Лекция 3. *Динамика твёрдого тела*

Простые демонстрации к законам Ньютона

(“добавка” :))

...

5) Формулировка Ньютона: $$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F} \qquad \left(или \quad d\vec{p} = \vec{F} \cdot dt\right)$$

... а если : $\vec{F} = const$, то

$$\Delta\vec{p} = \vec{F} \cdot \Delta t$$

Изменение импульса, масса, сила трения …

3.5. Силы в механике

Закон движения $\vec{r} = \vec{r}(t)$ ⇐ $\vec{a} = \dfrac{\vec{F}}{m}$ ⇐ $\vec{F} = \vec{f}(x, y, z, \vec{V}, t)$

Какие бывают **??**

3.5.1. *Силы Всемирного тяготения*

♣ *Две материальные точки притягиваются с силами пропорциональными произведению их масс (m_1 и m_2) и обратно пропорциональными квадрату расстояния между ними. Силы направлены вдоль прямой, проходящей через материальные точки*:

$$\vec{F}_{21} = -G\frac{m_1 m_2}{r^2}\frac{\vec{r}_{12}}{r}$$

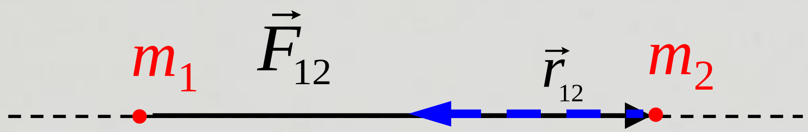


Рис. 3.2

И, конечно : $\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$

А гравитационная постоянная
$G = 6{,}67 \cdot 10^{11}$ *м²/кг²* **??**

1775 г, Генри Ка́вендиш

А если НЕ материальные точки **??**

1775 г, Генри Ка́вендиш

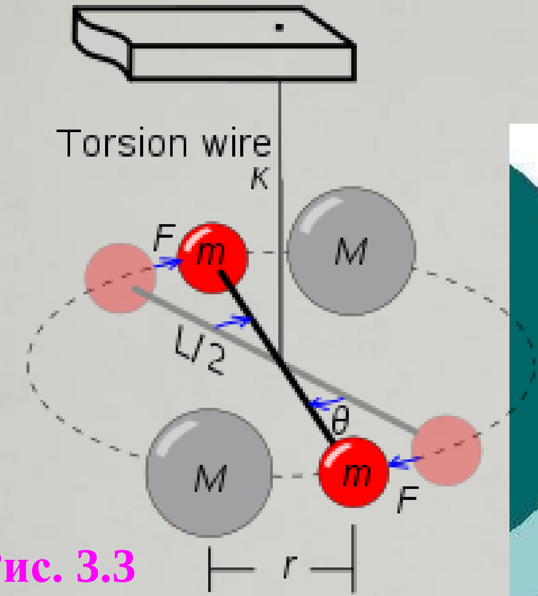


Рис. 3.3

- **Генри Кавендиш родился 10 октября 1731** в Ницце в семье лорда
Учился в кембриджском университете в 1749—1753 годах, но не закончил обучение. Унаследовав крупное состояние, он тратил почти все доходы на проведение экспериментов.

- В 1766 году Кавендиш опубликовал первую важную работу по химии — «Искусственный воздух», где сообщалось об открытии «горючего воздуха» (водорода). Выделил в чистом виде углекислый газ и водород, приняв последний за флогистон, установил основной состав воздуха как смесь азота и кислорода. Получил окислы азота. Сжиганием водорода получил (1784 год) воду, определив соотношение объёмов взаимодействующих в этой реакции газов (100:202).

А если тела НЕ материальные точки ?

Рис. 3.4

$$F = G\frac{mM_З}{(R_З + h)^2} \approx G\frac{mM_З}{R_З^2} = mg$$

$$g = G\frac{M_З}{R_З^2}$$

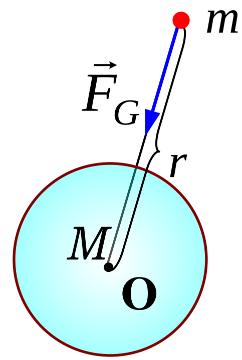


Рис. 3.5

3.5.2. *Упругие силы. Закон Гука*

$$F_{упр} = k \cdot \xi \qquad \xi = |l - l_0|$$

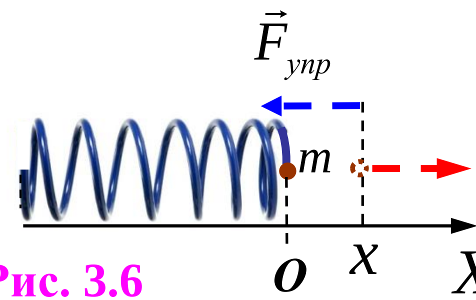


Рис. 3.6

или

$$\left(\vec{F}_{упр}\right)_x = -kx$$

3.5.3. *Силы трения*

"Сухое" трение

Сила трения покоя: $\vec{F}_{\text{тр пок}} + \sum_i \vec{F}_i = 0$

Сила трения скольжения

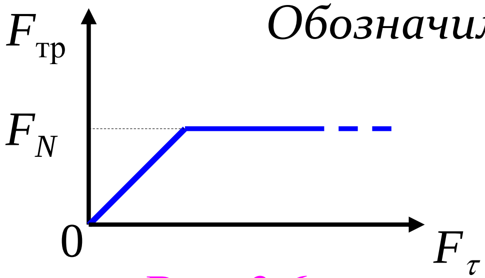


Рис. 3.6

Обозначим: $\left(\sum \vec{F}_i\right)_\tau \equiv \vec{F}_\tau$

$$F_{\text{тр}}^{\,ск} = \mu F_N$$

Сила вязкого трения

$$\vec{F}_{\text{тр}}^{\,вязк} = -b \cdot \vec{V}$$

3.5.4. *Сила Лоренца*

$$\vec{F}_Л = q \cdot \vec{E} + q \cdot \left[\vec{V}, \vec{B}\right]$$

3.6. Принцип относительности Галилея

♣ *Законы механики инвариантны по отношению к выбору инерциальной системы отсчёта.*

§ 4. Динамика твёрдого тела

Sine experienentia nihil sufficienter sciri potest" –

«Без опыта нет достоверного знания!»

Роджер Бэкон (1250)

4.1. Центр масс. Теорема о движении центра масс

(*Опр.*) ***Центром масс системы материальных точек называется точка, положение которой в выбранной системе отсчёта определяет радиус-вектор:***

$$\vec{r}_c = \frac{\sum_{i=1}^{n} \Delta m_i \vec{r}_i}{\sum_{i=1}^{n} \Delta m_i}$$

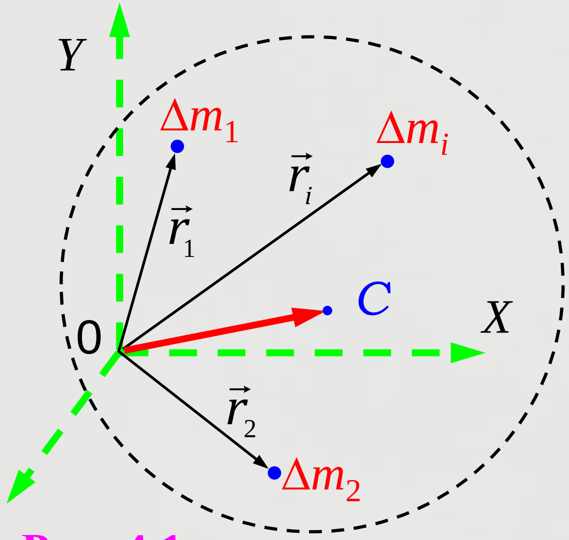


Рис. 4.1

??

или

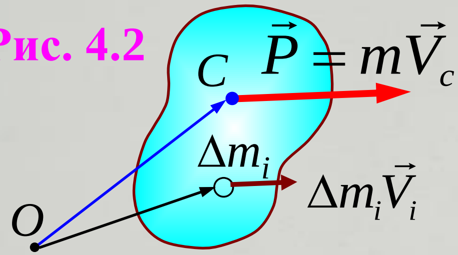
$$x_c = \frac{\sum_{i=1}^{n} \Delta m_i x_i}{m}; \quad y_c = \frac{\sum_{i=1}^{n} \Delta m_i y_i}{m}; \quad z_c = \frac{\sum_{i=1}^{n} \Delta m_i z_i}{m}$$

Свойства ц.м.

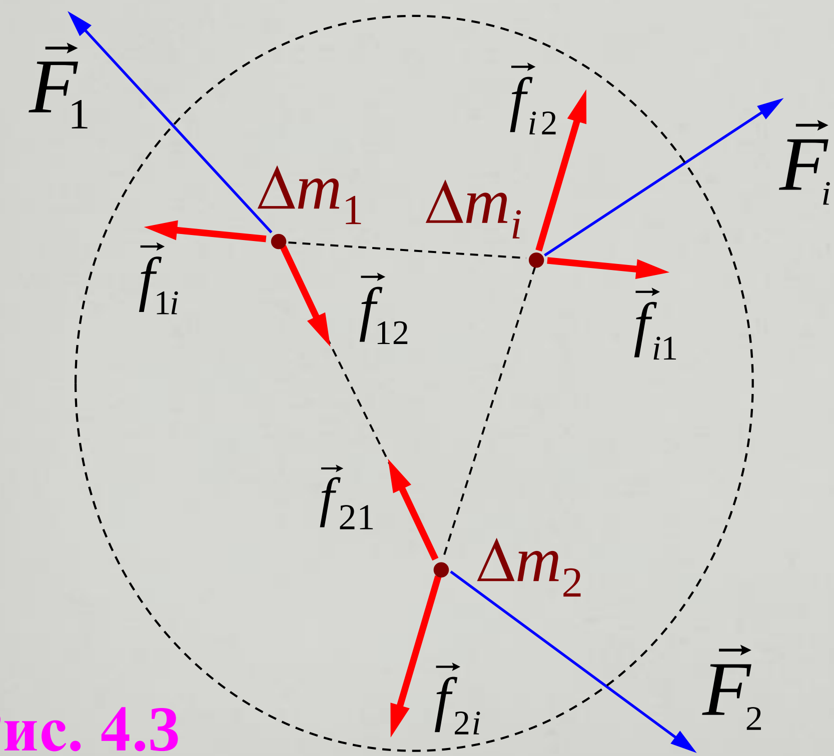
(**Опр.**) ***Импульсом системы материальных точек называется сумма импульсов отдельных её частей.***

$$\vec{P} = \sum_{i=1}^{n} \Delta m_i \vec{V}_i$$

Рис. 4.2



$$\vec{P} = m\vec{V}_c$$



$$\begin{cases}
\Delta m_1 \dfrac{d^2\vec{r}_1}{dt^2} = \vec{f}_{12} + \ldots + \vec{f}_{1i} + \ldots + \vec{f}_{1n} + \vec{F}_1^{\,внешн}; \\
\ldots \qquad \ldots \\
\Delta m_2 \dfrac{d^2\vec{r}_2}{dt^2} = \vec{f}_{21} + \ldots + \vec{f}_{2i} + \ldots + \vec{f}_{2n} + \vec{F}_2^{\,внешн}; \\
\ldots \qquad \ldots \\
\Delta m_i \dfrac{d^2\vec{r}_i}{dt^2} = \vec{f}_{i1} + \ldots + \vec{f}_{ij} + \ldots + \vec{f}_{in} + \vec{F}_i^{\,внешн}; \\
\ldots \qquad \ldots \\
\Delta m_n \dfrac{d^2\vec{r}_n}{dt^2} = \vec{f}_{n1} + \ldots + \vec{f}_{ni} + \ldots + \vec{f}_{nn-1} + \vec{F}_n^{\,внешн}.
\end{cases}$$

Рис. 4.3

Очень важный рисунок !

$$\begin{cases} \Delta m_1 \ddot{\vec{r}}_1 = \sum\limits_{j\neq 1} \vec{f}_{1j} + \vec{F}_1^{\,внешн}; \\ \dots \qquad \dots \\ \Delta m_i \ddot{\vec{r}}_i = \sum\limits_{i\neq j} \vec{f}_{ij} + \vec{F}_i^{\,внешн}; \\ \dots \qquad \dots \\ \Delta m_n \ddot{\vec{r}}_n = \sum\limits_{n\neq j} \vec{f}_{nj} + \vec{F}_n^{\,внешн} \end{cases}$$

$$\vec{f}_{ij} = -\vec{f}_{ji}$$

Сумма справа:

$$\sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i^{\,внешн}$$

Сумма слева с учётом:

$$\frac{d^2}{dt^2}(\vec{r}_c) = \sum_{i=1}^{n} \Delta m_i \ddot{\vec{r}}_i \Big/ m$$

*) $\dfrac{d^2 \vec{r}_i}{dt^2} \equiv \ddot{\vec{r}}_i$

$$\sum_{i=1}^{n} \Delta m_i \ddot{\vec{r}}_i = m\ddot{\vec{r}}_c = m\vec{a}_c$$

Итог:

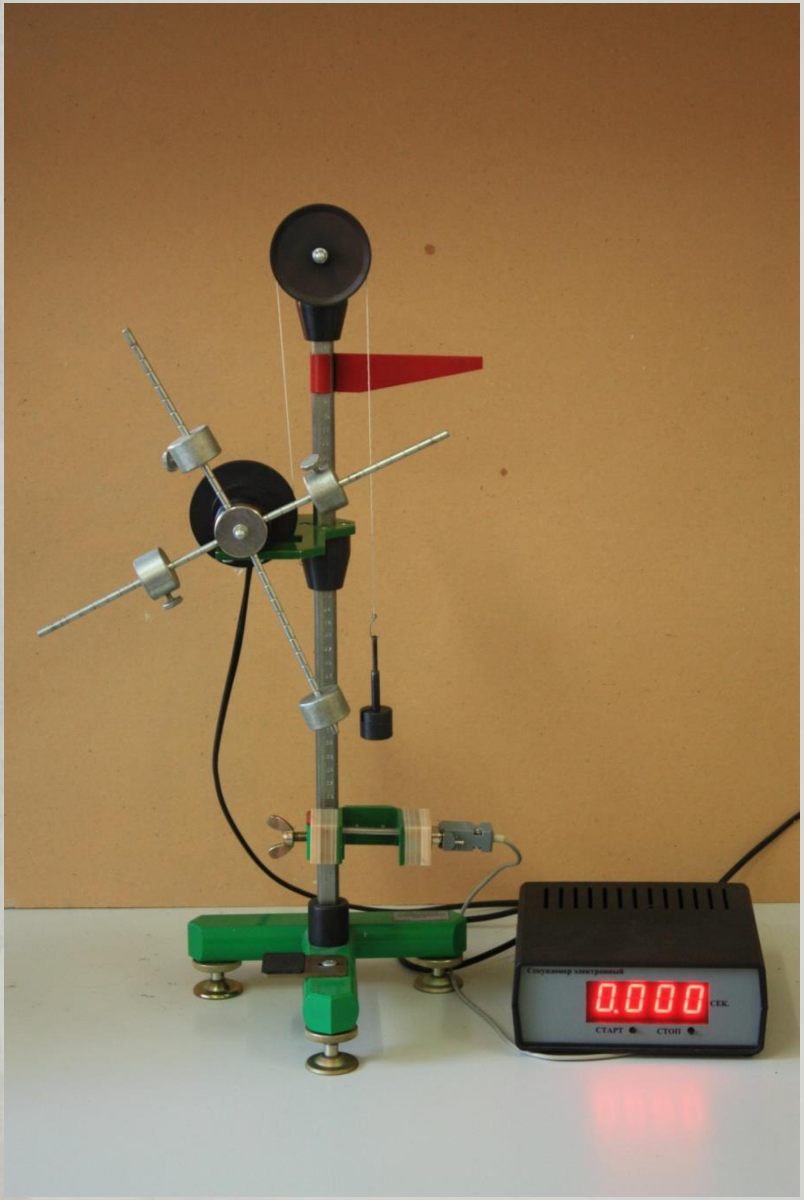
$$\vec{a}_c = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} \vec{F}_i^{\,внешн}}{m}$$

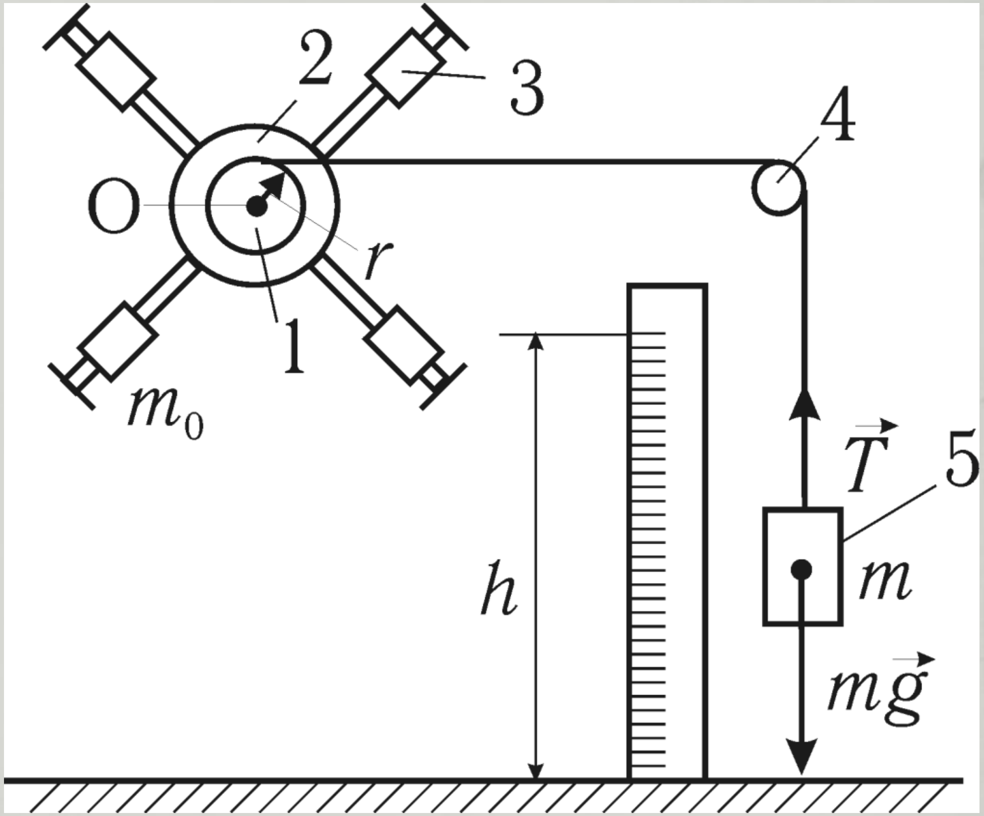
Теорема о центре масс:

- *Центр масс системы материальных точек (/ТТ) движется так же, как и материальная точка массой m под действием тех же внешних сил, что действуют на систему.*

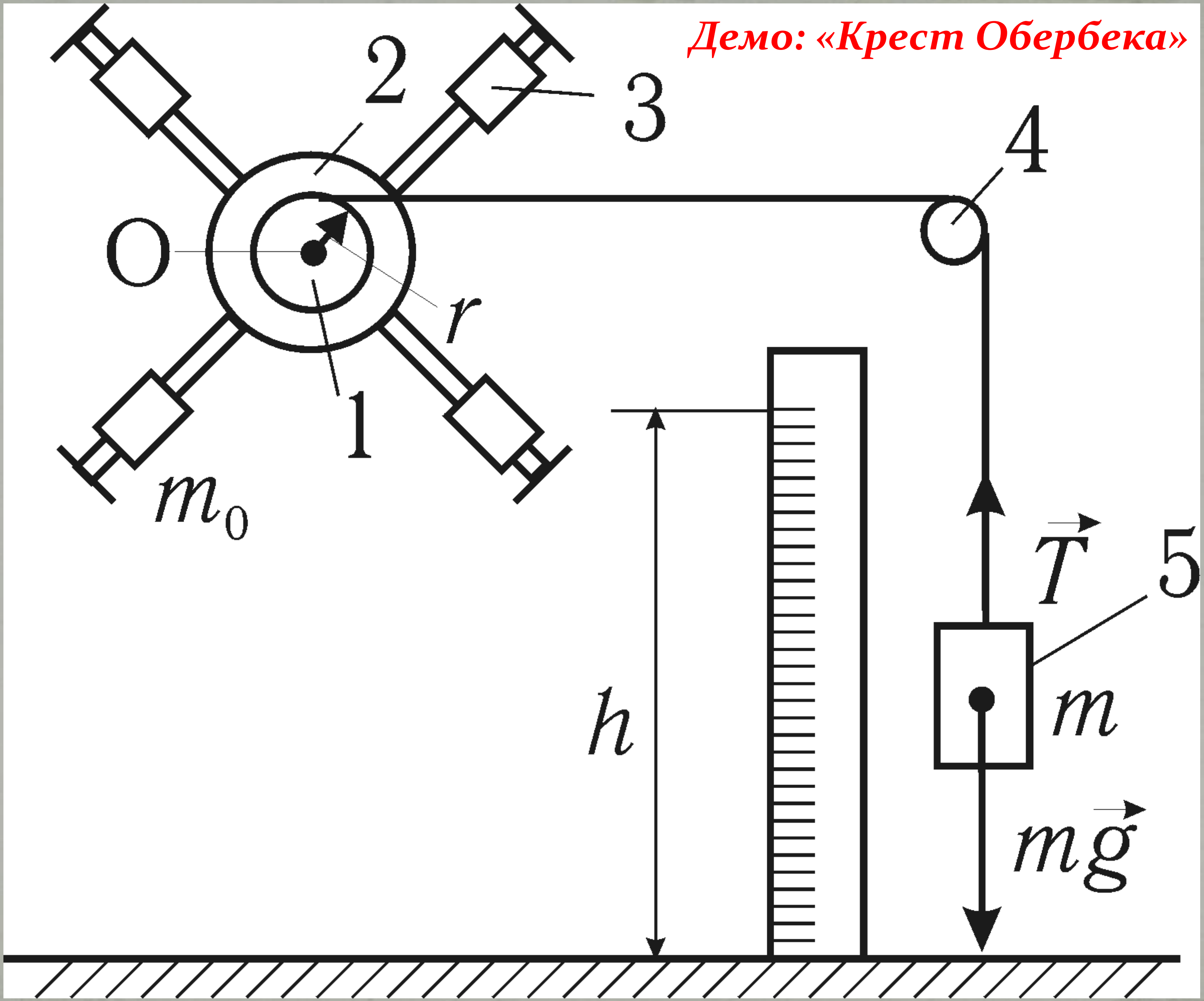
4.2. Дополнительные понятия (момент силы, момент инерции, момент импульса)

“Крест Обербека”





Демо: «Крест Обербека»



“Наклонная плоскость Галилея”

(скатывание сплошного и полого цилиндров)

(*Опр*.) ***Моментом инерции твёрдого тела относительно оси Z называется сумма произведений масс всех элементов тела на квадраты их расстояний до оси:***

$$I_z = \sum_{i=1}^{n} (\Delta m_i R_i^2)$$

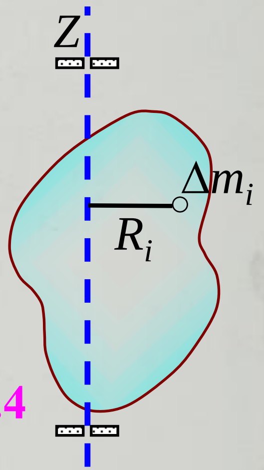


Рис. 4.4

$$\Delta m_i \to dm$$

$$I_z = \int R^2 dm$$

Как масса ***распределена*** *относительно оси*

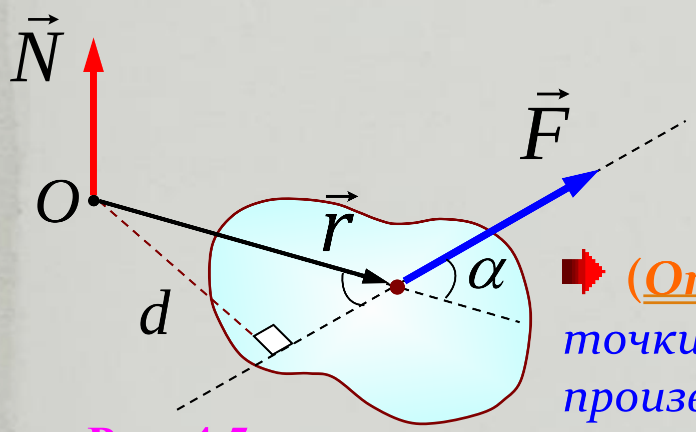


Рис. 4.5

(*Опр*.) ***Моментом силы*** $\vec{N}$ *относительно некоторой точки пространства O называется векторное произведение радиус-вектора $\vec{r}$, проведённого из точки O в точку приложения силы, на вектор этой силы $\vec{F}$:*

$$\vec{N} = [\vec{r}, \vec{F}]$$

$N = F \times d$ – *“сила на плечо”*

(**Опр.**) ***Моментом импульса*** $\vec{M}_i$ *материальной точки* Δm_i *относительно точки пространства О называется векторное произведение радиус-вектора* $\vec{r}_i$*, проведённого из точки О к материальной точке, на импульс этой частицы* $\Delta m_i \vec{V}_i$

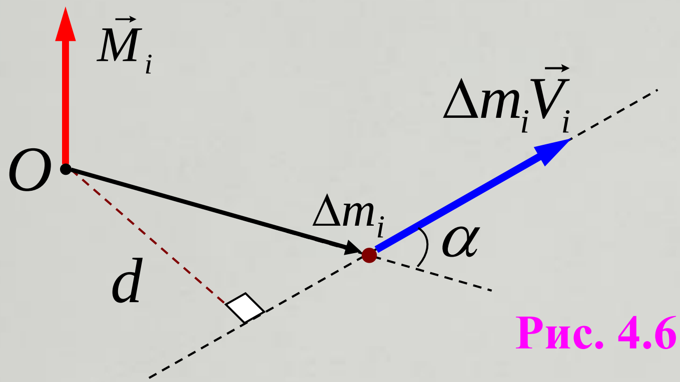


Рис. 4.6

$$\vec{M}_i = [\vec{r}_i, \Delta m_i \vec{V}_i]$$

"Одна частица"

(**Опр.**) ***Моментом импульса твёрдого тела (системы МТ) относительно точки пространства О называется сумма моментов импульса отдельных элементов твёрдого тела относительно этой же точки:***

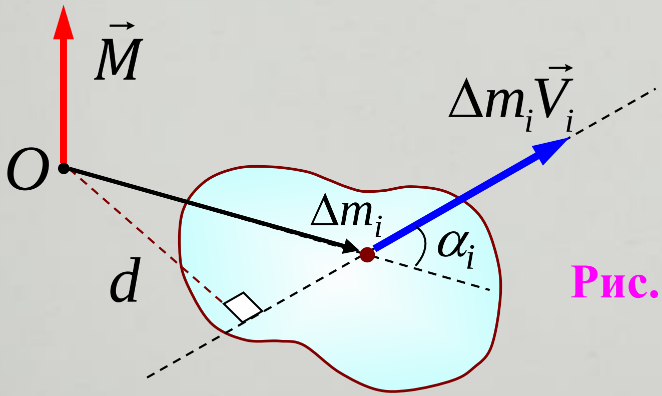


Рис. 4.7

$$\vec{M} = \sum_{i=1}^{n} [\vec{r}_i, \Delta m_i \vec{V}_i]$$

"Система частиц"

4.3. Уравнение моментов

а) Для одной частицы (материальной точки)

$$\frac{d\vec{M}_i}{dt}=\underline{\underline{\left[\frac{d\vec{r}_i}{dt},\Delta m_i\vec{V}_i\right]}}+\left[\vec{r}_i,\Delta m_i\frac{d\vec{V}_i}{dt}\right]$$

?

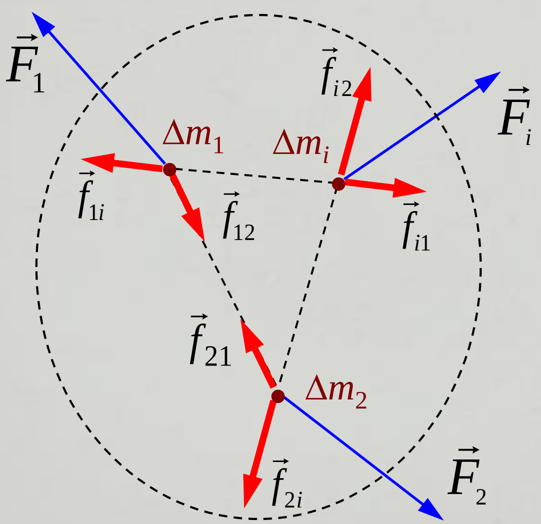
$$\Delta m_i\frac{d\vec{V}_i}{dt}=\vec{F}_i$$

$$[\vec{r}_i,\vec{F}_i]\equiv\vec{N}_i$$

$$\frac{d\vec{M}_i}{dt}=\vec{N}_i$$

Скорость изменения момента импульса частицы равна моменту силы, действующей на эту частицу

б) Для системы материальных точек (и твёрдого тела)



Rem: Рис. 4.3

в ИСО!:

$$\begin{cases}\dfrac{d\vec{M}_1}{dt}=\sum\limits_{j=2}^{n}\vec{N}_{ij}^{\,внутр}+\vec{N}_1^{\,внешн};\\ \ldots\qquad\qquad\ldots\\ \dfrac{d\vec{M}_i}{dt}=\sum\limits_{j\neq i}^{n}\vec{N}_{ij}^{\,внутр}+\vec{N}_i^{\,внешн};\\ \ldots\qquad\qquad\ldots\\ \dfrac{d\vec{M}_n}{dt}=\sum\limits_{j=1}^{n-1}\vec{N}_{nj}^{\,внутр}+\vec{N}_n^{\,внешн}.\end{cases}$$

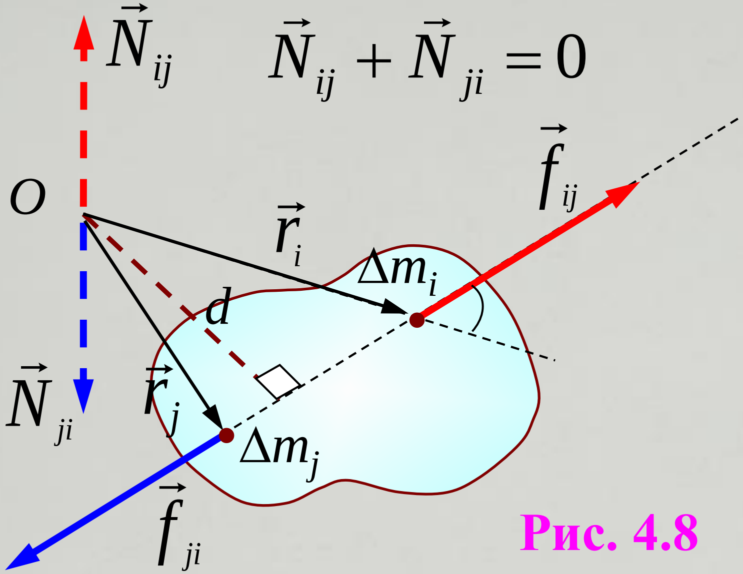


Рис. 4.8

Сумма справа: $\sum\limits_{i=1}^{n} \vec{N}_i^{\,внешн}$

Сумма слева: $\dfrac{d\vec{M}}{dt}$

♣ ***Скорость изменения момента импульса системы материальных точек (и твёрдого тела) равна сумме моментов внешних сил, действующих на все частицы этой системы***

$$\frac{d\vec{M}}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \vec{N}_i^{\,внешн}$$

- Замечания:

1) *ИСО* !! (а ещё «система центра масс») ;
2) **можно и для проекций ;**

$$\frac{dM_z}{dt} = \sum_{i=1}^{n} N_{zi}^{внеш}$$