли ток по участку цепи протекать от точки с меньшим потенциалом к точке с большим?». Может, если на участке действуют сторонние силы с ЭДС большей, чем падение потенциала на полном сопротивлении участка.

Приведённый анализ поведения потенциала помогает проиллюстрировать ответ на ещё один важный вопрос: «*Что покажет вольтметр, подключенный к полюсам источника тока?*». Если вольтметр считать идеальным, то он измерит разность потенциалов между этими полюсами (точками *a* и *b* на рисунке). Его показания в рассмотренном случае (направление тока через источник *совпадает с направлением его ЭДС*) будут равны:

$$u_v = \mathcal{E} - Ir. \quad (13.5)$$

Если бы ток протекал по участку 1–2 в противоположном направлении, то показания вольтметра были бы иными:

$$u_v = \mathcal{E} + Ir. \quad (13.6)$$

Обоснуйте этот результат самостоятельно, построив график зависимости потенциала вдоль участка цепи для такого случая. Эта ситуация реализуется, в частности, при зарядке аккумуляторов – ток через источник протекает *против направления его ЭДС* (от положительного полюса к отрицательному).

### 13.3. Разветвлённые цепи. Правила Кирхгофа

С помощью закона Ома рассчитывают силы токов по заданным величинам ЭДС и сопротивлений только в простейших случаях, когда цепь можно свести к одному контуру. Для разветвлённых цепей весьма удобно использовать так называемые *правила Кирхгофа*.

Из закона сохранения заряда для постоянных токов следует *первое правило Кирхгофа (правило узлов)*:

☑ *алгебраическая сумма сил токов, сходящихся в узле, равна нулю:*

$$\sum_{i=1}^N I_i = 0 \quad (13.7)$$

Узлом называется точка, в которой соединяются 3 или более проводников. Направления сил токов в отдельных неразветвлённых участках, разделённых узлами, выбирают произвольно. При этом **условно** считают силы токов, «входящих» в узел, положительными величинами, а «выходящих» из узла – отрицательными. Первое правило (13.7) запишем, например, для узла *a* в схеме, приведённой на рис. 13.7:

$$I_5 - I_1 - I_4 = 0.$$

Из закона Ома для неоднородных участков цепи следует *второе правило Кирхгофа (правило контуров)*:

☑ *алгебраическая сумма произведений сил токов на полные сопротивления в неразветвлённых участках контура равна алгебраической сумме ЭДС, действующих в контуре:*

$$\sum_i I_i (R_i + r_i) = \sum_j \mathcal{E}_j \quad (13.8)$$

Для практического применения второго правила Кирхгофа сначала в разветвлённой цепи выбирается тот или иной контур. Затем «направление обхода» этого контура (по часовой стрелке или против неё). *Знаки произведений сил токов на полные сопротивления  $I_i(R_i + r_i)$  и ЭДС источников  $\mathcal{E}_i$  в равенстве вида*

## § 13. Постоянный ток

(13.8), считаются *положительными, если направление токов и ЭДС совпадает с направлением обхода контура*.

Справедливость второго правила Кирхгофа следует, по сути, из равенства нулю суммарного падения потенциала при обходе любого контура. Покажем это на примере.

### ✓ Пример

Для каждого из неоднородных участков цепи схемы рис. 13.7, разделённых узлами ( $a, b, c, d$ ), запишем Закон Ома:

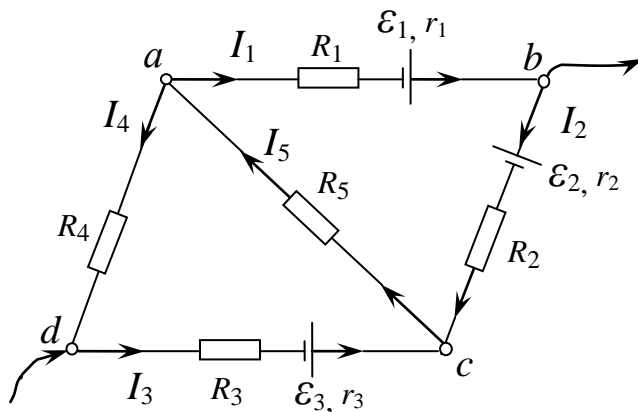


Рис. 13.7

$$\begin{cases} I_1 \cdot (R_1 + r_1) = \varphi_a - \varphi_b + \varepsilon_1; \\ I_2 \cdot (R_2 + r_2) = \varphi_b - \varphi_c - \varepsilon_2; \\ -I_3 \cdot (R_3 + r_3) = \varphi_c - \varphi_d - \varepsilon_3; \\ -I_4 \cdot R_4 = \varphi_d - \varphi_a. \end{cases}$$

Сложим теперь левые и правые части написанных

равенств. В итоге получим:

$$I_1(R_1 + r_1) + I_2(R_2 + r_2) - I_3(R_3 + r_3) - I_4 R_4 = \varepsilon_1 - \varepsilon_2 - \varepsilon_3.$$

Убедитесь, что это в точности соответствует второму правилу Кирхгофа для контура  $abcd$  при обходе его по часовой стрелке.

Из уравнений, составленных по правилам Кирхгофа для остальных контуров и узлов схемы аналогично приведённым, только часть оказывается линейно независимыми. А именно – для цепи с  $n$  различными участками (и силами токов  $I_i$  соответственно), разделёнными узлами, удаётся составить ровно  $n$  линейно независимых уравнений. Решая систему этих уравнений, можно найти значения сил токов, текущих по всем участкам анализируемой цепи. Если при заданных величинах  $\varepsilon_i$ ,  $R_i$  и  $r_i$  какое-то значение силы тока  $I_i$  окажется отрицательным, то это будет означать, лишь, что истинное направление силы тока противоположно ранее выбранному произвольно.

## **§ 14. Магнитное поле в вакууме**

### **14.1. Взаимодействие токов**

С древних времён человеку было знакомо наряду с электрическим и «магнитное» взаимодействие, в котором проявлялись особенные свойства камешков, найденных вблизи древнего города Магнесия<sup>\*)</sup>. Сейчас мы назвали бы их постоянными магнитами. В средние века в научном изучении магнитных свойств немало преуспел английский учёный Гильберт<sup>\*\*)</sup>. В частности, ему удалось далеко продвинуться в понимании земного магнетизма.

Гильберт создал первую *теорию магнитных явлений*. Установил, что любой магнит имеет два полюса, разделить которые невозможно! Гильберт первым выдвинул гипотезу о том, что стрелка компаса ориентируется по сторонам горизонта, поскольку сама Земля является гигантским магнитом. Он сумел подтвердить эту догадку экспериментально, проводя опыты с намагниченным железным шаром – «тереллой» (маленькая Земля).

Однако вплоть до начала XIX века была не ясна связь магнетизма и электричества. В 1820 Г.Х. Эрстед в своём знаменитом теперь эксперименте («опыт Эрстеда») обнаружил такую взаимосвязь. Магнитная стрелка компаса, располагалась вблизи длинного проводника. В отсутствии тока стрелка была ориентирована в направлении с юга на север. При замыкании ключа в проводнике появлялся электрический ток, и стрелка компаса сразу же поворачивалась, располагаясь в поперечном к проводнику направлении. Таким образом, стало ясно, что электрический ток действует на постоянные магниты. Это стало отправной точкой по-настоящему научных и систематических исследований магнетизма.

---

<sup>\*)</sup> Μαγνήτις λίθος (*Magnētis lithos*) – «камень из Магнесии».

<sup>\*\*)</sup> **Уильям Гильберт** (*William Gilbert, 1544 – 1603*) – придворный врач английской королевы Елизаветы I. Первым ввел термин «электрический» (от лат. *electricus* – «янтарный»).

## § 14. Магнитное поле в вакууме

Очень скоро А.М. Ампер экспериментально установил закон взаимодействия проводников с токами. А затем и выдвинул известную сейчас каждому школьнику гипотезу о природе магнетизма постоянных магнитов – «гипотезу Ампера»: это следствие существования микротоков, протекающих внутри вещества; сейчас мы назвали бы их молекулярными. Из экспериментов Ампера следовало, в частности, что сила взаимодействия двух длинных прямолинейных параллельных проводников с постоянным током прямо пропорциональна произведению сил токов и обратно пропорциональна расстоянию

между ними<sup>\*)</sup>  $F_m \sim \frac{I_1 I_2}{r}$ . И здесь мы имеем дело с тем редким

случаем, когда стоит сказать о коэффициенте пропорциональности. Оказалось, что в системе единиц СГС этот

коэффициент равен  $\frac{1}{c^2}$ , где  $c$  – это скорость света! Из

классической теории электромагнетизма следует возможность существования электромагнитных волн, скорость которых в вакууме равна  $c$ . Обнаружив такое совпадение, Максвелл выдвинул предположение, что свет – это и есть электромагнитные волны определённого частотного диапазона. Несколько позже Г. Герц экспериментально подтвердил эту блестящую гипотезу («опыты Герца»)!

Итак, уже в начале XIX века стало отчётливо ясно, что магнетизм порождается электрическими токами – движущимися электрически заряженными частицами, и проявляет себя действием на электрические токи – движущиеся электрически заряженные частицы. Впервые в нашем курсе мы сталкиваемся с силами, зависящими от состояния движения тел! Именно отделяя

---

<sup>\*)</sup> В современном определении эталона единицы силы постоянного тока 1 А в системе единиц СИ используется как раз такой случай взаимодействия проводников с токами при нормированном значении силы этого взаимодействия.

эту особую часть взаимодействия между заряженными частицами от «обычного кулоновского» и изучают законы магнетизма.

В результате проведения многочисленных опытов было показано, что взаимодействие проводников с током аналогично действию токов на магниты и магнитов на токи. Поэтому указанный вид взаимодействия получил название *магнитного взаимодействия*.

Отметим существенное отличие магнитного взаимодействия от рассмотренного выше электрического взаимодействия зарядов. Последнее зависит от величины этих зарядов. *Магнитное взаимодействие возникает лишь при движении зарядов*, то есть при наличии токов, и зависит от величины этих токов.

## 14.2. Магнитное поле. Вектор магнитной индукции

В самом начале изучения электромагнетизма мы договорились придерживаться концепции *поля, как посредника во взаимодействии заряженных тел*. Хотелось бы ввести силовую характеристику магнитного поля – вектор магнитной индукции  $\vec{B}$  – по аналогии с напряжённостью электрического поля  $\vec{E}$ . То есть, отталкиваясь от силы, действующей на «пробный заряд», но на этот раз движущийся!

Из школьного курса мы знаем экспериментальный факт, что «магнитная составляющая» такой силы – сила Лоренца – пропорциональна скорости и величине заряда частицы. С «академической» точки зрения, давая определение магнитной индукции, лучше всего было бы ввести её примерно так:  $B = \frac{F_{л}}{qv}$  и,

договорившись о направлении вектора  $\vec{B}$ , исходя из направлений силы Лоренца  $\vec{F}_{л}$  и скорости частицы  $\vec{v}$ .\*) Однако с практической точки зрения это крайне неудобно – ведь сила Лоренца,

---

\*) Здесь и далее мы будем использовать именно такое обозначение скорости, чтобы не возникало путаницы с обозначением объёма – «V».

## § 14. Магнитное поле в вакууме

действующая на отдельную частицу чрезвычайно мала и становится заметной величиной лишь при очень больших скоростях движения заряженной частицы.

Поэтому поищем другой способ дать определение вектору магнитной индукции  $\vec{B}$ . Мы уже знаем, что магнитное поле оказывает ориентирующее действие на стрелку компаса. На практике, однако, удобнее использовать вместо неё маленькую рамку с током (по сути, «электромагнитную стрелку») – «пробный виток».

➡ **(Опр.) Пробным витком называется рамка с током малых размеров. Магнитным моментом пробного витка называют вектор  $\vec{p}_m = IS\vec{n}$ ,**

где  $I$  – сила тока, протекающего по витку,  $S$  – его площадь, а  $\vec{n}$  – «положительная единичная нормаль» к рамке. Положительная нормаль направлена в сторону перемещения правого винта – «буравчика» – при вращении его рукоятки по направлению тока в рамке\*).

Как и стрелка компаса, пробный виток поворачивается в магнитном поле под действием вращающего момента сил  $\vec{N}$ . Силовое действие магнитного поля на проводники с током и движущиеся заряды определяет

➡ **(Опр.) Вектор магнитной индукции  $\vec{B}$ :**

1. **За направление вектора  $\vec{B}$  принимают направление вектора магнитного момента  $\vec{p}_m$  пробного витка, повернувшегося под действием сил магнитного поля\*\*).**

2. **Модуль вектора магнитной индукции равен отношению максимального момента сил, действующих на пробный виток со стороны магнитного поля, к модулю магнитного момента этого витка:**

$$B = \frac{N_{\max}}{p_m} \quad (14.1)$$

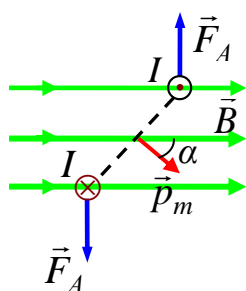
\*) Точно так же будет направлен и «северный» конец стрелки компаса, помещённой в данную точку пространства.

\*\*) Это соответствует положению устойчивого равновесия витка.

❖ **Замечания**

1. Опыт показывает, что этот момент сил **зависит** от первоначальной ориентации пробного витка. Он максимален, когда  $\alpha = \pi/2$  (см. рис. 14.1). В числителе отношения (14.1) значится именно максимальное значение момента силы  $N_{max}$ .

2. Из опыта известно также, что величина  $N_{max}$ , в свою очередь, **пропорциональна** произведению силы



**Рис. 14.1**

тока, протекающего по витку на его площадь. А вот от формы витка нет! Отношение  $N_{max}/p_m$  – модуль вектора магнитной индукции – не зависит от свойств пробного витка, а только от самого магнитного поля.

3. При произвольном значении угла  $\alpha$  модуль момента сил равен  $N = p_m B \sin \alpha$ , а сам вектор

$$\vec{N} = [\vec{p}_m, \vec{B}]. \quad (14.2)$$

Последнее равенство даёт способ вычисления момента силы, действующей на рамку с током – «магнитный диполь» во внешнем магнитном поле.

4. *Необязательное замечание:* определение магнитной индукции выглядит весьма похоже на определение напряжённости электрического поля. Однако исторически сложилось так, что термин «напряжённость» закрепился за другой важной величиной, характеризующей силовое действие магнитного поля. О ней мы поговорим в другой части курса – «Строение вещества».

5. *Совсем необязательное замечание:* существуют и другие способы дать определение вектору магнитной индукции. Как мы знаем, доступная для измерения сила действует на проводник с током. Нередко определение вектора  $\vec{B}$  связывают как раз с такой силой. Увы, и здесь всё непросто! Не зная, какими источниками порождено магнитное поле в данной точке пространства, *практически* невозможно выделить силу, действующую именно на данный «малый элемент тока», как это обычно предлагается в подобных случаях.



## § 14. Магнитное поле в вакууме

Вместо довольно искусственной процедуры выделения магнитной силы, действующей на отдельный малый элемент проводника с током мы использовали «интегральную» характеристику – момент силы, действующий на весь виток – следствие действия таких сил.

### 14.3. Принцип суперпозиции для магнитного поля

Опытным путём установлено, что, если в данной точке пространства  $A$  различные токи и магниты создают магнитные поля с индукцией  $\vec{B}_1, \vec{B}_2, \vec{B}_3, \dots$ , то для нахождения результирующего магнитного поля  $\vec{B}$  в точке  $A$  следует найти сумму векторов индукции от всех источников полей:

$$\vec{B} = \vec{B}_1 + \vec{B}_2 + \vec{B}_3 + \dots \quad (14.3)$$

В этом состоит принцип суперпозиции для магнитных полей. С учётом этого актуальным является вопрос о нахождении индукции магнитного поля создаваемого каждым отдельным «элементом тока».

### 14.4. Закон Био-Савара-Лапласа

Французы Био и Савар провели в 1820 году серию кропотливых и разнообразных экспериментов по определению индукции магнитного поля, созданного проводниками различной формы и конфигурации с током. Выявить закономерность, проанализировав весь этот богатый массив эмпирической информации, удалось Лапласу<sup>\*)</sup>. Он пришёл к выводу, что определить магнитное поле, созданное проводником произвольной формы с током, можно суммируя индукцию магнитного поля  $d\vec{B}$  от каждого отдельного «элемента тока»  $Id\vec{l}$  в произвольной точке пространства  $A$ , задаваемой радиус-вектором  $\vec{r}$  (см. рис. 14.2):

<sup>\*)</sup> Лаплас Пьер-Симон (1749–1827) – французский математик, физик и астроном; известен работами в области небесной механики, дифференциальных уравнений, один из создателей теории вероятностей. Именно Лаплас ввёл этот термин «Небесная механика».

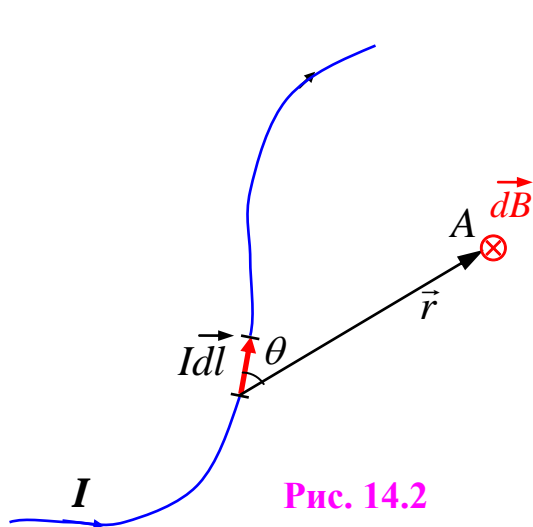


Рис. 14.2

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{I[d\vec{l}, \vec{r}]}{r^3} \quad (14.4)$$

Это утверждение получило название закона Био–Савара–Лапласа (БСЛ). В коэффициент пропорциональности системы СИ здесь входит магнитная постоянная  $\mu_0$ , равная  $4\pi \cdot 10^{-7}$  Гн/м (или Н/А<sup>2</sup>).

Направление вектора перпендикулярно как элементу тока (вектору  $Id\vec{l}$ ), так и вектору  $\vec{r}$ . Если считать, что на рис. 14.2 точка  $A$  и элемент тока лежат в одной плоскости, то вектор  $d\vec{B}$  направлен «от нас». Полезно написать также и чему равен **модуль магнитной индукции** от элемента тока

$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Idl \sin \theta}{r^2} \quad (14.5)$$

Как мы уже отмечали, для нахождения результирующего магнитного поля созданного всем проводником следует, пользуясь принципом суперпозиции полей, найти сумму векторов  $d\vec{B}$  от всех элементов тока, на которые предварительно разбивается проводник. Таким образом, принципиально может быть решён вопрос для проводников произвольной формы. Покажем, как реализуется этот подход практически для случая проводников несложной формы.

**Пример 1.** Найти индукцию магнитного поля прямолинейного длинного проводника с током

“Разобьём” проводник на малые элементы (см. рис. 14.3) и определим индукцию магнитного поля в точке  $A$  для каждого из них в соответствии с законом Био–Савара–Лапласа. Направление векторов определим по «правилу буравчика»

## § 14. Магнитное поле в вакууме

(правого винта). Прежде чем переходить к процедуре суммирования векторов  $d\vec{B}$  отметим, что все они направлены одинаково – перпендикулярно плоскости, в которой располагается проводник и точка  $A$  (на рисунке показано символом  $\otimes$  – перпендикулярно его плоскости «от нас»). Поэтому результирующий вектор  $\vec{B}$  направлен так же, и суммировать можно скалярные величины – модули  $dB$ . Чтобы выполнить это суммирование (операция интегрирования), выразим входящие в соотношение (14.5) величины  $r$  и  $dl$  через одну единственную переменную величину –  $\theta$  и её дифференциал  $d\theta$ :

$$r = \frac{R}{\sin\theta}, \quad dl = \frac{rd\theta}{\sin\theta} = \frac{Rd\theta}{\sin^2\theta}.$$

Подставим теперь всё это в (14.5), выполним очевидные сокращения величин и получим:

$$dB = \frac{\mu_0 I \sin\theta}{4\pi R} d\theta.$$

Остается выполнить интегрирование в пределах изменения угла  $\theta$  для случая очень («бесконечно») длинного проводника, т. е. от 0 до  $\pi$ :

$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi R} \int_0^\pi \sin\theta d\theta = \frac{\mu_0 I}{4\pi R} (-\cos\theta)|_0^\pi = \frac{\mu_0 I}{2\pi R}.$$

Мы получили значение модуля магнитной индукции длинного прямолинейного проводника с током. Как видим, эта величина убывает обратно пропорционально расстоянию от него. О направлении вектора  $\vec{B}$  мы уже говорили. Но ! Хотелось бы представить себе структуру магнитного поля более наглядно.

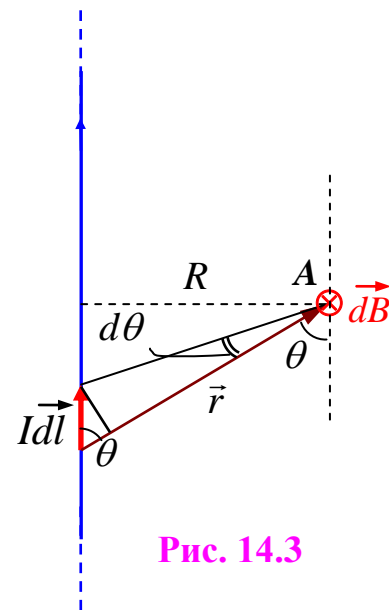


Рис. 14.3

### 14.5. Линии магнитной индукции

Как и в случае электростатического поля, чтобы представить структуру магнитного поля – то есть его направление и величину в разных точках пространства, используют особые линии.

► **(Опр.)** *Линии магнитной индукции (или «силовые линии») – линии, касательные к которым в каждой точке поля совпадают с направлением вектора магнитной индукции в данной точке.*

Линии магнитной индукции поля в рассмотренном нами случае длинного прямолинейного проводника с током – концентрические с проводником окружности, лежащие в плоскостях, перпендикулярных к проводнику. К такому заключению легко прийти, если в плоскости, перпендикулярной проводнику,

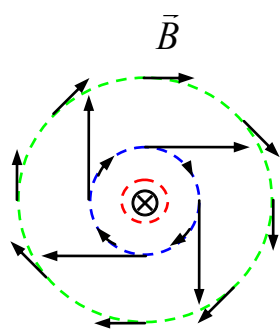


Рис. 14.4

изобразить стрелками векторы магнитной индукции в достаточно большом количестве точек. Семейства таких точек удобно выбрать по принципу равноудалённости от проводника – см. рис. 14.4. Полезно также условиться, что величина магнитной индукции поля пропорциональна густоте линий в данной области пространства. Будем придерживаться впредь этой договорённости.

Магнитное поле называется однородным, если его индукция одинакова во всех точках пространства. Линии индукции однородного поля – равноотстоящие друг от друга параллельные прямые. Такое магнитное поле создается, например, внутри очень длинной катушки с током – «соленоида».

Если длина соленоида 50 см, а его диаметр 2 см, то отличие поля в средней части этого соленоида от поля внутри бесконечно длинного не превышает 0,1 %!

Можно потренироваться в «рисовании» линий индукции магнитного поля и других, более сложных конфигураций

## § 14. Магнитное поле в вакууме

проводников с током или магнитов, используя предложенный принцип. А можно и воспользоваться, опять-таки, идеей М. Фарадея быстро и эффективно выявлять картины структуры магнитного поля, используя железные опилки, насыпанные на лист бумаги вблизи источников этого поля. Опилки играют в этом случае роль магнитных стрелок очень малых размеров.

### ❖ Отметим ряд важных особенностей линий индукции магнитного поля

**1. Линии индукции магнитного поля всегда замкнуты – такие поля называют «вихревыми».** Мы помним, что линии электростатического поля начинаются на положительных и заканчиваются на отрицательных зарядах, т.е. имеют источники. Магнитных зарядов, подобных электрическим, до сих пор в природе экспериментально не обнаружено. Формальным отражением этого факта является равенство:

$$\oint_{\Sigma} B_n dS = 0 \quad (14.6)$$

Его иногда называют теоремой Гаусса для магнитного поля.

**2.** Как и в случае электростатического поля, линии индукции магнитного поля нигде не пересекаются.

**3.** Ещё раз напомним, что мы договорились соблюдать пропорциональность между густотой этих линий и величиной вектора магнитной индукции.

### **14.6. Магнитное поле движущейся заряженной частицы**

Движущаяся заряженная частица эквивалентна элементу тока и создаёт в окружающем пространстве магнитное поле. Выражение для вектора магнитной индукции этого поля нетрудно получить, отталкиваясь от закона Био-Савара-Лапласа и «вычлняя удельное поле» отдельной заряженной частицы, движущейся внутри малого участка  $dl$  проводника с током. Для

этого, придётся вспомнить ряд хорошо известных нам соотношений и выполнить простые преобразования:  $I = jS$ ;  $\vec{j} = qn\vec{v}_{op}^{**}) \Rightarrow$

$Id\vec{l} = qn\vec{v} \cdot Sd\vec{l} = \{Sd\vec{l} = dV; n \cdot dV = N\} = Nq\vec{v}$ , где  $N$  – общее

число носителей тока внутри малого участка проводника. С учётом закона Био-Савара-Лапласа получим для одной частицы (т.е. поделив на  $N$ ) (рис. 14.5):

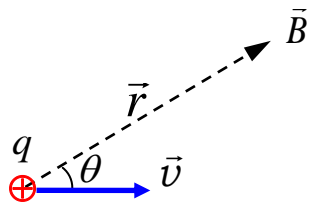


Рис. 14.5

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{q[\vec{v}, \vec{r}]}{r^3} \quad (14.7)$$

❖ **Замечание**

Таково магнитное поле, порождаемое любой движущейся заряженной частицей – электроном проводимости в металле или в пучке электронно-лучевой трубки или в вакуумном диоде, иона в растворе электролита, если скорость много меньше скорости света. Магнитное поле создают и движущиеся заряженные тела макроскопических размеров. Например, в опыте Генри Роуланда (1878 г.) удалось зарегистрировать магнитное поле в 100000 раз меньшее, чем «Земное» от быстро вращающейся заряженной пластины.

### 14.7. Закон Ампера

Мы уже упоминали, что Амперу удалось установить экспериментальным путём закон для силы магнитного взаимодействия двух длинных прямолинейных параллельных проводников с постоянным током  $F_m \sim \frac{I_1 I_2}{r}$ . Далее при анализе свойств магнитного поля мы использовали удобное понятие – «элемент тока» ( $I \cdot d\vec{l}$ ). Заметим, что оно призвано играть в магнетизме роль, аналогичную точечному заряду в электростатике. Однако стоит помнить и о том, что эти модели существенно

\*) Далее в обозначении скорости направленного движения зарядов будем опускать индекс «др».

## § 14. Магнитное поле в вакууме

различаются: точечный заряд соответствует реально существующим малым заряженным частицам, а элемент тока – гипотетический объект, ибо для протекания тока необходима электрическая цепь, и элемент тока в этой цепи можно выделить лишь мысленно. Тем не менее «закон о магнитной силе» удобно сформулировать именно для элемента тока. *Закон Ампера:*

➤ *Сила действующая на элемент тока в магнитном поле равна*

$$d\vec{F} = I \cdot [d\vec{l} \cdot \vec{B}], \text{ а её модуль } dF = I \cdot dl \cdot B \cdot \sin \alpha. \quad (14.8)$$

здесь  $d\vec{F}$  – сила, действующая на элемент тока  $I d\vec{l}$  со стороны магнитного поля  $\vec{B}$  направленного под углом  $\alpha$  к участку проводника  $d\vec{l}$  (см. рис. 14.6). Направление этой силы определяется, как для любого векторного произведения, например, по правилу “левой руки”.

Полная сила, действующая на проводник конечной длины, вычисляется, как обычно, суммированием (векторным!) “элементарных воздействий”. В частности, таким способом может быть рассчитана и сила взаимодействия двух параллельных прямолинейных проводников с током, о которой мы не раз уже упоминали. А именно, как нетрудно убедиться, сила, приходящаяся на единицу длины каждого проводника равна в этом случае:

$$F = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi R}, \quad (14.9)$$

где  $\mu_0$  – магнитная постоянная, а  $R$  – расстояние между проводниками. Это – сила притяжения, если направления токов совпадают и сила отталкивания в противном случае.

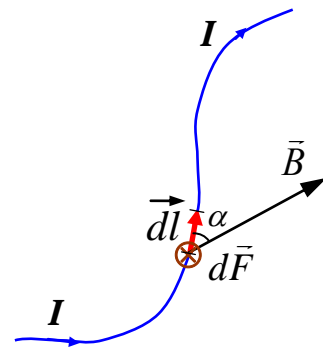


Рис. 14.6

❖ **Замечание**

Законом Ампера называют нередко и утверждение о силе магнитного взаимодействия двух элементов тока («1» и «2»). Если в равенстве (14.7) «расписать» с учётом закона Био-Савара-Лапласа индукцию магнитного поля  $d\vec{B}$ , создаваемого в месте расположения элемента тока «2» элементом тока «1», то получим соответствующее довольно громоздкое выражение. На него интересно смотреть (☺), но практически оно используется крайне редко, поэтому мы его здесь и не приводим.

### 14.8. Сила Лоренца

Мы начинали разговор о магнитных взаимодействиях с утверждения о том, что магнитное поле действует не только на токи, но и на движущиеся заряженные частицы. Такая сила получила название *силы Лоренца*. Эта сила равна

➤  $\vec{F}_L = q \cdot [\vec{v}, \vec{B}]$  Её модуль  $F_L = qvB \cdot \sin \alpha$ . (14.10)

Здесь  $\vec{v}$  – скорость движения заряженной частицы,  $\alpha$  – угол между векторами  $\vec{v}$  и  $\vec{B}$ . Ясно, что направление силы Лоренца определяется в соответствии со способом определения направления векторного произведения, например, правилом левой руки.

С формальной точки зрения можно сказать, что движущаяся заряженная частица представляет собой “элемент тока”, поэтому выражение для силы Лоренца нетрудно «вычленить» как «удельную силу Ампера». Для этого достаточно всего лишь рассмотреть малый элемент проводника с током в магнитном поле и разделить «интегральную магнитную силу» – силу Ампера – на число упорядоченно движущихся заряженных частиц. Прделайте данную процедуру для тренировки самостоятельно. Мы же отметим, что она не является «доказательством» закона (14.10) – этот закон **должен быть установлен экспериментально!**



## § 15. Теорема о циркуляции вектора магнитной индукции

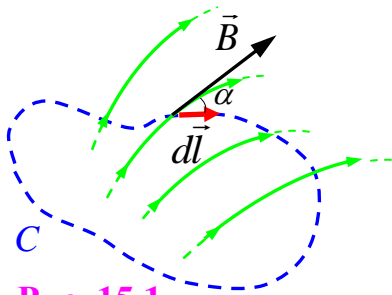
### 15.1. Циркуляция вектора. Формулировка теоремы

Использование силовой характеристики магнитного поля – вектора магнитной индукции  $\vec{B}$  будет плодотворным, если мы отработаем приёмы её расчёта по известному распределению электрических токов (движущихся зарядов) в пространстве. Как и в случае электростатики, уместно говорить о «двух способах» такого расчёта. Первый (прямой) способ опирается непосредственно на принцип суперпозиции магнитных полей и закон Био-Савара-Лапласа. Мы проиллюстрировали этот способ в §14 на примере магнитного поля бесконечно длинного прямолинейного проводника с током. Принципиально такой способ применим всегда, но зачастую влечёт за собой серьёзные математические трудности.

Подобно случаю электростатики в магнитостатике (т.е. для случая покоящихся проводников с протекающими по ним постоянными токами) формулируют теорему-следствие из вышеназванных фундаментальных знаний. Она и называется *теоремой о циркуляции вектора  $\vec{B}$* . Её применение позволяет существенно упростить решение задач о нахождении магнитного поля, порождённого токами в проводниках (проводящих средах) с плоской, цилиндрической и сферической симметрией переноса заряда. Она может служить основой «второго способа» расчёта вектора магнитной индукции  $\vec{B}$ . Он применим, однако, лишь в некоторых частных случаях (зато весьма практически значимых!) распределения электрических токов в пространстве, обладающих той или иной симметрией или сводящимся к ним. Введём, прежде всего, само понятие «циркуляции» для векторного поля на примере поля магнитостатического (см. рис. 15.1).

➡ (Опр.) *Циркуляцией вектора (например,  $\vec{B}$ ) по замкнутому*

контур  $C$  называется **криволинейный интеграл вида**  $\oint_C (\vec{B}, d\vec{l})$



**Рис. 15.1**

Под знаком интеграла – скалярное произведение векторов  $\vec{B}$  и  $d\vec{l}$  – скалярная величина. Её можно записать также в виде произведения  $B_l \cdot dl$ . Напомним,  $B_l$  означает проекцию вектора  $\vec{B}$  на направление вектора

элементарного (очень малого) перемещения  $d\vec{l}$ . Поэтому циркуляцию можно представить и в такой эквивалентной форме –  $\oint_C B_l dl$ , которой мы и будем чаще пользоваться в дальнейшем.

Напомним также, что подобный интеграл – это просто сумма (точнее предел последовательности сумм) большого числа произведений вида  $B_l \cdot dl$ , полученных при “разбиении” всей кривой « $C$ » на большое число малых участков.

Вот теперь сформулируем теорему.

**☑ Циркуляция вектора индукции  $\vec{B}$  магнитостатического поля по любому замкнутому контуру  $C$  в вакууме пропорциональна алгебраической сумме сил токов, пронизывающих поверхность, ограниченную этим контуром:**

$$\oint_C B_l dl = \mu_0 \sum_i I_i \quad (15.1)$$

Коэффициент пропорциональности в системе единиц СИ равен магнитной постоянной  $\mu_0$ . В том случае, когда через поверхность  $\Sigma$ , ограниченную контуром  $C$ , протекают распределённые токи, в правой части вместо суммы следует записать поверхностный интеграл вида  $\int_{\Sigma} j_n dS$ . Этот интеграл, как нетрудно догадаться по опыту работы с электростатическим полем, имеет смысл **потока вектора плотности тока  $\vec{j}$**  через поверхность  $\Sigma$ , ограниченную

## § 15. Теорема о циркуляции

контуром  $C$  – предполагается, что именно через неё и переносится заряд!

### 15.2. Доказательство теоремы о циркуляции вектора магнитной индукции

Как и при доказательстве теоремы Гаусса в электростатике проведём его по шагам, двигаясь от простого к сложному.

а) Рассмотрим сначала простейший случай – постоянный ток протекает по бесконечно длинному прямолинейному тонкому проводнику. Контур  $C$  – окружность, располагающаяся в плоскости, перпендикулярной проводнику, проходящему через её центр – см. рис. 15.2.

Очевидно, прежде всего, что контур  $C$  совпадает с одной из линий индукции магнитного поля проводника. Отсюда ясно, что под знак интеграла при расчёте циркуляции попадают просто произведения  $B(r)dl$  (на любом малом участке контура направления векторов  $\vec{B}$  и  $d\vec{l}$  совпадают!). В силу осевой симметрии модуль вектора  $\vec{B}$  зависит только от расстояния до проводника и постоянен на окружности радиуса  $r$ , а потому его можно вынести за знак интеграла. Получаем:

$$\oint_C B_l dl = \oint_C B(r) dl = B(r) \oint_C dl = B(r) \cdot 2\pi r. \quad (*)$$

Здесь учтено, что оставшийся интеграл  $\oint_C dl$ , равен по определению математики длине контура  $C$ , т.е. длине окружности  $2\pi r$ . Индукция магнитного поля бесконечно длинного прямолинейного проводника на расстоянии  $r$  от него равна, как мы уже знаем (результат применения закона Био-Савара-Лапласа и принципа суперпозиции)

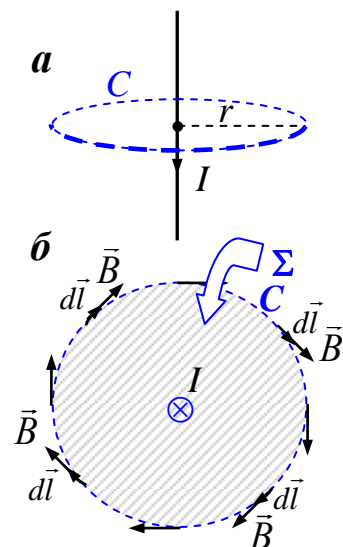


Рис. 15.2

$B(r) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$ . Подставим это в правую часть соотношения (\*) и

придём к результату для циркуляции:

$$\oint_C B_l dl = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \cdot 2\pi r = \mu_0 \cdot I,$$

что как раз и совпадает с утверждением теоремы.

б) Несколько усложним ситуацию – пусть контур  $C$  по-прежнему лежит в плоскости перпендикулярной проводнику, охватывает проводник, но на этот раз имеет произвольную форму (рис. 15.3,а). Запишем сначала цепочку очевидных «по геометрическим соображениям» равенств:

$$(\vec{B}, d\vec{l}) = B_l \cdot dl = B \cdot dl_B \equiv B \cdot dl_{\perp} = B \cdot r \cdot d\alpha$$

и подставим сюда, как и в первом случае, значение модуля вектора индукции магнитного поля прямолинейного проводника

$\left( B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \right)$ . В итоге получим подинтегральное выражение для

вычисления циркуляции:  $\frac{\mu_0 I}{2\pi r} \cdot r \cdot d\alpha = \frac{\mu_0 I}{2\pi} d\alpha$ . Теперь посчитать

циркуляцию становится очень просто – ведь переменной величиной является только угол поворота  $\alpha$  радиус вектора  $\vec{r}$  при обходе контура  $C$ . Получаем:

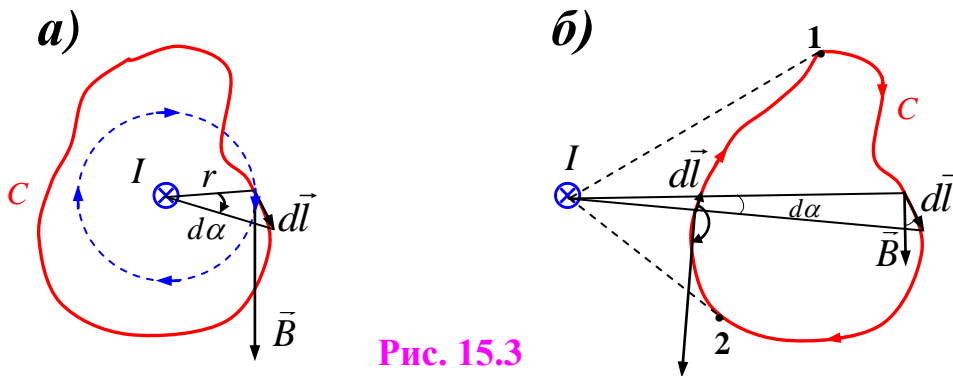


Рис. 15.3

## § 15. Теорема о циркуляции

$$\oint_C B_l dl = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \cdot \oint_C d\alpha = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \cdot 2\pi = \mu_0 \cdot I,$$

что опять-таки соответствует утверждению теоремы.

е) Пусть теперь проводник проходит вне контура  $C$ . Контур придётся разбить теперь на две составляющие и при вычислении интеграла двигаться сначала от точки 1 к точке 2 по более удалённой его части, а затем от точки 2 к точке 1 возвращаться по более близкой (см. рис. рис. 15.3,б). При этом интеграл разбивается на две части. Для участка 1–2 угол между векторами  $\vec{B}$  и  $d\vec{l}$  острый и знак их скалярного произведения положителен. Напротив, для участка 2–1 угол между векторами  $\vec{B}$  и  $d\vec{l}$  тупой и знак произведения противоположен. В итоге получаем:

$$\oint_C B_l dl = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \cdot \left( \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} d\alpha - \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} d\alpha \right) = 0$$

Это означает, что токи лежащие вне поверхности, ограниченной контуром (не «пронзающие» эту поверхность), вклада в циркуляцию не дают.

з) Нам остаётся провести лишь несложные обобщения на случаи – контур не является плоским (нетрудно сообразить, что попутно снимаются ограничения и на условие прямолинейности самого проводника) (рис. 15.4); самих проводников с током несколько (много) – рис. 15.5. Все малые элементы произвольного неплоского контура можно представить как сумму компонент,

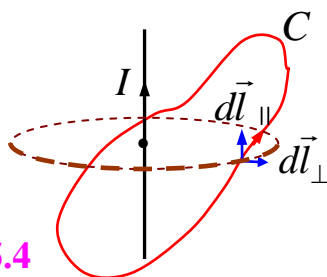


Рис. 15.4

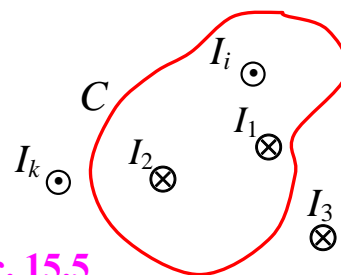


Рис. 15.5

лежащих в плоскости перпендикулярной проводнику ( $d\vec{l}_\perp$ ), и составляющих, параллельных ему ( $d\vec{l}_\parallel$ ). Хотя при обходе замкнутого контура  $C$  в общем случае происходит не только поворот соответствующего радиус-вектора ( $d\alpha$ ), но и смещение параллельно проводнику, подынтегральное выражение изменяется ровно так же, как и в случае плоского контура на величину

$$(\vec{B}, d\vec{l}) = (\vec{B}, d\vec{l}_\perp) + (\vec{B}, d\vec{l}_\parallel) = B \cdot r \cdot d\alpha$$

$$= 0 \quad \text{Векторы взаимно перпендикулярны!}$$

Дальнейшие действия аналогичные пунктам б) и в) приведут нас к тем же самым результатам –  $\mu_0 \cdot I$ , для проводников «охваченных» контуром и 0 для «не охваченных».

д) Последний шаг доказательства теоремы требует обобщения на случай присутствия произвольного количества проводников с током. Мы лишь приведём соответствующий рисунок (см. рис. 15.5) и скажем, что результат очевиден с учётом принципа суперпозиции магнитных полей. То же относится и к вопросу о любом переносе заряда через поверхность, ограниченную контуром, только сумму дискретных величин придётся заменить интегралом хорошо знакомого вида  $\int_{\Sigma} j_n dS$  (поток!).

Теорема доказана!

### **15.3. Применение теоремы о циркуляции вектора магнитной индукции**

Как мы уже отмечали, применение теоремы о циркуляции вектора  $\vec{B}$  оправданно при решении задач с плоской, цилиндрической и сферической симметрией переноса заряда. В этих случаях за счёт выбора формы контура  $C$  интеграл в левой части равенства (15.1) можно свести к произведению модуля

## § 15. Теорема о циркуляции

вектора  $\vec{B}$  на длину контура или отдельных его частей. Проиллюстрируем это на примере.

**Пример 1.** По длинному прямолинейному проводнику радиуса  $R$  течёт ток. Плотность тока распределена равномерно по сечению проводника и равна  $j$ . Найти зависимость индукции магнитного поля тока  $\vec{B}(r)$  как **внутри, так и вне** этого проводника

Договоримся сразу, что магнитная проницаемость вещества провода и окружающей среды практически равна единице (т.е. эти вещества не являются ферромагнитными). Для длинного проводника (строго говоря, «бесконечно длинного») можно говорить о цилиндрической симметрии задачи – в любой плоскости, перпендикулярной проводнику, линии поля – окружности с центрами на оси проводника. Модуль вектора  $\vec{B}$  зависит только от расстояния до проводника и постоянен на любой такой линии. Для применения теоремы о циркуляции, выберем поэтому контур  $C$  в виде окружности радиуса  $r$ , совпадающей с одной из линий поля (см. рис. 15.6,а). Векторы  $\vec{B}$  и  $d\vec{l}$  на любом её участке

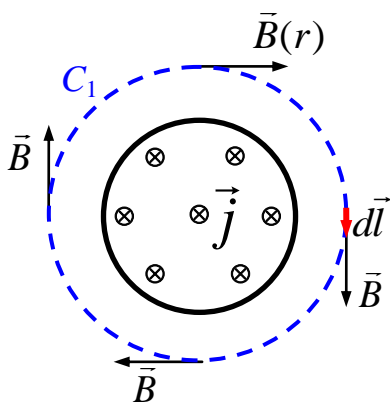


Рис. 15.6,а

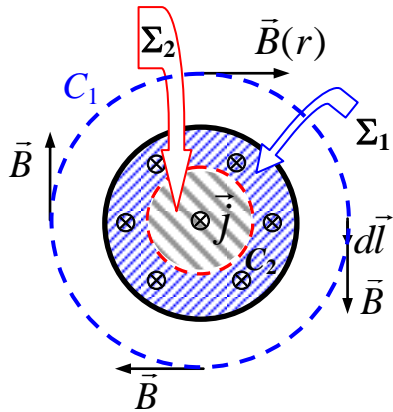
сонаправлены, поэтому:

$$\oint_C B_l dl = \oint_C B(r) dl = B(r) \oint_C dl = B(r) \cdot 2\pi r. \quad (*)$$

(мы уже проделывали подобное при доказательстве теоремы – шаг а).

Отметим теперь, что закон изменения индукции с расстоянием, вероятно, различен для области пространства вне и внутри проводника.

И применим теорему о циркуляции дважды, выбрав соответствующие контуры  $C_1$  и  $C_2$  (см. рис. 15.6,б) – окружности с радиусом  $r$  большим и меньшим, чем радиус  $R$  цилиндрического проводника с током соответственно. Выражения для циркуляции



**Рис. 15.6**

магнитного поля для обоих контуров по виду записи совершенно одинаковы –  $B \cdot 2\pi r$ . Отличия будут лишь в диапазоне значений радиуса окружности (для  $C_1$ :  $r > R$ , а для  $C_2$ :  $0 < r < R$ ) и в правой части равенства (15.1), соответствующего теореме о циркуляции:

$$\mu_0 \cdot j \cdot \pi R^2 \quad \text{— для контура } C_1 \ (r > R),$$

охватывающего всю поверхность  $\Sigma_1$ , через которую переносится заряд, и

$$\mu_0 \cdot j \cdot \pi r^2 \quad \text{— для контура } C_2, \text{ охватывающего лишь поверхность } \Sigma_2, \text{ т.е.}$$

при  $0 < r < R$ .

Мы здесь учитываем, что плотность тока отлична от нуля и постоянна ( $j$ ) только в пределах проводника (поверхности  $\Sigma_1$ ) радиуса  $R$ . Результаты для индукции магнитного поля можно записать в виде:

$$B(r) = \frac{\mu_0 j R^2}{2} \frac{1}{r} \quad \text{— вне}$$

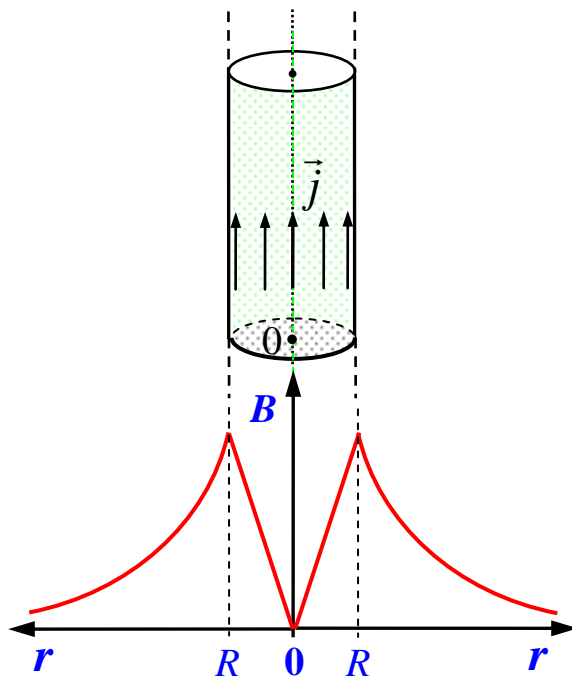
проводника, т.е. при  $r > R$  и

$$B(r) = \frac{\mu_0 j}{2} r \quad \text{— внутри}$$

проводника, т.е. при  $0 < r < R$ .

На рисунке 15.7 показано распределение магнитного поля в радиальном по отношению к оси проводника направлении.

Ясно, что направление магнитного поля в любой точке пространства определяется “правилом правого винта”.



**Рис. 15.7**



**Пример 2. Найдём индукцию магнитного поля  $\vec{B}$  соленоида**

Соленоидом, как мы уже знаем, называют длинную катушку – длина катушки много больше её диаметра. Прежде чем применять рассмотренный выше подход (теорему о циркуляции) сделаем некоторые заключения о структуре поля соленоида. Катушка состоит из большого количества одинаковых витков с током, каждый из которых даёт свой вклад в результирующее магнитное поле. При этом для каждого витка найдётся симметрично ему расположенный по отношению к плоскости, перпендикулярной к оси катушки ( $O_1O_2$ , см. рис. 15.8). Сумма векторов индукции от симметричных витков в любой точке этой плоскости даёт вектор параллельный оси соленоида. Итак, направление векторов может быть **только параллельным оси катушки** как вне, так и внутри неё.

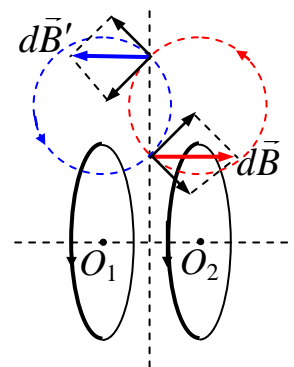


Рис. 15.8

Выберем теперь контур 1–2–3–4 для применения теоремы о циркуляции в виде прямоугольника, две стороны которого располагаются вдоль оси катушки, а две другие – перпендикулярно. Одна из сторон 1–2 при этом расположена внутри катушки, а противоположная 3–4 – вне (см. рис. 15.9).

Циркуляция вектора  $\vec{B}$  равна:

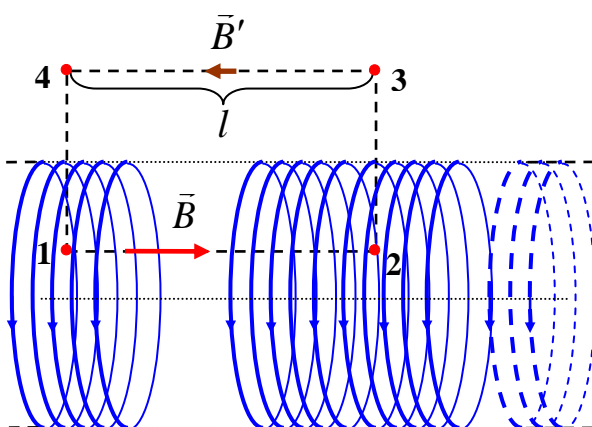


Рис. 15.9

$$\oint_C \vec{B}_l dl = \int_1^2 \vec{B}_l dl + \int_2^3 \vec{B}_l dl + \int_3^4 \vec{B}_l dl + \int_4^1 \vec{B}_l dl = B \cdot l$$

Как получен этот результат? Второе и четвёртое слагаемое равны нулю, так как на любом участке сторон контура 2–3 и 4–1 векторы  $\vec{B}$  и  $d\vec{l}$  взаимно перпендикулярны. Участок 3–4

может быть выбран на любом расстоянии от оси соленоида, в частности на очень большом, где магнитное поле пренебрежимо мало (вспомним закон убывания индукции поля с расстоянием по закону БСЛ). Поэтому выражение для циркуляции практически полностью определяется индукцией поля внутри соленоида. Остаётся приравнять его произведению  $\mu_0$  на сумму сил токов, пронизывающих контур. Получаем:

$$B \cdot l = \mu_0 \cdot \sum_i I_i \quad Bl = \mu_0 \cdot N \cdot I, \quad \text{или} \quad Bl = \mu_0 \cdot nl \cdot I,$$

где  $n$  – число витков на единицу длины соленоида, а  $N$  – общее число витков на всей длине катушки  $l$ . Отсюда получаем, что модуль магнитной индукции поля *внутри соленоида* равен:

$$B = \mu_0 \cdot nI \text{ *)} . \quad (15.2)$$

Независимость циркуляции от расположения внешнего участка контура (3–4) говорит также о том, что магнитное поле вне соленоида очень мало. Практически все поле сосредоточено *внутри катушки* и *однородно*. Таким образом, длинный соленоид в учении о магнетизме играет роль аналогичную конденсатору в электростатике (напомним, что электрическое поле конденсатора однородно и сосредоточено между его обкладками).

---

\*) Если соленоид заполнен однородным изотропным веществом, то индукция возрастает в  $\mu$  раз, где  $\mu$  – магнитная проницаемость этого вещества.

## **§ 16. Электромагнитная индукция**

### **16.1. Открытие Фарадеем явления электромагнитной индукции («опыты Фарадея»)**

«Экономический эффект от открытия М. Фарадея превышает таковой от Лондонской товарной биржи за все годы её существования»

М. Тэтчер

Мы знаем, что электрические токи создают в окружающем пространстве магнитное поле. А может ли магнитное поле вызвать («*индуцировать*») появление тока в проводнике?

«... представляется весьма необычным, что всякий электрический ток сопровождается магнитным действием и в то же время в хороших проводниках, находящихся в сфере этого действия, не индуцируется ток или какие-либо иные сходные процессы» – писал Фарадей в своих дневниках. Он чувствовал отсутствие симметрии: поскольку электричество порождает магнетизм, он надеялся, что и магнетизм должен вызывать электричество.

В статье М. Фарадея 1831 г. приводится описание более десятка экспериментов, вскрывающих все существенные особенности явления электромагнитной индукции (ЭМИ). Фарадей установил, при каких условиях возможно появление тока благодаря магнитному воздействию. В чём суть этих опытов?

В качестве источника магнитного поля Фарадей использовал постоянный магнит, а также катушку, включённую в электрический контур («1») с источником тока (электромагнит). Для регистрации индукционных токов применялась другая катушка, входящая в другой, «регистрирующий контур» («2») с чувствительным к протеканию заряда электроприбором – гальванометром  $G$ . В этом приборе используется способность магнитного поля токов поворачивать намагниченную стрелку – см. рис. 16.1. Перечислим основные наблюдаемые факты.

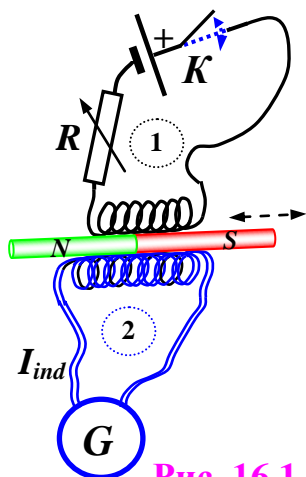


Рис. 16.1

1) Если регистрирующая катушка («2») находилась в поле неподвижного электромагнита (катушка «1») даже с очень большим постоянным током (то же и в случае неподвижного постоянного магнита), то гальванометр  $G$  не фиксировал протекание тока. Вывод – *постоянное магнитное поле любой величины не вызывает появление электрического тока в неподвижном проводнике.*

2) При пространственных перемещениях регистрирующей катушки или магнитов гальванометр показывал появление тока – **«индукционный» ток  $I_{ind}$  в контуре «2»**. Какой именно контур «1» или «2» (или магнит) находится в движении, значения не имело – роль играет лишь их относительное движение.

3) То же происходило и при замыкании или размыкании ключа « $K$ », а также и при изменении силы тока в первом контуре.

4) Фарадеем был обнаружен и ряд более тонких эффектов. Например, появление индукционного тока  $I_{ind}$  во втором (регистрирующем) контуре в процессе деформации второй катушки или при внесении в неё железных сердечников.

Фарадей проанализировал все проявления электромагнитной индукции и пришёл к выводу – изменения в структуре магнитного поля приводят заряженные частицы в упорядоченное движение. А именно, **электрический ток индуцируется<sup>\*)</sup> («наводится») при любом изменении магнитного потока** через поверхность, ограниченную замкнутым проводником (контуром).

<sup>\*)</sup> Происхождение термина обусловлено аналогией с наведением электрического заряда – «электростатической индукцией»

## § 16. Электромагнитная индукция

Итак (по Фарадею), *явление электромагнитной индукции состоит в возникновении электрического тока в проводящем контуре при изменении магнитного потока через поверхность, ограниченную этим контуром*<sup>\*)</sup>.

Дополнительные эксперименты позволили количественно связать силу индукционного тока  $I_{\text{инд}}$  с изменением магнитного потока. Оказалось, что *величина  $I_{\text{инд}}$  пропорциональна скорости изменения магнитного потока  $\Phi_B$* :

$$I_{\text{инд}} \sim \left| \frac{\Delta \Phi_B}{\Delta t} \right| \quad (16.1)$$

А что мы собственно называем магнитным потоком? Более строгий термин, конечно же – «поток вектора магнитной индукции». Как и для любого векторного поля его следует записать так:

$$\Phi_B = \int_{\Sigma} \vec{B}_n dS \quad (\text{или так: } \Phi_B = \int_{\Sigma} (\vec{B}, d\vec{S})) \quad (16.2)$$

Напомним, что этот поверхностный интеграл – это не что иное как просто сумма (точнее предел последовательности сумм) большого числа «элементарных потоков» – произведений нормальных компонент вектора  $\vec{B}$  на площадь соответствующего малого элемента ( $B_n dS$ ), на которые предварительно «разбивают» поверхность  $\Sigma$ , через которую и определяют «поток».

### 16.2. «Правило» Ленца (1834 г.)

А как направлен индукционный ток? Проанализировав различные проявления электромагнитной индукции, Ленцу<sup>\*\*)</sup> удалось через несколько лет после опытов Фарадея установить закономерность и в этом вопросе.

<sup>\*)</sup> Электромагнитной индукцией объясняют также разделение зарядов (возникновение ЭДС) в проводниках, движущихся в магнитном поле или находящихся в переменных магнитных полях, а также появление «вихревого» электрического поля при изменении магнитного (по Максвеллу).

<sup>\*\*)</sup> Эмилий Христофорович Ленц – российский учёный, ректор Санкт-Петербургского Университета. Участник первого восхождения на Эльбрус.

➤ *Индукционный ток всегда направлен так, что его магнитное поле препятствует изменению магнитного потока через поверхность, ограниченную контуром*

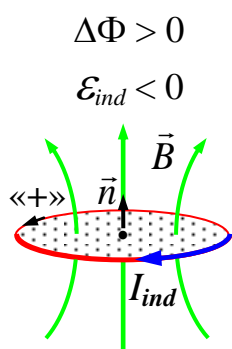
Более кратко говорят ещё и так:

*Индукционный ток направлен так, чтобы препятствовать причине, его вызывающей.*

Увы, что «длинные», что «краткие версии» этой формулировки закономерности зачастую не гарантируют от путаницы. Чтобы разобраться в вопросе, надо потренироваться в несложных случаях проявления ЭМИ. Проиллюстрируем это на примере с плоским кольцевым контуром.

### Пример

Выберем произвольно (т.е. просто договоримся) «положительное» направление обхода кольцевого контура – против часовой стрелки, если «смотреть сверху» (см. рис. 16.2). Используем правило правого винта для нахождения «положительного направления нормали»  $\vec{n}$  к поверхности, ограниченной этим контуром. Это позволит



**Рис. 16.2**

определить знак магнитного потока в исходном состоянии системы:  $\Phi_0 > 0$ <sup>\*)</sup>. Пусть индукция поля увеличивается ( $\Delta B > 0$ ), тогда  $\Delta\Phi > 0$  и, следовательно, по закону Ленца, должен появиться индукционный ток, протекающий так, чтобы его собственное магнитное поле было направлено навстречу «внешнему» нарастающему полю  $\vec{B}$ . Вот тогда он и будет «препятствовать увеличению магнитного потока через поверхность, ограниченную контуром». Этот ток будет течь в «отрицательном» направлении, т.е. по часовой стрелке в нашем примере, если смотреть сверху – см. рис. 16.2.

<sup>\*)</sup> Будем здесь и далее опускать индекс « $B$ », поскольку очевидно, что речь идёт о магнитном поле.

## § 16. Электромагнитная индукция

---

Напротив, если индукция поля будет убывать (или магнитный поток будет уменьшаться по любой другой причине) –  $\Delta\Phi < 0$ , результат изменится на противоположный: появится индукционный ток в положительном направлении, т.е. против часовой стрелки.

### 16.3. Закон электромагнитной индукции (Фарадея – Максвелла)

Возникновение индукционного тока в проводнике обусловлено появлением ЭДС – «ЭДС электромагнитной индукции» ( $\mathcal{E}_i$ ). Сила этого тока по закону Ома равна  $I_i = \mathcal{E}_i / R$ , где  $R$  – сопротивление контура.

➤ *Закон электромагнитной индукции Фарадея устанавливает, что ЭДС электромагнитной индукции в проводящем контуре пропорциональна скорости изменения магнитного потока через поверхность, ограниченную этим контуром:*

$$\mathcal{E}_i = - \frac{d\Phi}{dt} \quad (16.3)$$

Коэффициент пропорциональности в системе СИ равен 1. Знак минус соответствует *договоренности* обозначать направление индукционного тока, определяемое по *правилу Ленца*: ЭДС считается положительной, если направление индукционного тока составляет с вектором положительной нормали к поверхности, ограниченной контуром, «правовинтовую систему».

В нашем примере с плоским кольцевым контуром при увеличении индукции поля  $\frac{d\Phi}{dt} > 0$  ЭДС индукции отрицательна  $\mathcal{E}_i < 0$ , т.е. она направлена против «положительного» направления обхода контура. В противном случае ( $\frac{d\Phi}{dt} < 0$ ), знак ЭДС (и направление индукционного тока!) изменится на противоположный.

❖ **Замечание**

В заключение этого пункта мы вынуждены оговориться, что ту форму записи закона ЭМИ, которую мы привели и которая сейчас известна многим школьникам, строго говоря, придал ей Максвелл, обобщив и развив открытия Фарадея. Сам Фарадей, не обладая фундаментальным и систематическим математическим образованием, вынужден был, зачастую, объяснять свои мысли лишь при помощи наглядных картинок. Прочитав позже работу Максвелла, он писал, однако: **«К своему спокойствию, я обнаружил, что эксперимент может не бояться математики, а успешно с ней соперничать в процессе открытия»**. Это же скажем, забегая вперёд, относится и к другому математическому формализму, который применил Максвелл к явлениям электромагнетизма: **«Сначала я даже испугался, ... когда увидел такую математическую силу, применённую к вопросу – описывал Фарадей свои впечатления, – но потом удивился, видя, что вопрос выдерживает это столь хорошо»**.

### **16.4. ЭДС индукции в движущихся проводниках**

Круг явлений, который мы относим теперь к электромагнитной индукции не ограничивается теми, что наблюдались в опытах Фарадея. Та же природа и у хорошо знакомого вам по школьному курсу эффекта возникновения ЭДС в движущихся в магнитном поле незамкнутых проводниках. И вообще всякий раз, когда меняется «структура магнитного поля». Более конкретно, что скрывается за этой туманной фразой, мы увидим, когда будем обсуждать трактовку явления электромагнитной индукции Максвеллом.

А сейчас обратимся к рисунку (см. рис.16.3,*a*). На нём проводящий стержень движется перпендикулярно линиям магнитного поля (например, антенна автомобиля в магнитном поле Земли). Между концами этого стержня возникает разность потенциалов, которую можно зарегистрировать, например, электрометром. Какова причина? Ведь тут нет никакого «замкнутого проводящего контура», чтобы хотя бы формально



## § 16. Электромагнитная индукция

можно было применить закон ЭМИ Фарадея. В проводнике происходит реальное разделение зарядов.

Что же «толкает» электроны проводимости металлического стержня, заставляя их скапливаться на концах проводника? В данном случае – это сила Лоренца! На врезке (см. рис.16.3,б) показан вид сверху на участок проводника в увеличенном масштабе и один из свободных электронов внутри него. Ведь свободные электроны вовлечены в направленное движение со скоростью  $\vec{v}$  вместе со стержнем в магнитном поле.

Возникающая ЭДС электромагнитной индукции равна как раз удельной работе «сторонней силы» – силы Лоренца. Работа этой силы по разделению зарядов в проводнике равна  $A^{cm} = qvBl$ . После деления её на перенесённый заряд получим  $\mathcal{E}_i = \frac{qvBl}{q} = vBl$ . Сам этот результат известен вам со

школы, только для простоты мы избрали для анализа ситуации простейшую геометрию – стержень движется в плоскости перпендикулярной линиям индукции однородного магнитного поля.

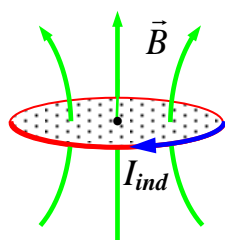


Рис. 16.2

Завершим мы этот пункт нашей программы вопросом для самостоятельного обдумывания. А что толкает электроны проводимости в случае неподвижного проводящего контура в переменном магнитном поле – см. рис. 16.2? Уж на этот-то раз тут ведь неоткуда появиться ни силе Ампера, ни силе Лоренца!

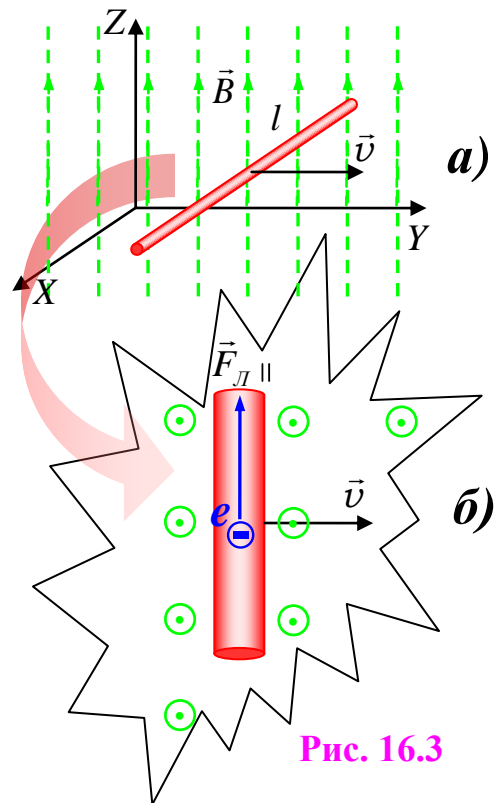


Рис. 16.3

## § 17. Самоиндукция

### 17.1. Явление самоиндукции. Индуктивность

Электромагнитная индукция проявляет себя во многих формах, в частности, при изменении тока в любом контуре возникают

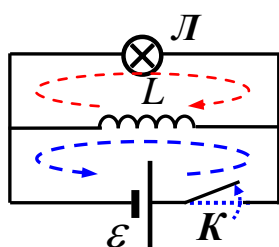


Рис. 17.1

дополнительные ЭДС – ЭДС *самоиндукции* ( $\mathcal{E}_{si}$ ) и дополнительные токи  $I_{si}$  – так называемые «экстратоки». Для классической демонстрации самоиндукции используется схема, показанная на рисунке 17.1. Сначала при замкнутом ключе « $K$ » постоянный ток от источника протекает по

лампочке « $L$ » и она горит вполнакала. В момент резкого размыкания ключа « $K$ » цепь питания лампочки от источника прерывается, однако лампочка ярко вспыхивает благодаря экстратоку самоиндукции. При этом ЭДС самоиндукции  $\mathcal{E}_{si}$ , возникающая благодаря убывающему «основному» току через катушку, соединённую параллельно лампочке, оказывается даже больше ЭДС источника постоянного тока  $\mathcal{E}$ . Напротив, при замыкании ключа возникают экстратоки направленные навстречу основному току, поэтому нарастание тока в контуре замедляется – лампочка вспыхивает с запаздыванием, но этот эффект удобнее продемонстрировать на другой схеме, о которой мы скажем чуть ниже.

Пока же разберёмся в явлении поподробнее. Нам понятно, что экстратоки появляются в строгом соответствии с законом ЭМИ Фарадея: в цепи изменяется ток, изменение потока магнитного поля этого тока через поверхность ограниченную контуром (говорят: «сцепленного с контуром») ведёт к появлению ЭДС, на этот раз ЭДС **самоиндукции**:

## § 17. Самоиндукция

$$\mathcal{E}_{si} = -\frac{d\Phi_s}{dt} \quad (17.1)$$

Индекс «s» здесь свидетельствует, что это «собственный» (от английского *self*) магнитный поток. А что можно сказать об этом потоке?

Мы знаем, что по определению магнитного потока элементарный поток через каждый малый элемент поверхности пропорционален магнитной индукции в месте расположения этого элемента:  $d\Phi_s \sim B(x,y,z)$ . В то же время модуль вектора магнитной индукции по закону Био-Савара-Лапласа пропорционален силе тока в контуре, т.е.  $B(x,y,z) \sim I$ <sup>\*</sup>). Полный поток вектора магнитной индукции через всю поверхность ограниченную контуром складывается из элементарных потоков ( $\Phi_s = \int_{\Sigma} d\Phi$ ) и, следовательно, также оказывается прямопропорционален силе тока в контуре, т.е.  $\Phi_s \sim I$ . Иначе говоря, можно записать:

$$\Phi_s = LI, \quad (17.2)$$

введя обозначение  $L$  для коэффициента пропорциональности.

► **(Опр.)** *Индуктивностью контура  $L$  (или коэффициентом самоиндукции) называется отношение собственного магнитного потока через поверхность, ограниченную контуром с током к силе тока в этом контуре:*

$$L = \frac{\Phi_s}{I} \quad (17.3)$$

**Пример.** Найдём индуктивность  $L$  соленоида

Ранее мы выяснили, что магнитное поле соленоида практически однородно внутри него, и его индукция равна  $B = \mu_0 nI$ . Приведём далее без подробных комментариев цепочку простых преобразований, позволяющих связать «собственный» магнитный

<sup>\*</sup> При отсутствии вблизи контура ферромагнетиков.

поток контура с силой тока в нём. Магнитный поток через все  $N$  витков соленоида равен:

$$\Phi_s = N \cdot \mu_0 n I \cdot S = n l \cdot \mu_0 n I \cdot S = \{ \text{с учётом } V = Sl \} = \mu_0 n^2 V \cdot I.$$

Теперь остаётся лишь выписать искомый коэффициент пропорциональности – индуктивность соленоида:

$$L = \mu_0 n^2 V. \quad (17.4)$$

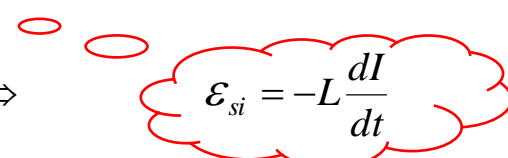
От чего же зависит индуктивность? На примере соленоида мы видим – прежде всего, от «геометрических» факторов: размеров и формы контура.

Однако есть и ещё один важный фактор! В этом нетрудно убедиться практически. Если вставить в соленоид, например, железный сердечник все магнитные эффекты заметно увеличатся – возрастут наблюдаемые экстратоки в цепях с такой катушкой. Отсюда следует, что индуктивность зависит также и от магнитных свойств окружающей контур среды. Введём пока что сугубо формально понятие *магнитной проницаемости среды* следующим образом:

$$\frac{L}{L_0} = \mu. \quad (17.5)$$

В этом временном определении  $L_0$  и  $L$  – индуктивности контура в вакууме и в однородной среде соответственно. Позже мы разберёмся с этим понятием поподробнее. А сейчас, с учётом сказанного, приведём более общий результат для индуктивности соленоида:

$$L = \mu \mu_0 n^2 V. \quad (17.6)$$

**ЭДС самоиндукции.** С учётом введённого понятия индуктивности, как мы можем записать теперь ЭДС самоиндукции? А вот как: 

$$\mathcal{E}_{si} = -\frac{d\Phi_s}{dt} = -\frac{d(LI)}{dt} \Rightarrow \mathcal{E}_{si} = -L \frac{dI}{dt} \quad (17.7)$$

### ❖ По поводу последнего равенства сделаем два замечания

1. Надо иметь в виду, что речь идёт о контуре с неизменной индуктивностью – т.е. он не деформируется, и не меняются магнитные свойства среды – например, в катушку не вставляют ферромагнитный сердечник.

2. Иногда, опираясь как раз на равенство (17.7), дают **определение** индуктивности контура:  $L = \left| \frac{\mathcal{E}_{si}}{dI/dt} \right|$ . Однако, с учётом замечания 1, лучше так не делать.

В заключение этого пункта упомянем ещё об одном термине. Если два контура с током 1 и 2 находятся близко друг к другу, то говорят о их **взаимоиндукции**. Ведь магнитное поле контура 1 создает поток через поверхность, ограниченную контуром 2, который прямо пропорционален силе тока в контуре 1, и наоборот:

$$\Phi_{21} = L_{21}I_1, \quad \Phi_{12} = L_{12}I_2.$$

Коэффициенты пропорциональности  $L_{12}$  и  $L_{21}$  называются коэффициентами взаимной индукции контуров или их взаимными индуктивностями. Они зависят от размеров, формы контуров, их взаимного расположения, а также от магнитных свойств окружающей среды. Можно показать, что в отсутствии ферромагнетиков эти коэффициенты равны  $L_{12} = L_{21}$  («теорема взаимности»).

### 17.2. Исчезновение и установление тока в контуре (кинетика процессов)

С явлением самоиндукции (наличием индуктивности) связаны так называемые «переходные процессы» в электрических цепях – установление и исчезновение токов происходит с запаздыванием. Так, например, при замыкании ключа «К» в контуре, представленном на рис. 17.2, сила тока достигает значения  $I_0 = \mathcal{E}/R$  не сразу<sup>\*)</sup>.

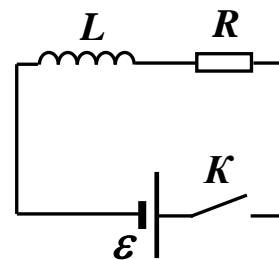


Рис. 17.2

<sup>\*)</sup> Внутренним сопротивлением источника тока и омическим сопротивлением катушки пренебрегаем.

Найдём закон изменения силы тока  $I(t)$ , используя 2-е правило Кирхгофа:  $IR = \mathcal{E} - L \frac{dI}{dt}$ . Перенесём в левую часть ЭДС источника

$R\left(I - \frac{\mathcal{E}}{R}\right) = -L \frac{dI}{dt}$  и выберем в качестве новой переменной величину,

стоящую в скобках:  $i = I - \frac{\mathcal{E}}{R}$ . Теперь надо разделить переменные:

$\frac{di}{i} = -\frac{R}{L} dt$  и проинтегрировать обе части равенства. Получим:

$i(t) = i_0 \cdot e^{-\frac{R}{L}t}$  и, возвращаясь к исходной переменной  $I$ , находим искомый закон нарастания силы тока в контуре:

$$I(t) = I_0 \cdot (1 - e^{-t/\tau}), \quad (17.8)$$

где  $\tau = \frac{L}{R}$  – т.н. постоянная времени контура, как раз и отвечающая за «затянутость» переходного процесса. Графически этот закон представлен на рис. 17.3.

А на рис. 17.4 представлена ещё одна схема, удобная для демонстрации проявлений самоиндукции. В параллельных ветвях контура включены две одинаковые лампочки  $\mathcal{L}_1$  и  $\mathcal{L}_2$ . В одной ветви последовательно с лампочкой « $\mathcal{L}_1$ » соединена катушка индуктивности  $L$ , в другой – последовательно с лампочкой « $\mathcal{L}_2$ » резистор, сопротивление  $r$  которого подбирают равным омическому сопротивлению провода, из которого намотана катушка  $L$ . При замыкании ключа « $K$ » лампочка  $\mathcal{L}_2$  загорается сразу, лампочка  $\mathcal{L}_1$  постепенно. В демонстрационной установке обычно предусмотрена

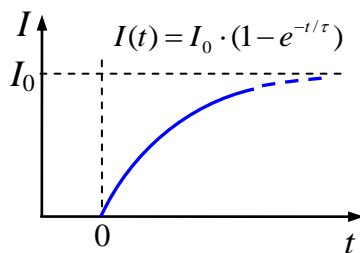


Рис. 17.3

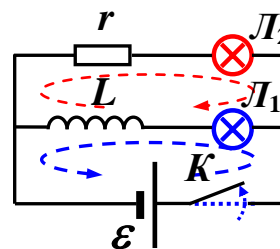


Рис. 17.4

возможность быстро изменять полярность источника тока (по сути, это эквивалентно подключению схемы к источнику переменного напряжения). При значительной скорости изменения полярности, в этом случае, лампочка  $L_2$  вообще не загорается, демонстрируя инерционность катушки индуктивности по отношению к изменениям тока – яркое проявление самоиндукции!

### 17.3. Энергия магнитного поля

Магнитное поле также как и электрическое обладает энергией. Чтобы убедиться в этом, проанализируем процессы в уже знакомой электрической цепи – см. рис. 17.4. После размыкания ключа  $K$  ток в контуре, состоящем из катушки и резистора не исчезает мгновенно, благодаря явлению самоиндукции. При протекании экстратока самоиндукции, совершается работа по перемещению зарядов в проводниках, в итоге выделяется тепло. Каков источник этой работы и этой тепловой энергии? Следует считать, что это *энергия магнитного поля*, окружающего проводники с током. Определяя работу при исчезновении поля, можно получить выражение для его энергии. Прделаем это.

Элементарная работа сторонних сил (в нашем случае это силы вихревого электрического поля<sup>\*)</sup>) по перемещению заряда  $dq$  равна:

$$dA = \mathcal{E}_{si} \cdot dq = -L \frac{dI}{dt} \cdot Idt = -L \cdot IdI^{**}), \quad (17.9)$$

Полная работа вычисляется суммированием элементарных работ, т.е. интегрированием выражения (17.9) в пределах диапазона изменения исчезающего тока в контуре:

$$A = -L \cdot \int_{I_0}^0 I dI = \frac{LI_0^2}{2}.$$

Эта работа определяет энергию, «запасённую» в магнитном поле:

---

<sup>\*)</sup> Разговор о нём у нас ещё впереди, а пока придётся довольствоваться «школьными» представлениями на этот счёт.

<sup>\*\*)</sup> Мы использовали здесь закон ЭМИ для самоиндукции (17.7) и определение силы тока  $I = dq/dt$ .



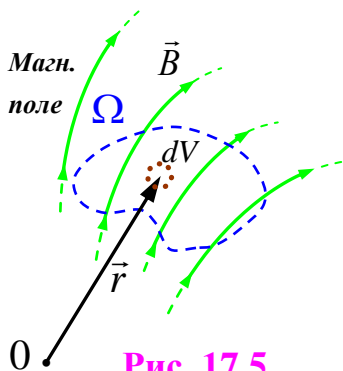
$$W_m = \frac{LI^2}{2} \quad (17.10)$$

Индекс «0» у силы тока мы здесь опустили для придания общности полученному выражению. Как и в случае поля электрического, выразим её через *характеристику самого поля* – *магнитную индукцию B*. Для этого запишем энергию магнитного поля соленоида через индукцию магнитного поля в нём *B*:

$$W_m = \frac{1}{2} LI^2 = \frac{1}{2} \mu\mu_0 n^2 V \cdot \left( \frac{B}{\mu\mu_0 n} \right)^2 = \frac{B^2}{2\mu\mu_0} \cdot V^{**},$$

где *V* – объём соленоида.

➔ **(Опр.)** Определим *энергию, приходящуюся на единицу объёма той области пространства, где есть магнитное поле*:



$$w_m = \frac{dW_m}{dV} \quad (17.11)$$

Поле внутри соленоида однородно, поэтому:

$$w_m = \frac{\Delta W_m}{\Delta V} = \frac{W}{V} \Rightarrow w_m = \frac{B^2}{2\mu\mu_0} \quad (17.12)$$

Величина  $w_m$  называется *объёмной плотностью энергии* магнитного поля. В

случае неоднородного поля она позволяет определять энергию, заключённую в малых элементах пространства объёмом  $dV$ :  $dW_m = w_m dV$ . А вот зная магнитную индукцию поля как функцию координат, можно рассчитать и полную энергию магнитного поля в той или иной области пространства  $\Omega$  (см. рис. 17.5) конечных размеров:

$$W_m = \frac{1}{2\mu\mu_0} \int_{\Omega} B^2(\vec{r}) dV. ** \quad (17.13)$$

<sup>\*</sup> Здесь использованы результаты (15.2) и (17.6) для магнитной индукции и индуктивности соленоида.

<sup>\*\*</sup> Мы предполагаем здесь постоянство  $\mu$ , в общем случае эту величину также надо внести под знак интеграла.



## **§ 18. Магнитное поле в веществе**

Постоянные магниты – вещества, вокруг которых есть магнитное поле без всякого пропускания тока через них. Как мы уже отмечали, ещё Ампер предположил («гипотеза Ампера»), что без токов и здесь не обошлось, только это микротоки или молекулярные токи в веществе.

Пусть магнитное поле  $\vec{B}_0$  создано в вакууме (или в воздухе) некоторой системой проводников с токами. При наличии же среды магнитное поле тех же проводников будет иным –  $\vec{B}$ , даже если вещество не является «постоянным магнитом». Причина та же, что и в случае постоянных магнитов – молекулярные микротоки создают своё поле  $\vec{B}'$ , которое складывается с  $\vec{B}_0$ , давая результирующее  $\vec{B} = \vec{B}_0 + \vec{B}'$  – «среда намагничивается».

Как и при обсуждении поведения поля электрического будем говорить, прежде всего, о влиянии на магнитное поле присутствия среды однородной и изотропной – это вещества в жидком (аморфном) и газообразном состояниях. Случай твёрдых кристаллических магнетиков требует специального анализа.

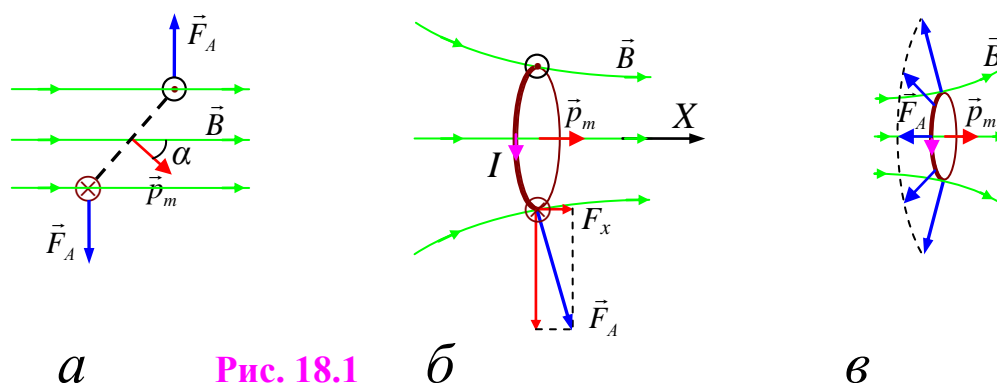
### **18.1. Элементарный магнитный диполь**

► *(Опр.) Элементарным магнитным диполем называется виток с током малых размеров (аналог электрического диполя)*

Намагничивание вещества обеспечивается именно такими частицами молекулярных размеров. При этом важно знать собственное поле диполя и то, как он ведёт себя во внешнем магнитном поле. Индукцию собственного магнитного поля кругового витка с током на его оси мы рассчитываем, применяя

закон Био-Савара-Лапласа:  $\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2\vec{p}_m}{r^3}$ . Как видим, его

направление определяется вектором магнитного момента диполя  $\vec{p}_m$ . Как ведёт себя во внешнем поле «пробный виток» с током мы также знаем – он поворачивается под действием момента силы  $\vec{N} = [\vec{p}_m, \vec{B}]$  (см. §14 и рис. 18.1,а), ориентируясь по полю ( $\vec{p}_m \uparrow \vec{B}$ ). Кроме того, в неоднородном поле на магнитный диполь помимо момента действует и сила, втягивающая его в область большего поля. Появление такой силы иллюстрируют рис. 18.1,б и в. Если же магнитный момент окажется антипараллелен внешнему полю (т.е.  $\vec{p}_m \downarrow \vec{B}$ ), то такой магнитный диполь будет полем выталкиваться.



## 18.2. Намагничивание вещества

Пусть магнитное поле создано постоянным током, протекающем по обмотке длинной прямолинейной катушки – соленоида. Внутри соленоида поле однородно, а его индукция пропорциональна силе тока и числу витков на единицу длины катушки  $B_0 = \mu_0 n I$ . Если в катушку поместить какое-либо вещество индукция поля изменится и станет равной

$$\vec{B} = \vec{B}_0 + \vec{B}', \quad (18.1)$$

где  $\vec{B}'$  – результирующее поле молекулярных токов вещества.

Уточним, что такое поле  $\vec{B}'$ ? Ясно, что это поле в веществе. Ясно и то, что на микромасштабе это поле значительно

## § 18. Магнитное поле в веществе

изменяется вблизи ядер и электронов атомов и молекул. Однако в любых опытах («на макроуровне») проявляют себя лишь усредненные поля. Поэтому в соотношении (18.1) и везде далее под  $\vec{B}$  мы будем понимать именно усредненное по физически бесконечно малым объемам поле.

Чтобы подобраться к полю  $\vec{B}'$  молекулярных токов нужно охарактеризовать состояние намагниченности среды. Для этого используется обычно **вектор намагничивания среды** (или просто намагниченность):

➔ (Опр.)

$$\vec{J} = \frac{\sum_i \vec{p}_{mi}}{\Delta V} \quad (18.2)$$

Суммирование ведется по всем магнитным моментам атомов в пределах физически бесконечно малого объема среды  $\Delta V$ ,

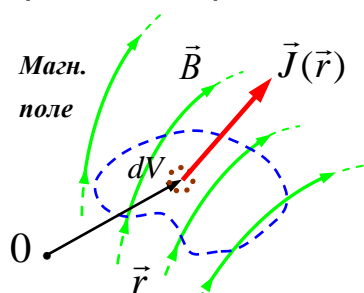


Рис. 18.2

включающего в себя точку, положение которой определено радиус-вектором  $\vec{r}$  (см. рис. 18.2). Таким образом, вектор намагничивания – **локальная характеристика** среды и, вообще говоря, может быть разным в разных её точках –  $\vec{J} = \vec{J}(\vec{r})!$

Знание намагниченности позволяет находить

поле молекулярных токов вещества  $\vec{B}'$ :

$$\vec{B}' = \mu_0 \vec{J}. \quad (18.3)$$

Экспериментально установлено, что в однородных и изотропных веществах намагниченность прямо пропорциональна индукции поля «сторонних» проводников с током:

$$\vec{J} = \chi \frac{\vec{B}_0}{\mu_0}, \quad (18.4)$$

где коэффициент  $\chi$  называется «**магнитной восприимчивостью среды**». Это безразмерная величина, не зависящая от величины

индукции магнитного поля  $\vec{B}_0$ . В итоге мы приходим к такому результату для индукции магнитного поля в веществе:

$$\vec{B} = \vec{B}_0 + \vec{B}' = \vec{B}_0 + \chi\vec{B}_0 = (1 + \chi)\vec{B}_0 = \mu\vec{B}_0. \quad (18.5)$$

То есть величина  $\mu$ , которую мы ранее ввели в рассмотрение весьма формально, как отношение индуктивностей пустого и заполненного веществом соленоида (с сердечником), приобретает теперь более фундаментальный смысл. Она показывает, насколько магнитное поле в веществе отличается от магнитного поля в вакууме.

► (Опр.) 
$$\mu = \frac{\vec{B}}{\vec{B}_0} \quad (18.6)$$

Напомним, что величина  $\mu$  носит название магнитной проницаемости среды. Заметим, что при всей очевидной аналогии с диэлектрической проницаемостью она может быть как меньше, так и больше единицы.

## 18.4. Виды магнетиков

В зависимости от величины магнитной проницаемости  $\mu$  вещества принято делить на диамагнетики, парамагнетики и ферромагнетики. Первые два класса веществ являются слабыми магнетиками – их магнитная проницаемость очень мало отличается от единицы (всего лишь на доли процента).

### 18.4.1. Диамагнетики

К ним относятся, например, *Au*, *Cu*, *Pb*. Для этих веществ  $\mu < 1$ . Это означает, что результирующее поле молекулярных токов  $\vec{B}'$  направлено навстречу полю  $\vec{B}_0$  и ослабляет его. Несмотря на крайнюю незначительность эффекта, макроскопические проявления диамагнетизма в сильных магнитных полях можно наблюдать. Например, диамагнетики выталкиваются из области сильного магнитного поля – это есть следствие “противонаправленности” результирующего магнитного момента молекулярных токов в этих веществах ( $\sum \vec{p}_m \uparrow \downarrow \vec{B}_0$ ).

## § 18. Магнитное поле в веществе

Каков механизм диамагнетизма? Суммарные магнитные моменты атомов таких веществ в отсутствии внешнего магнитного поля равны нулю. Действие магнитного поля вызывает **прецессию орбитальных магнитных моментов** электронов атомов с угловой скоростью  $\vec{\Omega} \uparrow \uparrow \vec{B}$ . Поведение электронной орбитали при этом подобно волчку под действием момента внешней силы  $\vec{N}$ . Такая прецессия получила название Ларморовой. Она эквивалентна появлению дополнительного движения электрона (см. рис. 18.3), в результате которого атомы приобретают слабый индуцированный магнитный момент  $\vec{p}'_m$ , направленный *против* вектора поля  $\vec{B}_0$ . Такой механизм намагничивания – «наведённый магнетизм» – характерен для всех атомов любых веществ.

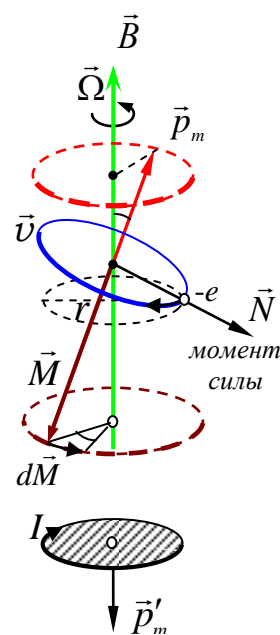


Рис. 18.3

### 18.4.2. Парамагнетики

К ним относятся, например, *Al, Pt, FeCl<sub>3</sub>*. Магнитные моменты  $p_m$  атомов парамагнитных веществ отличны от нуля в отсутствии внешнего поля. Спиновый магнитный момент электронов таких атомов некомпенсирован, поскольку в них есть неспаренные электроны. Однако в отсутствие внешнего поля магнитные моменты отдельных атомов  $\vec{p}_{mi}$  разупорядочены за счёт теплового движения и  $\sum_i \vec{p}_{mi} = 0$ . Во внешнем поле появляется некоторая преимущественная ориентация  $\vec{p}_{mi}$ , причём  $\vec{J} \uparrow \uparrow \vec{B}_0$  и  $\vec{B}' \uparrow \uparrow \vec{B}_0$  (см. рис.18.4). Таким

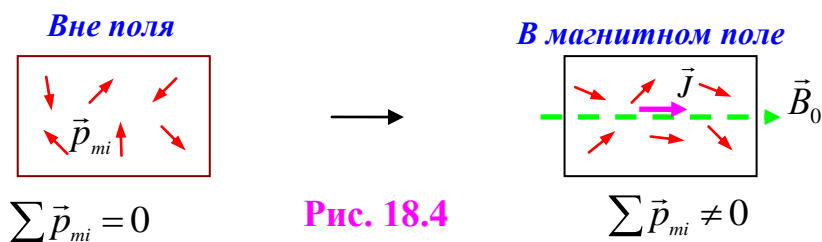


Рис. 18.4

образом, результирующее поле  $\vec{B} = \vec{B}_0 + \vec{B}'$  несколько больше, чем  $\vec{B}_0$ . Тепловое движение препятствует достаточно «хорошему» упорядочению – «разбрасывает»  $\vec{p}_{mi}$  по всем направлениям. Экспериментально это проявляется в зависимости намагниченности от температуры по закону Кюри

$$J \sim \frac{p_m^2}{T} \quad (18.7)$$

Итак, результирующее поле молекулярных токов  $\vec{B}'$  в парамагнетиках направлено в ту же сторону, что и внешнее поле  $\vec{B}_0$ . Макроскопические проявления парамагнетизма в сильных магнитных полях противоположны диамагнетикам – они втягиваются в область сильного магнитного поля (вспомните поведение магнитного диполя в однородном и неоднородном магнитных поля). Это есть следствие сонаправленности результирующего магнитного момента молекулярных токов в этих веществах ( $\vec{B}' \uparrow \uparrow \vec{B}_0$ ).

Ранее мы отмечали, что «наведённый магнетизм» (по механизму намагничивания диамагнетиков, связанный с возникновением Ларморовой прецессии) характерен для всех атомов любых веществ. Однако при наличии «спинового» магнетизма, преобладает последний – т.е. магнитное поле в парамагнетиках несколько больше, чем в вакууме.

### 18.4.3. Ферромагнетики

Способность к намагничиванию некоторых веществ больше, чем у диа- и парамагнетиков в  $10^{10}$  раз! Это сильные магнетики – ферромагнетики. К таким веществам относятся, например, *Fe*, *Ni*, *Co*, ..., ферромагнитные полупроводники – ферриты. Для них

---

<sup>\*)</sup> Количественная теория парамагнетизма с обоснованием закона Кюри была разработана П. Ланжевеном

## § 18. Магнитное поле в веществе

$\mu \gg 1$ . В опыте Эйнштейна – де Хааса было установлено, что гиромагнитное отношение для железа равно  $-\frac{e}{m_e}$  (т.н.  $g$ -фактор равен 2). Это свидетельствует, что механизм намагничивания ферромагнетиков связан именно со спиновым магнитным моментом атомов. Почему же этот магнетизм намного ярче выражен ( $\mu \gg 1$ ), чем у обычных парамагнетиков? Оказывается это проявление «коллективных» процессов намагничивания – в ферромагнетиках возникают области спонтанной намагниченности макроскопических размеров ( $10^{-6} - 10^{-5}$  м) – «домены»!

Объяснение возможности такого механизма намагничивания дает только квантовая механика.<sup>\*)</sup> Мы же отметим здесь лишь, что отличия от случая слабых магнетиков не только количественные. Оказывается, намагниченность ферромагнетиков зависит помимо величины поля сторонних токов ещё и от «предыстории» процесса намагничивания – наблюдается «гистерезис» Магнитное поле в ферромагнетике нарастает при намагничивании нелинейно, достигая насыщения. Затем при уменьшении внешнего поля намагниченность убывает медленнее, чем она росла и, при «снятии» внешнего поля не обращается в ноль (см. рис.18.5) – это «остаточная намагниченность». Она-то и объясняет существование постоянных магнитов хорошо знакомых нам с детства. В процессе перемагничивания ферромагнитного вещества в нём происходит перестройка границ доменов. Это макроскопический процесс! Он сопровождается возникновением значительных механических напряжений и, как следствие, порождает звук – «шумы Баркгаузена», используемые, обычно, для яркой демонстрации эффекта.

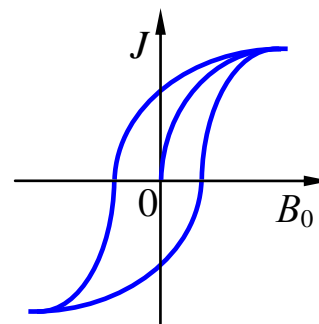


Рис. 18.5

<sup>\*)</sup> Теория ферромагнетизма была впервые разработана Френкелем и Гейзенбергом в 1928 г.

## § 19. Элементы теории магнитного поля Максвелла

*“В науке необходимо воображение. Она не исчерпывается целиком ни математикой, ни логикой, в ней есть что-то от красоты и поэзии” –*

М. Митчелл (американский астроном)

### 19.1. Трактовка Максвелла явления электромагнитной индукции

В завершение параграфа 16 мы поставили вопрос: что толкает электроны проводимости, обеспечивая индукционный ток, в **неподвижном** контуре, помещённом в **переменное** магнитное поле? Воспроизведём ещё раз соответствующий рисунок (рис. 19.1). Какая сила действует на электроны проводимости?\*)

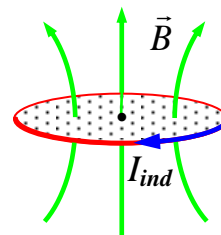


Рис. 19.1

Сила Лоренца на эту роль явно не годится! Отталкиваясь от подобных вопросов, Максвелл пришёл к концепции «вихревого электрического поля» – его силовые линии замкнуты. Источником такого поля является не система электрических зарядов, его порождает переменное магнитное поле! Поскольку действие этих сил приводит к разделению зарядов в проводниках, именно они играют роль сторонних сил, обеспечивающих появление в них ЭДС  $\frac{A^{cm}}{q} = \mathcal{E}_i$  – ЭДС электромагнитной индукции в покое проводниках, находящихся в переменном магнитном поле. Это вихревое электрическое поле удобно характеризовать, как и поле электрических зарядов, вектором напряжённости  $\vec{E}^*$ . Максвелл формализовал всё это и закон ЭМИ цепочкой следующих соотношений:

$$\mathcal{E}_i = \oint_C \vec{E}_i^* dl; \quad (\text{ЭДС равна удельной работе сторонних сил – сил вихревого электрического поля});$$

\*) Заметим, что закон ЭМИ Фарадея лишь констатирует при каких обстоятельствах появляется индукционный ток.



## § 19. Теория Максвелла

$$\mathcal{E}_i = -\frac{d\Phi}{dt}; \text{ (напомним, что закон ЭМИ мы уже записывали в таком виде);}$$

Учитывая определение магнитного потока:  $\Phi = \int_{\Sigma} B_n dS$ , приходим

(вслед за Максвеллом) к следующему уравнению:

$$\oint_C E_i dl = -\frac{d}{dt} \int_{\Sigma} B_n dS \quad (19.1)$$

Если поменять теперь последовательность выполнения операций интегрирования и дифференцирования в правой части равенства<sup>\*)</sup>, то придём к той форме представления закона электромагнитной индукции, которая войдёт позже в систему уравнений Максвелла.

### 19.2. Ток смещения

Из только что проведённого анализа следует, что изменяющееся во времени магнитное поле порождает вихревое электрическое – появляется электрический ток! В то же время до работ Максвелла считалось, что источником магнитного поля могут служить лишь направленно движущиеся заряды – электрические токи.

Помимо ощущаемой несимметрии Максвелл стремился преодолеть и проблемы, возникающие с применением теоремы о циркуляции за пределами магнитостатики – к переменным токам (т.е. к «динамическому случаю»). В чём же тут проблема? Пока мы имеем дело с протеканием в цепи тока постоянного при применении теоремы о циркуляции нет необходимости заботиться о выборе конкретной поверхности  $\Sigma$ , ограниченной контуром  $C$ , охватывающим проводник с током – любая годится! На рисунке 19.2,

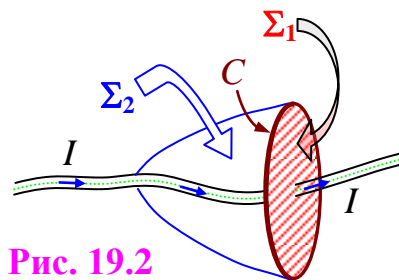
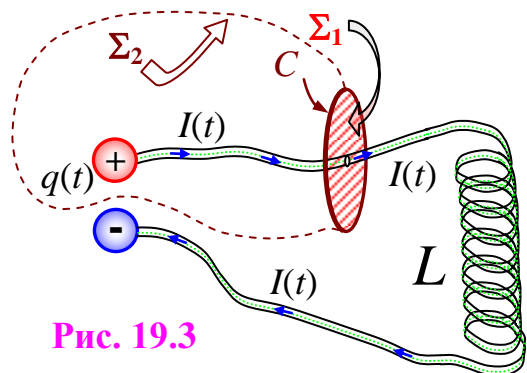


Рис. 19.2

<sup>\*)</sup> С математической точки зрения это вполне допустимо для неизменной по форме и положению поверхности  $\Sigma$ , охваченной контуром  $C$ .

для примера, показаны две из них  $\Sigma_1$  и  $\Sigma_2$  – через обе переносятся направленно движущиеся заряды – электрический ток одинаковой силы  $I$ .

Теперь представим себе ситуацию при протекании переменного тока, например, в колебательном контуре – рис. 19.3



**Рис. 19.3**

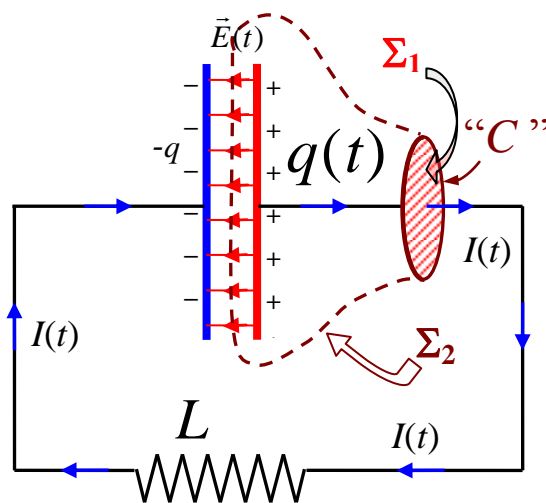
и 19.4. Постоянный ток в такой цепи протекать, конечно, не может, поскольку диэлектрический промежуток между обкладками конденсатора представляет собой для неё разрыв. Контур  $C$  охватывает проводник, пересекающий поверхность  $\Sigma_1$ ,

ограниченную этим контуром. Теорема о циркуляции даёт для них:

$$\oint_C \vec{B}_l dl = \mu_0 \cdot \int_{\Sigma} \vec{j}_n dS. \quad (19.2)$$

При этом интеграл в правой части равен силе протекающего в проводнике тока  $I$ . Однако в соответствии с теоремой вместо поверхности  $\Sigma_1$  можно выбрать и любую другую, охваченную контуром  $C$ . В частности, поверхность  $\Sigma_2$ , проходящую между обкладками конденсатора.

Через неё заряды не переносятся! Левая часть равенства (19.2) от выбора поверхности  $\Sigma$ , очевидно, не зависит. Значит, рассуждал Максвелл, надо так «подправить» правую часть, чтобы она давала тот же результат и для поверхности  $\Sigma_2$ . Заметим, что вместе с



**Рис. 19.4**

## § 19. Теория Максвелла

---

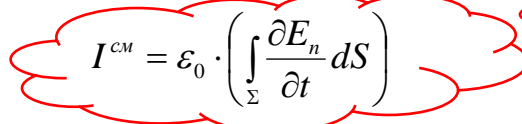
поверхностью  $\Sigma_1$  она образует замкнутую поверхность  $\Sigma$ , внутри которой находится нескомпенсированный заряд  $q$ , равный заряду обкладки конденсатора. Сила тока  $I$  равна скорости изменения этого заряда  $\frac{dq}{dt}$ , за счёт заряда «вытекающего из» данной замкнутой области пространства через поверхность  $\Sigma_1$ . По теореме Гаусса заряд внутри замкнутой поверхности связан с потоком вектора напряжённости электрического поля через эту поверхность:

$$\oint_{\Sigma} E_n dS = \frac{1}{\epsilon_0} q \Rightarrow q = \epsilon_0 \oint_{\Sigma} E_n dS .$$

В таком случае можно утверждать, что сила тока равна

$$I = \epsilon_0 \frac{d}{dt} \left( \oint_{\Sigma} E_n dS \right) .$$

Последовательность дифференцирования и интегрирования в правой части в случае покоящихся контура и поверхности можно поменять местами. То, что после этого получается, Максвелл предложил называть «током смещения»<sup>\*)</sup>:


$$I^{cm} = \epsilon_0 \cdot \left( \int_{\Sigma} \frac{\partial E_n}{\partial t} dS \right)$$

Соответственно величина  $\epsilon_0 \cdot \frac{dE_n}{dt}$  называется *плотностью тока смещения*. Конечно, такое название не более чем условность. Ведь электрическим током мы называли направленное движение **заряженных частиц!** Здесь же никакие частицы через поверхность  $\Sigma_2$  не переносятся. Зато есть *изменяющееся во времени электрическое поле, которое порождает магнитное*. Симметрия восстановлена: *изменяющееся во времени магнитное поле порождает электрическое (вихревое) и, наоборот, изменяющееся во*

---

<sup>\*)</sup> Впервые этот термин появился в статье Дж. К. Максвелла «О физических силовых линиях» (*On physical lines of force*), опубликованной в журнале «*Philosophical Magazine*» в 1862 году.

*времени электрическое порождает магнитное.* То, что действительно обусловлено переносом заряженных частиц придётся снабжать теперь специальным термином «ток проводимости». Часто говорят, что токи смещения замыкают токи проводимости в «разорванных» цепях переменного тока.

Существование токов смещения экспериментально удалось подтвердить лишь 20 лет спустя, уже после смерти Максвелла Генриху Герцу. Почему это не удалось сделать намного раньше «гению эксперимента» М. Фарадею? Дело в том, что токи смещения проявляют себя лишь при очень больших скоростях изменения электрического поля!

### 19.3. Уравнения Максвелла (в интегральной форме)

«Самое главное в теории электромагнетизма  
Максвелла – это уравнения Максвелла» –

Г. Герц

Вот теперь у нас всё готово, чтобы выписать **систему уравнений Максвелла**. Справа от соответствующего равенства будем кратко комментировать физическое содержание этих зачастую не очень простых по математической форме соотношений. Итак:

$$\begin{aligned} \text{(I)} \quad \oint_{\Sigma} E_n dS &= \frac{1}{\epsilon \epsilon_0} q; && \text{(теорема Гаусса – закон Кулона + принцип суперпозиции);} \\ \text{(II)} \quad \oint_{\Sigma} B_n dS &= 0; && \text{(теорема Гаусса для магнитного поля – магнитных зарядов в природе нет!);} \\ \text{(III)} \quad \oint_C E_l dl &= - \int_{\Sigma} \frac{\partial B_n}{\partial t} dS; && \text{(Закон электромагнитной индукции в трактовке Максвелла);} \\ \text{(IV)} \quad \oint_C B_l dl &= \mu \mu_0 \cdot \left( \int_{\Sigma} j_n dS + \epsilon \epsilon_0 \int_{\Sigma} \frac{\partial E_n}{\partial t} dS \right). && \text{(Теорема о циркуляции «подправленная» Максвеллом)} \end{aligned}$$

Вместе с законом силы, действующей на заряженную частицу в электромагнитном поле (мы называли её обобщённой силой Лоренца)

$$\vec{F} = q\vec{E} + q[\vec{v}, \vec{B}]$$

## § 19. Теория Максвелла

эта система является основой классической электродинамики, фундаментом теории электромагнитного поля Максвелла.

Если же вспомнить 3 закона механики Ньютона и добавить к ним закон Всемирного тяготения, то мы получим всё *принципиальное* знание (фундаментальные законы), добытое человечеством к концу XIX столетия и называемое «Классическая физика»! Триумф физической НАУКИ, казалось, уже совсем близок. Нобелевский лауреат Альберт Майкельсон говорил по этому поводу в 1894 году:

*«... кажется вероятным, что большинство основных принципов уже твёрдо установлено и что будущее продвижение вперёд следует искать в основном в строгом применении этих принципов ко всем явлениям, которые обращают на себя наше внимание. ... Будущие истины физики видны в шестом знаке после запятой»*

Однако тут же вынужден был оговориться:

*«... нельзя утверждать, что будущее физики не готовит чудес даже более удивительных, чем чудеса прошлого...»*

Так и случилось! На пути научного познания мира на рубеже XIX – XX столетий возникли новые принципиальные проблемы.

*Новые открытия, сделанные в физике за последние несколько лет, ..., оказали на учёных влияние, подобное воздействию Ренессанса на литературу ...*

*На пути вздымаются ещё более высокие вершины, и они покорятся каждому, кто поднимается на них пока ещё широкими дорогами ...*

Дж.Дж. Томсон  
лауреат Нобелевской премии, открывший электрон

## СОДЕРЖАНИЕ

От авторов.....	3
<b><i>Часть 1. МЕХАНИКА НЬЮТОНА</i></b>	
§1. Кинематика материальной точки.....	7
§2. Кинематика твёрдого тела .....	25
§3. Динамика материальной точки.....	30
§4. Динамика твёрдого тела.....	42
§5. Законы сохранения в механике.....	59
§6. Гироскоп.....	84
<b><i>Часть 2. ЭЛЕКТРИЧЕСТВО И МАГНЕТИЗМ</i></b>	
§7. Закон Кулона. Электрическое поле.....	90
§8. Теорема Гаусса.....	103
§9. Работа в электростатическом поле .....	127
§10. Проводники в электростатическом поле.....	142
§11. Электрическое поле в диэлектриках.....	162
§12. Постоянный электрический ток.....	176
§13. Электродвижущая сила.....	183
§14. Магнитное поле в вакууме.....	192
§15. Теорема о циркуляции вектора магнитной индукции.....	205
§16. Электромагнитная индукция .....	215
§17. Самоиндукция.....	222
§18. Магнитное поле в веществе.....	229
§19. Элементы теории магнитного поля Максвелла.....	236