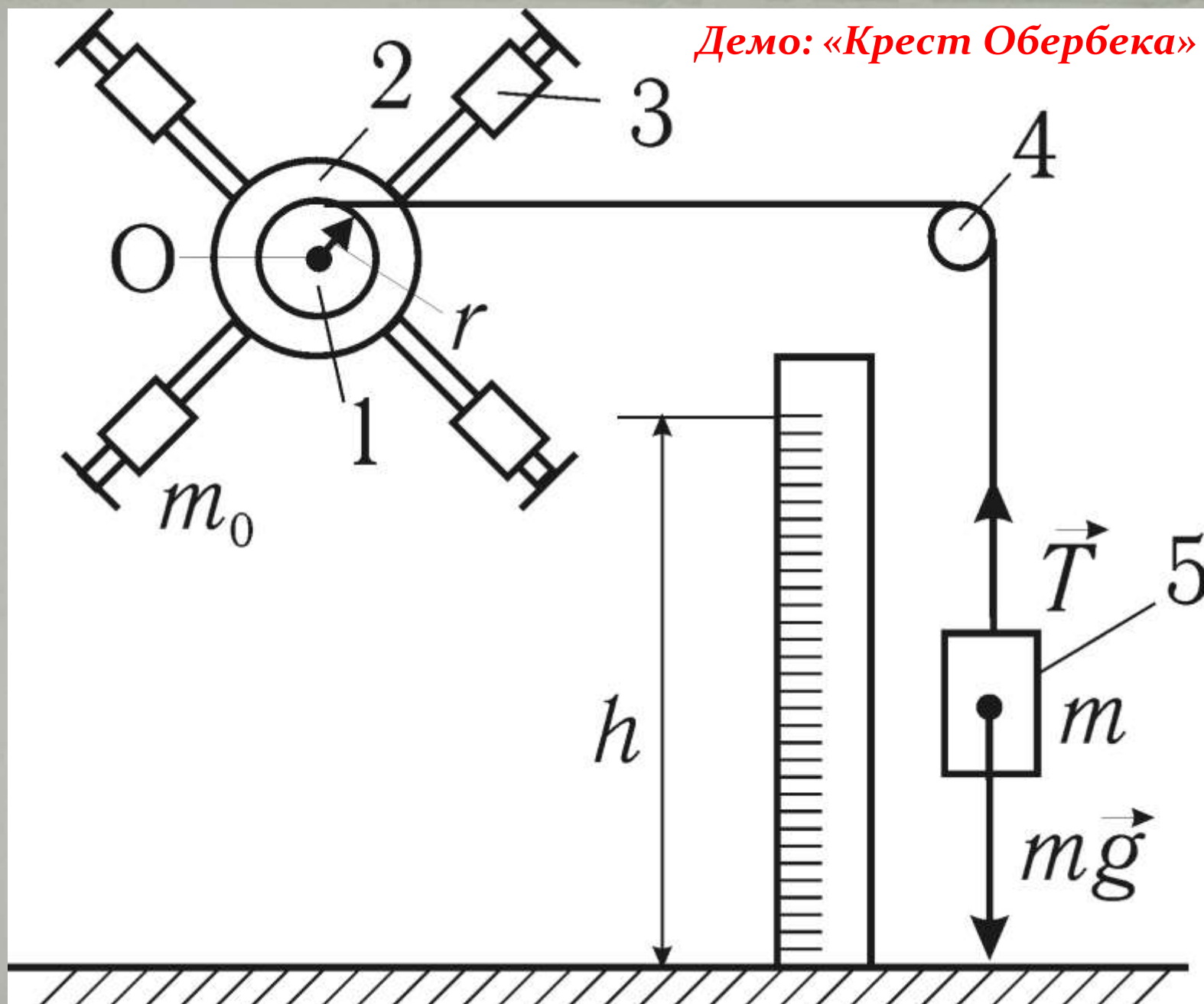


Лекция 4. Динамика твёрдого тела. Сохранение импульса и момента импульса



Демо: «Крест Обербека»



“Наклонная плоскость Галилея”

(скатывание сплошного и полого цилиндров)



► (Опр.) Моментом инерции твёрдого тела относительно оси Z называется сумма произведений масс всех элементов тела на квадраты их расстояний до оси:

$$I_z = \sum_{i=1}^n (\Delta m_i R_i^2)$$

$$\Delta m_i \rightarrow dm$$

$$I_z = \int R^2 dm$$

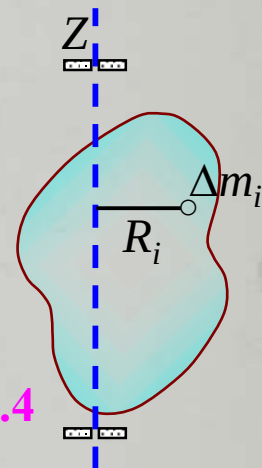


Рис. 4.4

Как масса **распределена** относительно оси

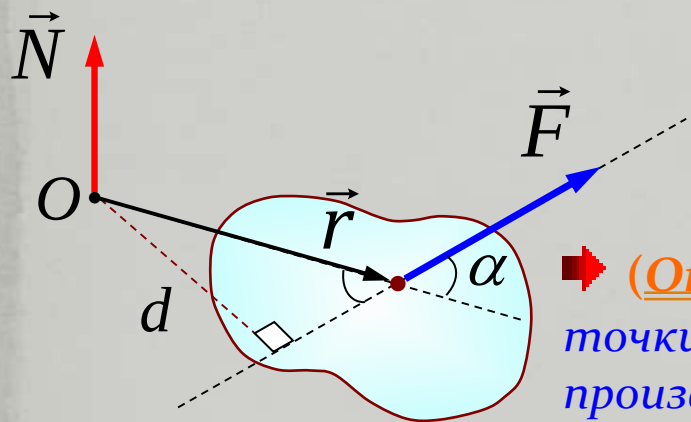


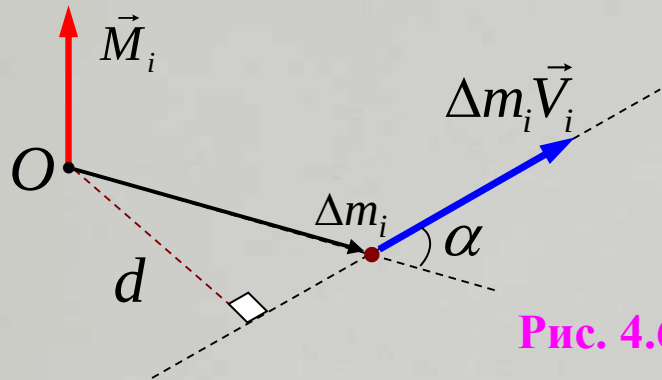
Рис. 4.5

► (Опр.) Моментом силы $\vec{N}$ относительно некоторой точки пространства O называется векторное произведение радиус-вектора $\vec{r}$, проведённого из точки O в точку приложения силы, на вектор этой силы $\vec{F}$:

$N = F \times d$ – “сила на плечо”

$$\vec{N} = [\vec{r}, \vec{F}]$$

■ **(Опр.)** Моментом импульса $\vec{M}_i$ материальной точки Δm_i относительно точки пространства O называется векторное произведение радиус-вектора $\vec{r}_i$, проведённого из точки O к материальной точке, на импульс этой частицы $\Delta m_i \vec{V}_i$

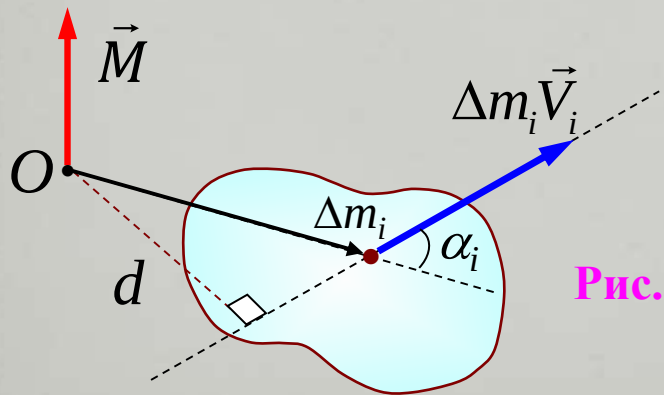


$$\vec{M}_i = [\vec{r}_i, \Delta m_i \vec{V}_i]$$

“Одна частица”

Рис. 4.6

■ **(Опр.)** Моментом импульса твёрдого тела (системы МТ) относительно точки пространства O называется сумма моментов импульса отдельных элементов твёрдого тела относительно этой же точки:



$$\vec{M} = \sum_{i=1}^n [\vec{r}_i, \Delta m_i \vec{V}_i]$$

“Система частиц”

Рис. 4.7

4.3. Уравнение моментов

а) Для одной частицы (материальной точки)

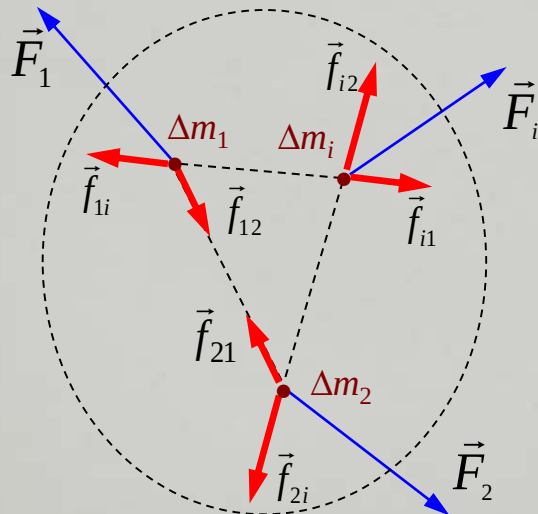
$$\frac{d\vec{M}_i}{dt} = \left[\frac{d\vec{r}_i}{dt}, \Delta m_i \vec{V}_i \right] + \left[\vec{r}_i, \Delta m_i \frac{d\vec{V}_i}{dt} \right]$$

$\Delta m_i \frac{d\vec{V}_i}{dt} = \vec{F}_i$
 $[\vec{r}_i, \vec{F}_i] \equiv \vec{N}_i$

$$\frac{d\vec{M}_i}{dt} = \vec{N}_i$$

Скорость изменения момента импульса частицы равна моменту силы, действующей на эту частицу

б) Для системы материальных точек (и твёрдого тела)



в ИСО!:



$$\begin{cases} \frac{d\vec{M}_1}{dt} = \sum_{j=2}^n \vec{N}_{ij}^{\text{внутр}} + \vec{N}_1^{\text{внешн}}; \\ \dots & \dots \\ \frac{d\vec{M}_i}{dt} = \sum_{j \neq i}^n \vec{N}_{ij}^{\text{внутр}} + \vec{N}_i^{\text{внешн}}; \\ \dots & \dots \\ \frac{d\vec{M}_n}{dt} = \sum_{j=1}^{n-1} \vec{N}_{nj}^{\text{внутр}} + \vec{N}_n^{\text{внешн}}. \end{cases}$$

Рис. 4.3

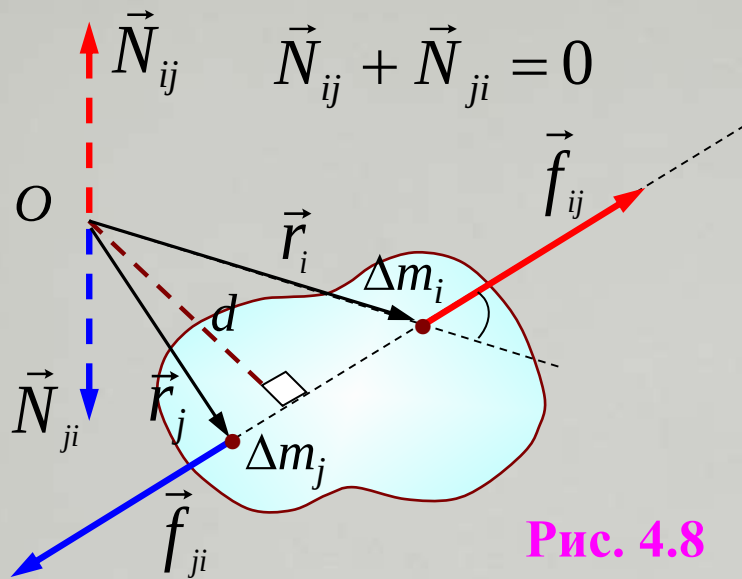


Рис. 4.8

Сумма справа:

$$\sum_{i=1}^n \vec{N}_i^{\text{внешн}}$$

Сумма слева: $\frac{d\vec{M}}{dt}$

♣ Скорость изменения момента импульса системы материальных точек (и твёрдого тела)

равна сумме моментов внешних сил, действующих на все частицы этой системы



$$\frac{d\vec{M}}{dt} = \sum_{i=1}^n \vec{N}_i^{\text{внешн}}$$

• Замечания:

1) ИСО !! (а ещё «система центра масс»);

2) можно и для проекций;

$$\frac{dM_z}{dt} = \sum_{i=1}^n N_{zi}^{\text{внешн}}$$

4.4. Вращение ТТ относительно закреплённой оси.

4.4.1. Осевой момент импульса (расчёт)

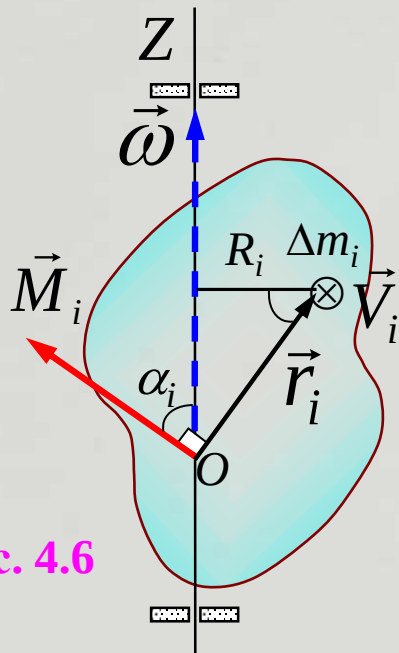


Рис. 4.6

$$M_{iz} = M_i \cdot \cos \alpha_i = r_i \cdot \Delta m_i v_i \cdot \cos \alpha_i = \\ = \Delta m_i v_i = \Delta m_i \cdot \omega R_i^2$$

$$M_z = \sum_{i=1}^n M_{iz} = \sum_{i=1}^n (\Delta m_i \omega R_i^2) = \left[\sum_{i=1}^n (\Delta m_i R_i^2) \right] \cdot \omega$$

Вот «откуда»:

$$I_z = \sum_{i=1}^n (\Delta m_i R_i^2)$$

♣ **Результат:**

$$M_z = I_z \cdot \omega$$



Аналогии

??



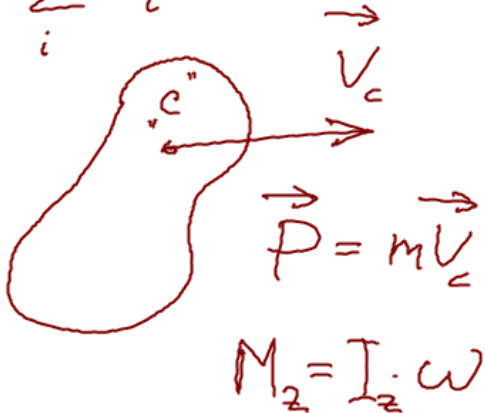
4.4.1. Осевой момент импульса

Доска 1

$$\frac{d\vec{M}}{dt} = \sum_i \vec{N}_i^{\text{внеш.}};$$

$$Z: \frac{dM_z}{dt} = \sum_i N_{iz}^{\text{внеш.}}$$

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \sum_i \vec{F}_i$$



$$M = \sum_i [\vec{r}_i, \Delta m_i \vec{V}_i]$$

$M_z = ?$

$$M_{zi} = \vec{r}_i \cdot \Delta m_i \vec{V}_i \cdot \cos \alpha_i =$$

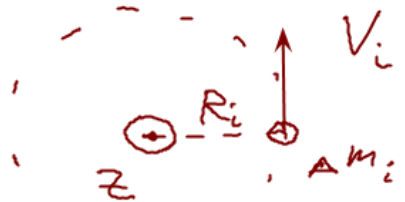
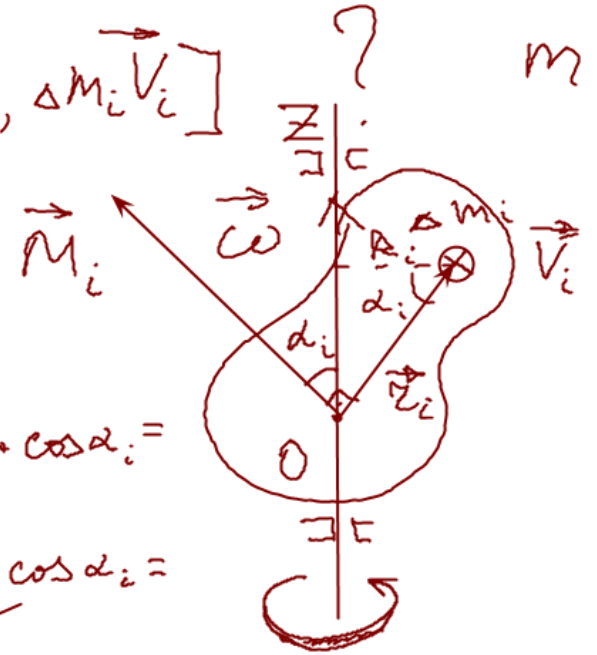
$$= \underbrace{\vec{r}_i \cdot \Delta m_i \cdot \omega R_i}_{R_i} \cos \alpha_i =$$

$$= \Delta m_i R_i^2 \cdot \omega$$

$$M_z = \sum_i (\Delta m_i R_i^2) \cdot \omega$$

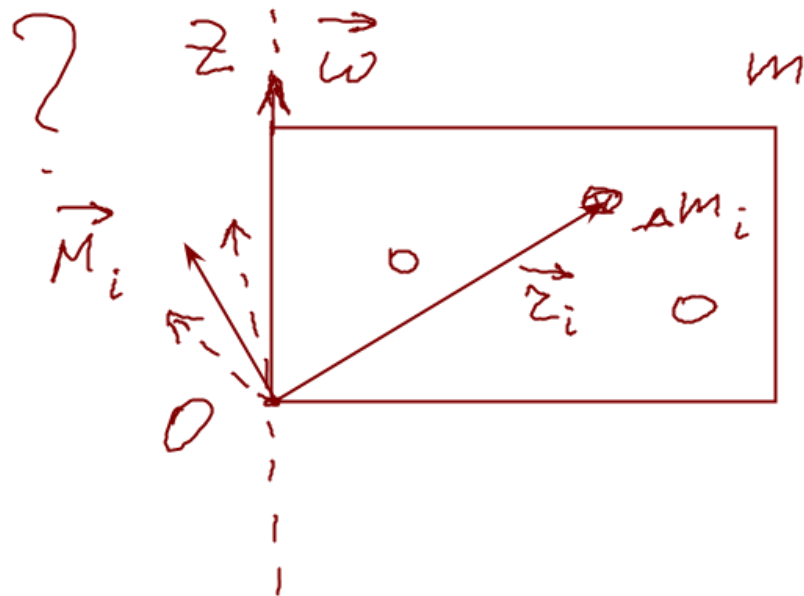
I_z

$$M_z = I_z \cdot \omega$$



Доска 2

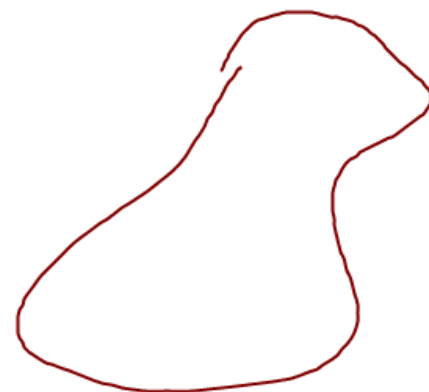
$$\vec{M} \neq I_z \vec{\omega}$$



$$\vec{M} = \sum_i \vec{M}_i$$

$$\vec{\omega} \uparrow \uparrow z;$$

$$\vec{M} \nparallel z$$



«импульс»: $\vec{P} = m\vec{V}_c$

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = m\vec{a}_c$$

«Момент импульса»:
(осевой)

$$M_z = I_z \cdot \omega$$

$$\frac{dM_z}{dt} = I_z \beta_z$$

... и ещё!

4.4.2. Основное уравнение динамики вращательного движения

«уравнение
моментов»:

$$\frac{dM_z}{dt} = \sum_{i=1}^n N_{zi}^{\text{внеш}} \Rightarrow$$

$$m\vec{a}_c = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i^{\text{внеш}}$$

2-й закон Н.:

$$I_z \beta_z = \sum_{i=1}^n N_{zi}^{\text{внеш}}$$

«2-й закон Н. для вращения»:

4.4.3. Теорема Гюйгенса-Штейнера («о параллельных осях»)



Теорема Гюйгенса-Штейнера :

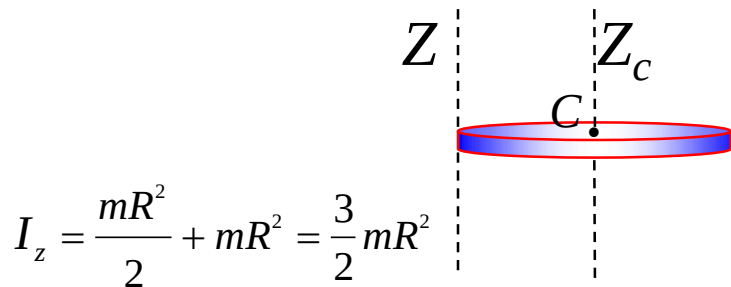
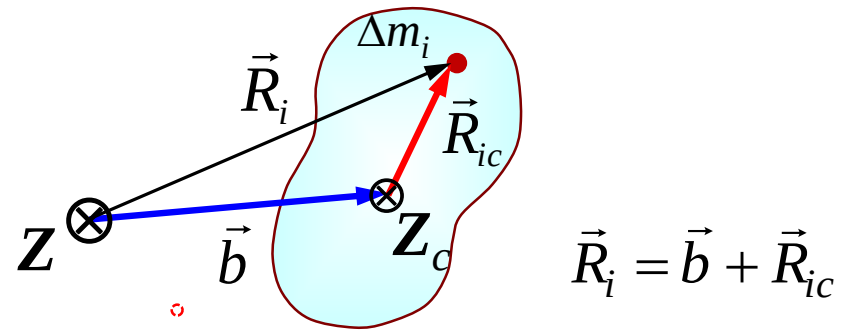


Рис. 4.7

a



b

$$I_z = I_c + mb^2$$

♣ Момент инерции I_z твёрдого тела относительно произвольной оси равен сумме момента инерции I_c относительно оси, параллельной данной и проходящей через его центр масс, и произведения массы тела на квадрат расстояния b между осями

*) Доказательство:

$$I_z = \sum_{i=1}^n (\Delta m_i R_i^2) = \sum_{i=1}^n \left[\Delta m_i (\vec{b} + \vec{R}_{ic})^2 \right]$$

$$(\vec{b} + \vec{R}_{ic})^2 = b^2 + 2(\vec{b}, \vec{R}_{ic}) + R_{ic}^2$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} \sum_{i=1}^n \Delta m_i b^2 = \left(\sum_{i=1}^n \Delta m_i \right) b^2 = mb^2 \\ \quad + \\ \sum_{i=1}^n \Delta m_i R_{ic}^2 = I_{zc} \\ \quad + \\ 2 \left(\vec{b}, \sum_{i=1}^n \Delta m_i \vec{R}_{ic} \right) = 0 \quad ! \end{array} \right.$$

4.5. Динамика плоского движения твёрдого тела. Система центра масс

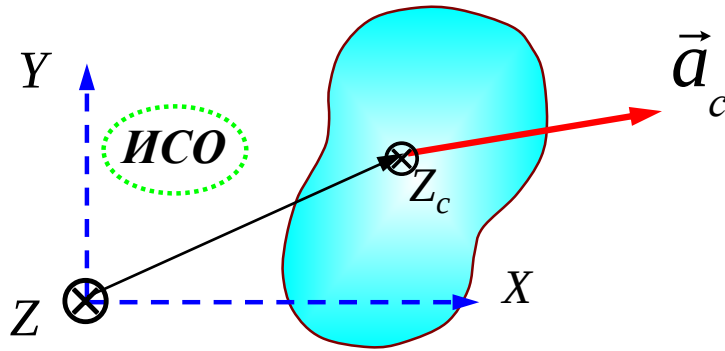


Рис. 4.8

$$\vec{a}_c = \frac{\sum_{i=1}^n \vec{F}_i^{\text{внешн.}}}{m}$$

$$I_z \cdot \beta_z = \sum_{i=1}^n N_{zi}^{\text{внешн.}} \quad \text{НО}$$

$$I_z = f(t) \quad ! \dots ?$$

! Уравнение моментов относительно центра масс (или оси Z_c) выглядит так же, как и в инерциальной системе отсчёта: (даже если эта система неинерциальна!)

$$\frac{d\vec{M}_c}{dt} = \sum_{i=1}^n \vec{N}_i^{\text{внешн.}}$$

$$I_{zc} \beta_z = \sum_{i=1}^n N_{zi}^{\text{внешн.}} \Rightarrow \begin{cases} m \vec{a}_c = \vec{F}^{\text{внешн.}}; \\ I_{zc} \beta_z = N_{zc}^{\text{внешн.}}; \\ I_{zc} = \dots; \\ + \text{"кинематика"} \end{cases} \quad (**)$$

Пример 4.1. Тело скатывается по наклонной плоскости. Найти ускорение его центра масс. Каковы условия качения без проскальзывания?

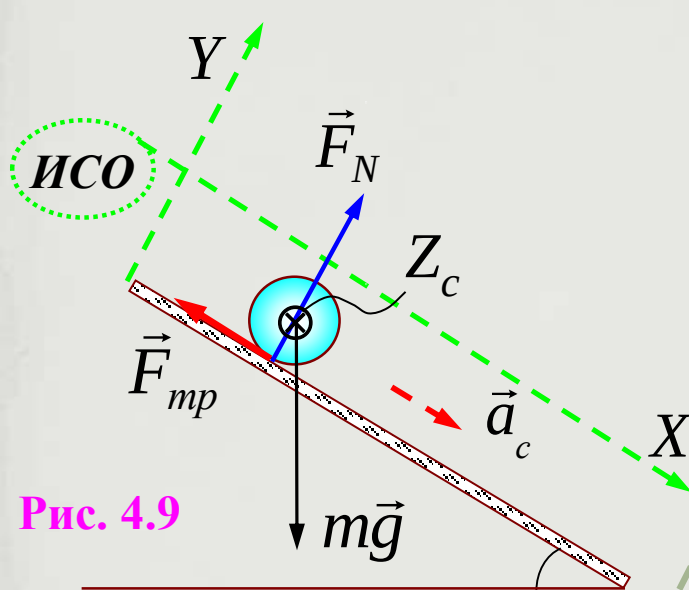


Рис. 4.9

$$\left\{ \begin{array}{l} ma_c = mg \cdot \sin \alpha - F_{mp} \\ (0 = mg \cdot \cos \alpha - F_N) \\ I_{zc} \beta = F_{mp} \cdot R \\ I_{zc} = \dots \\ a_c = \beta \cdot R \end{array} \right.$$

$$a_c = \frac{mg \sin \alpha}{m + I_{zc} / R^2}$$

Сплошной цилиндр:

$$a_c = \frac{2}{3} g \sin \alpha$$

Полый цилиндр:

$$a_c = \frac{1}{2} g \sin \alpha$$

Сплошной шар:

$$a_c = \frac{5}{7} g \sin \alpha$$

Д.З.: $\mu > \frac{\tan \alpha}{1 + mR^2 / I_{zc}}$

Доска 3

$$\beta = \frac{a_c}{R} \rightarrow \frac{I_{zc}}{R^2} a_c = F_{TP}$$

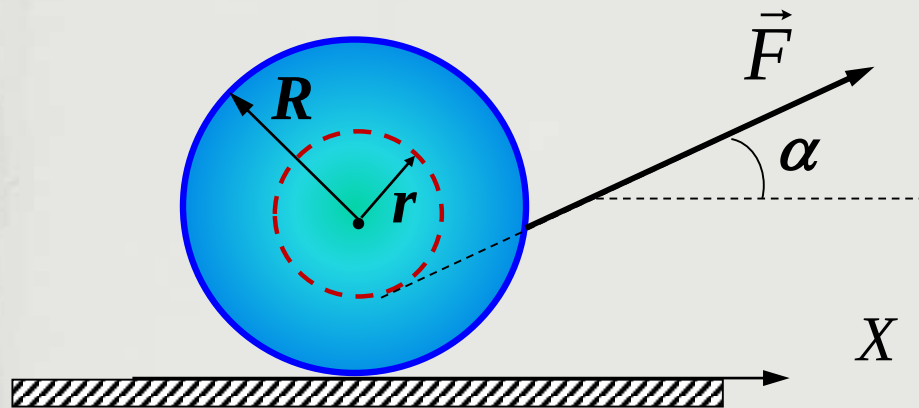
$$ma_c = mg \sin \alpha - \frac{I_{zc}}{R^2} a_c$$

$$a_c = \frac{mg \sin \alpha}{m + I_{zc}/R^2} \rightarrow$$

по условию $I_{zc} = \frac{mR^2}{2}$

$$a_c = \frac{2}{3} g \sin \alpha$$

Пример 4.2. (Задача о «послушной катушке») На горизонтальной поверхности лежит катушка с намотанной на неё нитью. За нитку тянут с силой F под углом α и катушка катится по поверхности без проскальзывания. Найти ускорение центра масс катушки. Величины F, m, I_z, α, R и r считать заданными.



$$\left\{ \begin{array}{l} ma_x = F \cdot \cos \alpha - F_{mp} \\ (0 = F_N + F \cdot \sin \alpha - mg) \\ I_{zc} \cdot \beta_z = F_{mp} \cdot R - F \cdot r \\ a_x = \beta_z \cdot R \end{array} \right.$$

$$a_x = \frac{F}{m + I_{zc} / R^2} \cdot \left(\cos \alpha - \frac{r}{R} \right)$$

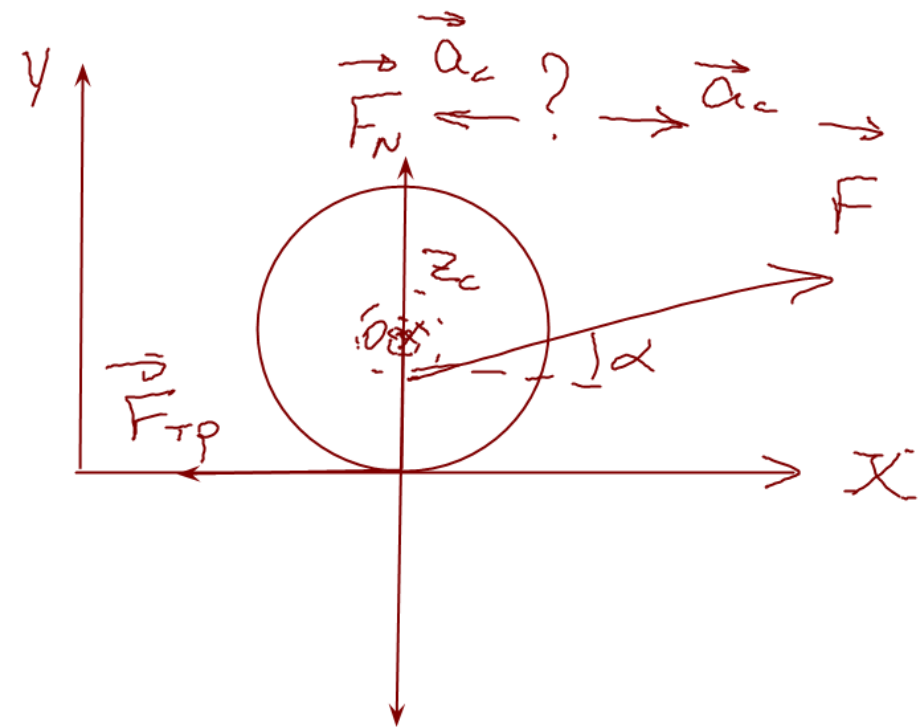
$$a_x \left\{ \begin{array}{l} > \\ < \\ = \end{array} \right. ??$$

Д.З.: Выяснить условие отсутствия проскальзывания? $\leftarrow \dots \left(F_{mp} < \mu \cdot F_N \right)$

Если проскальзывание: $F_{mp}^{\text{ск}} = \mu F_N = \mu \cdot (mg - F \cdot \sin \alpha)$

$$\beta = \frac{2\mu g \cos \alpha}{R}; \quad a_c = g(\sin \alpha - \mu \cos \alpha);$$

Доска 4



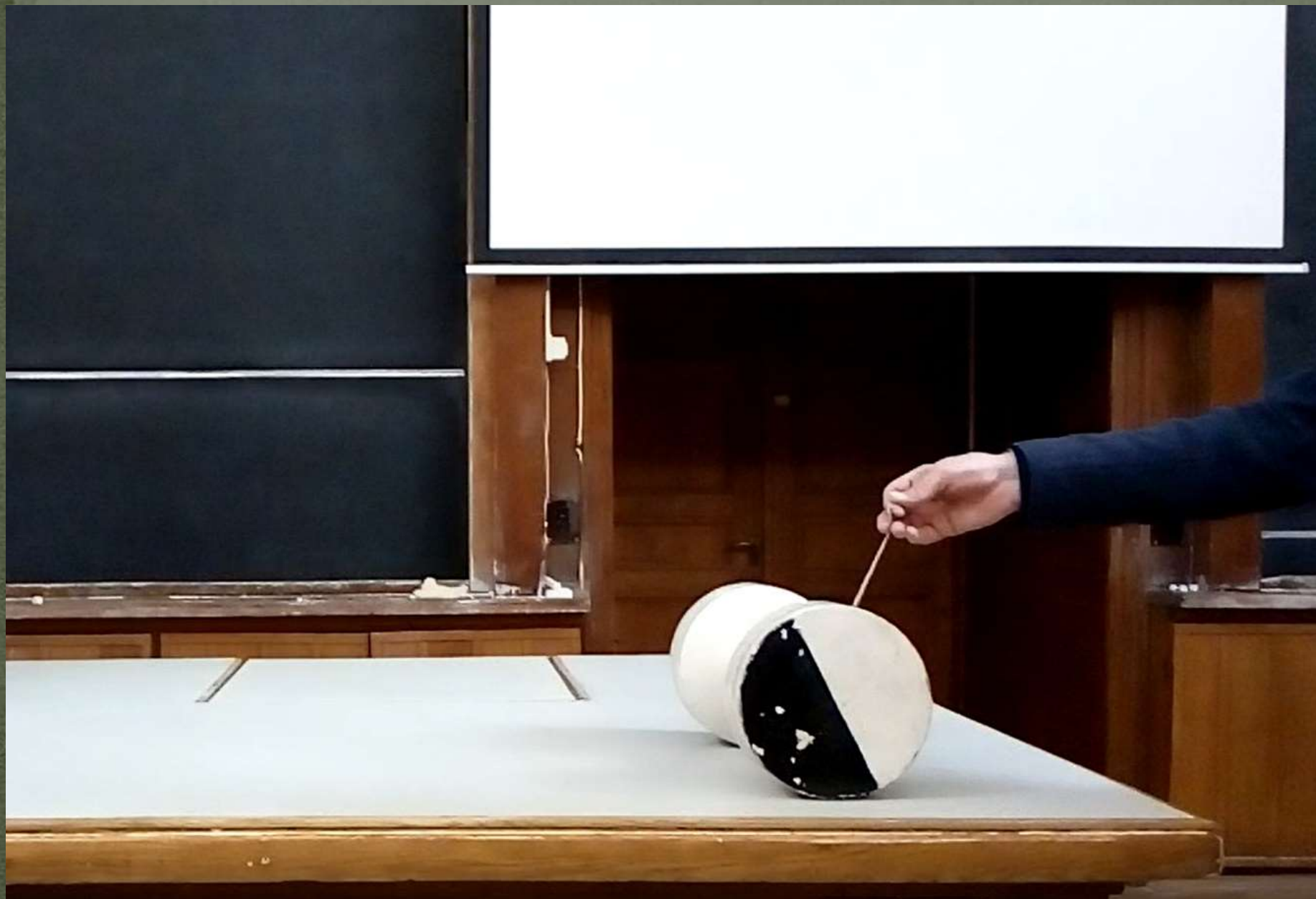
$$a_x = \frac{F \left(\cos \alpha - \frac{z}{R} \right)}{m + I_{zc}/R^2} ;$$

$$\left\{ \begin{array}{l} ma_x = F \cdot \cos \alpha - F_{TP} \\ (0 = F_N - mg + F \cdot \sin \alpha) \\ I_{zc} \cdot \beta_z = F_{TP} \cdot R - F \cdot z \\ a_x = \beta_z \cdot R \end{array} \right.$$

$$\cos \alpha > \frac{z}{R} \Rightarrow a_x > 0$$

$$\cos \alpha < \frac{z}{R} \Rightarrow a_x < 0$$

"Послушная катушка"



Проскальзывание: $F_{mp}^{ск} = \mu F_N = \mu \cdot (mg - F \cdot \sin \alpha)$

§ 5. Законы сохранения в механике

5.1. Закон сохранения импульса

ИСО:

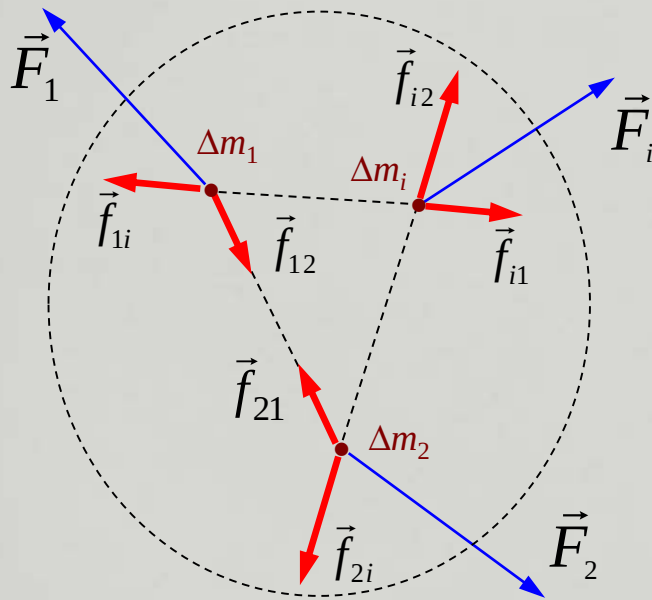


Рис. 4.3

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d\vec{p}_1}{dt} = \sum_{j \neq 1} \vec{f}_{1j} + \vec{F}_1^{\text{внешн}}; \\ \dots \dots \\ \frac{d\vec{p}_i}{dt} = \sum_{j \neq i} \vec{f}_{ij} + \vec{F}_i^{\text{внешн}}; \\ \dots \dots \\ \frac{d\vec{p}_n}{dt} = \sum_{j \neq n} \vec{f}_{nj} + \vec{F}_n^{\text{внешн}}. \end{array} \right. \quad \text{"+"}$$

$$\sum_{i=1}^n \frac{d\vec{p}_i}{dt} = \sum_{i \neq j} (\vec{f}_{ij} + \vec{f}_{ji}) + \sum_{i=1}^n \vec{F}_i^{\text{внешн.}}$$

$$\vec{f}_{ij} = -\vec{f}_{ji}$$

Сумма справа:

$$\sum_{i=1}^n \vec{F}_i^{\text{внешн.}}$$

Сумма слева:

$$\sum_{i=1}^n \frac{d\vec{p}_i}{dt} = \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^n \vec{p}_i = \frac{d\vec{P}}{dt}$$

Итог:

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i^{\text{внешн.}}$$

Как и для М.Т. !

Закон сохранения импульса:

♣ **Если** сумма всех внешних сил, действующих на тела системы равна нулю, то импульс системы не меняется с течением времени (т.е. сохраняется)

Если $\sum_{i=1}^n \vec{F}_i^{\text{внешн.}} = 0$, **то** $\vec{P}^{\text{"до"}} = \vec{P}^{\text{"после"}}$.