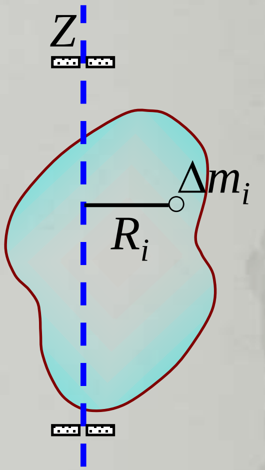
Лекция 4. *Динамика твёрдого тела. Сохранение импульса и момента импульса*

(**Опр.**) ***Моментом инерции твёрдого тела относительно оси Z называется сумма произведений масс всех элементов тела на квадраты их расстояний до оси:***

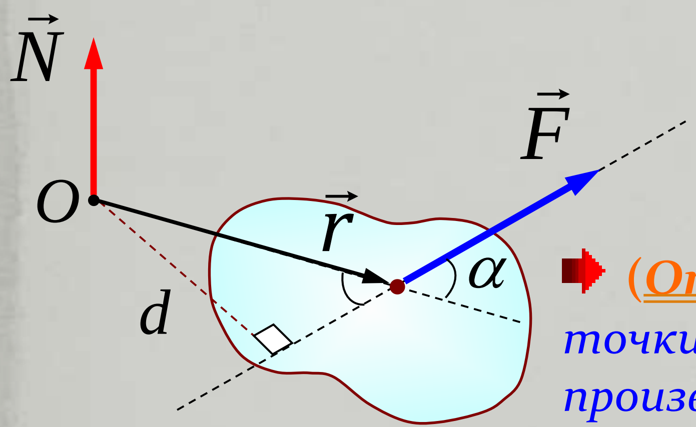
$$I_z = \sum_{i=1}^{n} (\Delta m_i R_i^2)$$

$$\Delta m_i \to dm$$

$$I_z = \int R^2 dm$$



Как масса ***распределена*** *относительно оси*

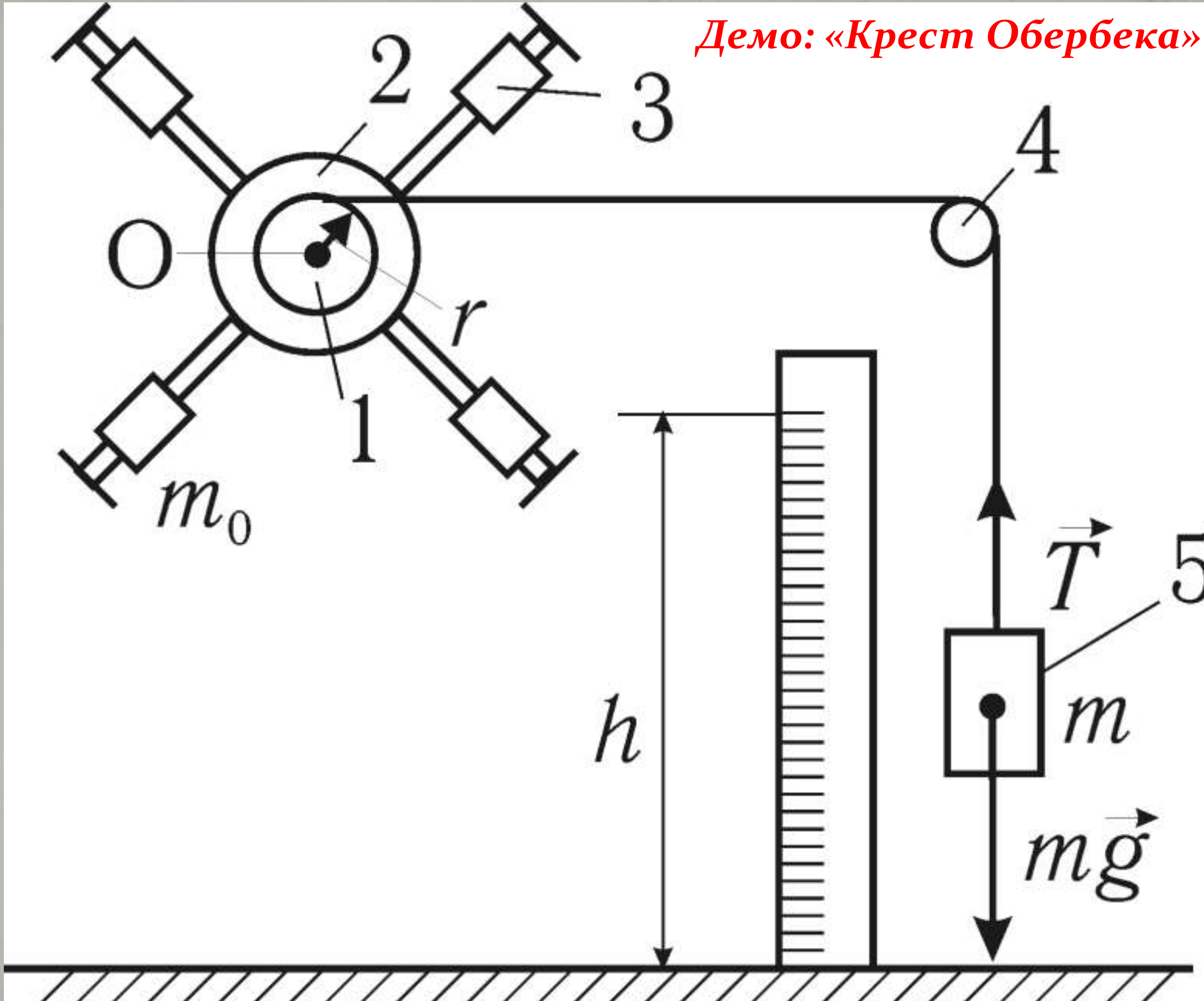


(**Опр.**) ***Моментом силы*** $\vec{N}$ *относительно некоторой точки пространства O называется векторное произведение радиус-вектора* $\vec{r}$*, проведённого из точки O в точку приложения силы, на вектор этой силы* $\vec{F}$ *:*

$$\vec{N} = [\vec{r}, \vec{F}]$$

$N = F \times d$ – *“сила на плечо”*

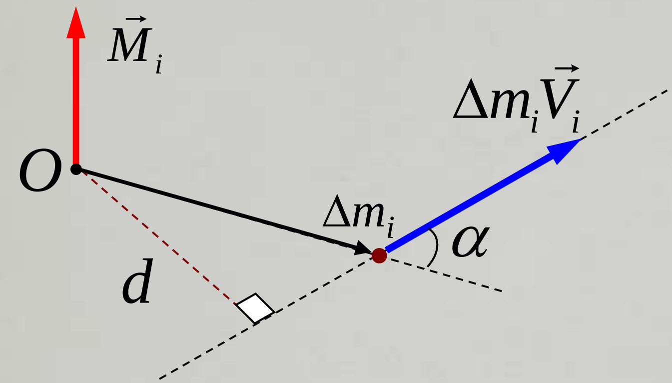
Демо: «Крест Обербека»



“Наклонная плоскость Галилея”

(скатывание сплошного и полого цилиндров)

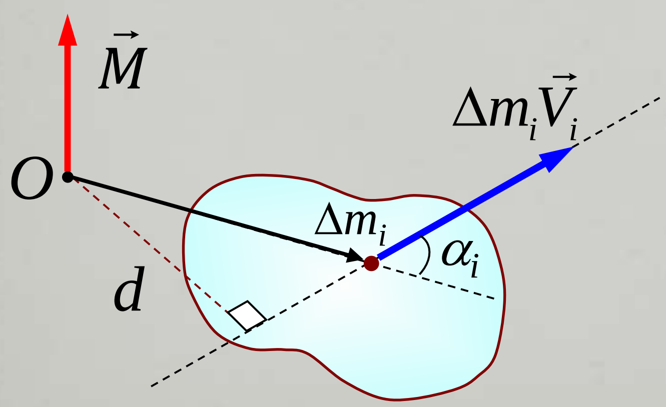
(**Опр.**) ***Моментом импульса*** $\vec{M}_i$ *материальной точки* Δm_i *относительно точки пространства O называется векторное произведение радиус-вектора* $\vec{r}_i$, *проведённого из точки O к материальной точке, на импульс этой частицы* $\Delta m_i \vec{V}_i$



$$\vec{M}_i = [\vec{r}_i, \Delta m_i \vec{V}_i]$$

“Одна частица”

(**Опр.**) ***Моментом импульса твёрдого тела (системы МТ) относительно точки пространства O называется сумма моментов импульса отдельных элементов твёрдого тела относительно этой же точки:***



$$\vec{M} = \sum_{i=1}^{n} [\vec{r}_i, \Delta m_i \vec{V}_i]$$

“Система частиц”

4.3. Уравнение моментов

а) Для одной частицы (материальной точки)

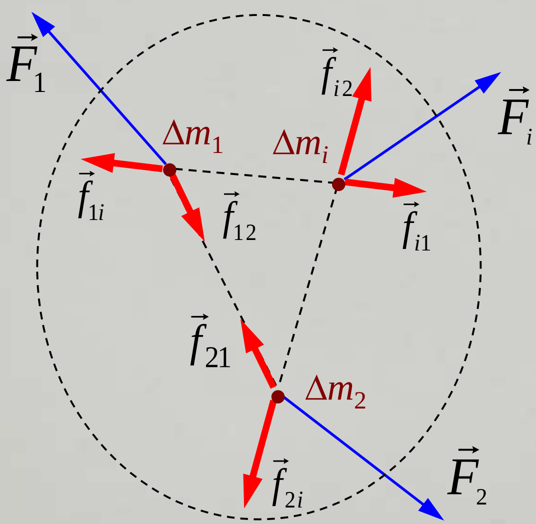
$$\left.\begin{aligned}
&\frac{d\vec{M}_i}{dt} = \left[\frac{d\vec{r}_i}{dt}, \Delta m_i \vec{V}_i\right] + \left[\vec{r}_i, \Delta m_i \frac{d\vec{V}_i}{dt}\right] \\
&\Delta m_i \frac{d\vec{V}_i}{dt} = \vec{F}_i \\
&[\vec{r}_i, \vec{F}_i] \equiv \vec{N}_i
\end{aligned}\right\}$$

?

$$\frac{d\vec{M}_i}{dt} = \vec{N}_i$$

Скорость изменения момента импульса частицы равна моменту силы, действующей на эту частицу

б) Для системы материальных точек (и твёрдого тела)

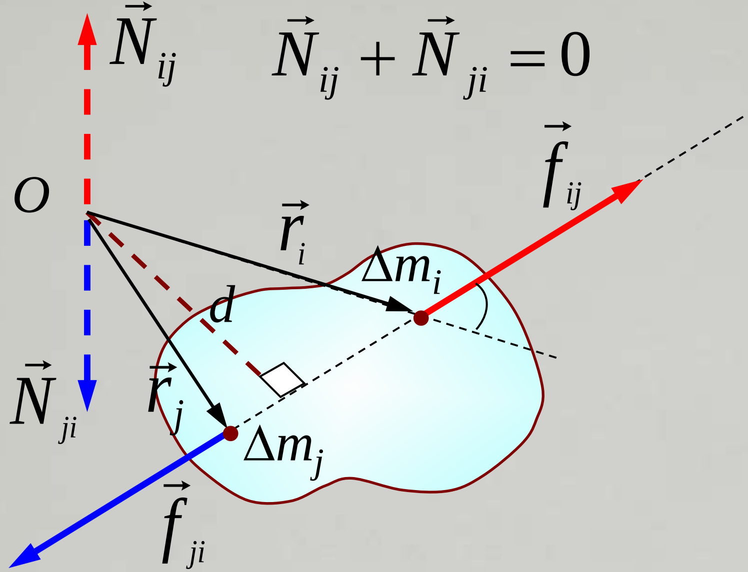


Rem: Рис. 4.3

в ИСО!:

$$\begin{cases}
\dfrac{d\vec{M}_1}{dt} = \displaystyle\sum_{j=2}^{n} \vec{N}_{1j}^{\,внутр} + \vec{N}_1^{\,внешн}; \\
\quad \ldots \qquad \ldots \\
\dfrac{d\vec{M}_i}{dt} = \displaystyle\sum_{j \neq i}^{n} \vec{N}_{ij}^{\,внутр} + \vec{N}_i^{\,внешн}; \\
\quad \ldots \qquad \ldots \\
\dfrac{d\vec{M}_n}{dt} = \displaystyle\sum_{j=1}^{n-1} \vec{N}_{nj}^{\,внутр} + \vec{N}_n^{\,внешн}.
\end{cases}$$

$$\vec{N}_{ij} + \vec{N}_{ji} = 0$$



Сумма справа:

$$\sum_{i=1}^{n} \vec{N}_i^{\,внешн}$$

Сумма слева: $\dfrac{d\vec{M}}{dt}$

♣ ***Скорость изменения момента импульса системы материальных точек (и твёрдого тела) равна сумме моментов внешних сил, действующих на все частицы этой системы***

$$\frac{d\vec{M}}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \vec{N}_i^{\,внешн}$$

- Замечания:

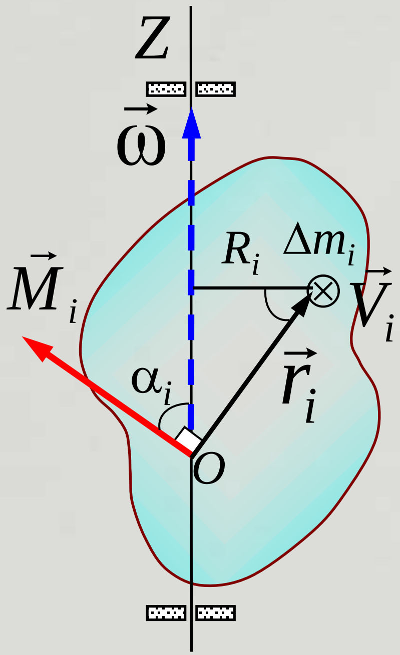
1) ***ИСО*** **!!** (а ещё «система центра масс») ;

2) **можно и для проекций ;**

$$\frac{dM_z}{dt} = \sum_{i=1}^{n} N_{zi}^{внеш}$$

4.4. Вращение ТТ относительно закреплённой оси.

4.4.1. Осевой момент импульса (расчёт)



$$M_{iz} = M_i \cdot \cos\alpha_i = r_i \cdot \Delta m_i \upsilon_i \cdot \cos\alpha_i =$$

$$= R_i \Delta m_i \upsilon_i = R_i \Delta m_i \omega R_i = \omega \cdot \Delta m_i R_i^2$$

$$M_z = \sum_{i=1}^{n} M_{iz} = \sum_{i=1}^{n} \left(\Delta m_i \omega R_i^2\right) = \left[\sum_{i=1}^{n} \left(\Delta m_i R_i^2\right)\right] \cdot \omega$$

Вот «откуда»: $\boxed{I_z = \sum_{i=1}^{n} \left(\Delta m_i R_i^2\right)}$

♣ ***Результат:*** $M_z = I_z \cdot \omega$

Аналогии ??

«импульс»: $\vec{P} = m\vec{V}_c$

«Момент импульса»: $M_z = I_z \cdot \omega$

(осевой)

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = m\vec{a}_c$$

$$\frac{dM_z}{dt} = I_z \beta_z$$

... и ещё!

4.4.2. Основное уравнение динамики вращательного движения

«уравнение моментов»: $$\frac{dM_z}{dt} = \sum_{i=1}^{n} N_{zi}^{внеш} \Rightarrow$$

$$m\vec{a}_c = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i^{внеш}$$

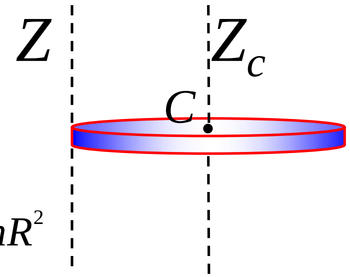
2-й закон Н.:

$$I_z \beta_z = \sum_{i=1}^{n} N_{zi}^{внеш}$$

"2-й закон Н. для вращения":

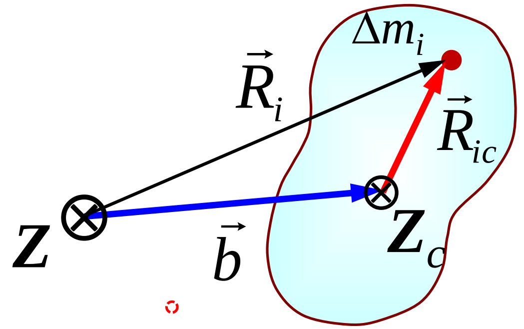
4.4.3. Теорема Гюйгенса-Штейнера ("о параллельных осях")

Теорема Гюйгенса-Штейнера :



$$I_z = \frac{mR^2}{2} + mR^2 = \frac{3}{2}mR^2$$

а



$$\vec{R}_i = \vec{b} + \vec{R}_{ic}$$

б

$$I_z = I_c + mb^2$$

♣ ***Момент инерции I_z твёрдого тела относительно произвольной оси равен сумме момента инерции I_c относительно оси, параллельной данной и проходящей через его центр масс, и произведения массы тела на квадрат расстояния b между осями***

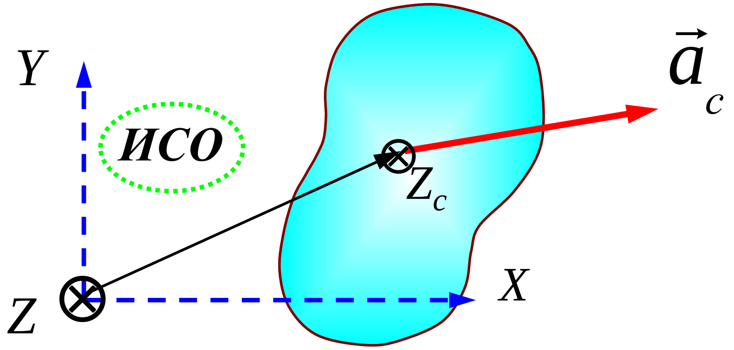
*) Доказательство:

$$I_z = \sum_{i=1}^{n}\left(\Delta m_i R_i^2\right) = \sum_{i=1}^{n}\left[\Delta m_i \underline{\underline{\left(\vec{b} + \vec{R}_{ic}\right)^2}}\right]$$

$$\left(\vec{b} + \vec{R}_{ic}\right)^2 = b^2 + 2\left(\vec{b}, \vec{R}_{ic}\right) + R_{ic}^2$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} \sum_{i=1}^{n}\Delta m_i b^2 = \left(\sum_{i=1}^{n}\Delta m_i\right) b^2 = mb^2 \\ + \\ \sum_{i=1}^{n}\Delta m_i R_{ic}^2 = I_{zc} \\ + \\ 2\left(\vec{b}, \sum_{i=1}^{n}\Delta m_i \vec{R}_{ic}\right) = 0 \quad ! \end{array} \right.$$

4.5. Динамика плоского движения твёрдого тела. Система центра масс



$$\vec{a}_c = \frac{\sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i^{\,внешн.}}{m}$$

$$I_z \cdot \beta_z = \sum_{i=1}^{n} N_{zi}^{внешн.}$$

НО

$$I_Z = f(t)$$

! … ?

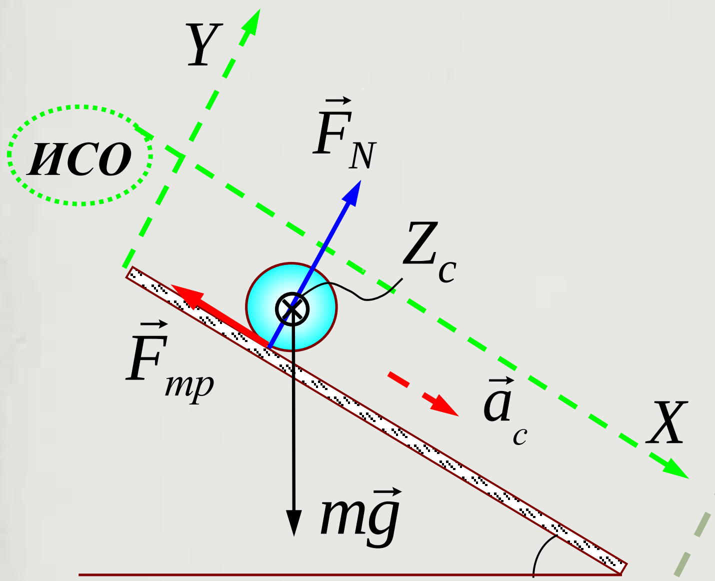
! *Уравнение моментов относительно центра масс (или оси Z_c) выглядит так же, как и в инерциальной системе отсчёта:*

$$\frac{d\vec{M}_c}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \vec{N}_i^{\,внешн.}$$

(даже если эта система неинерциальна!)

$$I_c \beta_c = \sum_{i=1}^{n} N_{ci}^{внешн.} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} m\vec{a}_c = \vec{F}^{\,внешн.}; \\ I_c \beta_z = N_c^{внешн.}; \\ I_c = \quad \ldots \quad ; \\ + \quad \text{"кинематика"} \end{cases} \qquad (**)$$

Пример 4.1. Тело скатывается по наклонной плоскости. Найти ускорение его центра масс. Каковы условия качения без проскальзывания?



$$\begin{cases} ma_c = mg\cdot\sin\alpha - F_{тр}\,; \\ (0 = mg\cdot\cos\alpha - F_N\,;) \\ I_c\beta = F_{тр}\cdot R\,; \\ I_c = \ldots\,; \\ a_c = \beta\cdot R\,. \end{cases}$$

$$a_c = \frac{mg\cdot\sin\alpha}{m + I_c / R^2}$$

Сплошной цилиндр: $a_c = \frac{2}{3}\cdot g\sin\alpha$

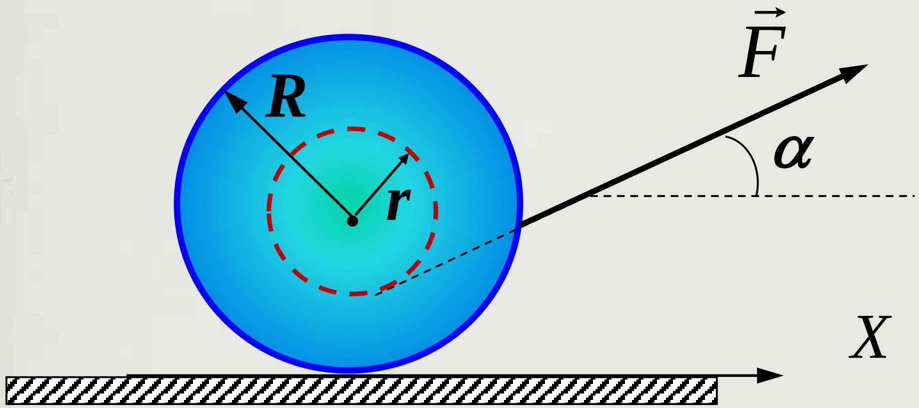
Полый цилиндр: $a_c = \frac{1}{2}\cdot g\sin\alpha$

Сплошной шар: $a_c = \frac{5}{7}\cdot g\sin\alpha$

Д.З.: $\mu > \frac{tg\alpha}{1 + mR^2 / I_c}$

Условие отсутствия проскальзывания

Пример 4.2. (Задача о «послушной катушке») На горизонтальной поверхности лежит катушка с намотанной на неё нитью. За нитку тянут с силой F под углом α и катушка катится по поверхности без проскальзывания. Найти ускорение центра масс катушки. Величины F, m, I_Z, α, R и r считать заданными.



$$\begin{cases} ma_x = F\cdot\cos\alpha - F_{mp} \\ (0 = F_N + F\cdot\sin\alpha - mg) \\ I_{zc}\cdot\beta_z = F_{mp}\cdot R - F\cdot r \\ a_x = \beta_z\cdot R \end{cases}$$

$$a_x = \frac{F}{m + I_{zc}/R^2}\cdot\left(\cos\alpha - \frac{r}{R}\right)$$

$$a_x \begin{cases} > \\ < \\ = \end{cases} \quad ??$$

Д.З.: Выяснить условие отсутствия проскальзывания? $(F_{mp} < \mu\cdot F_N)$

Если проскальзывание: $F_{mp}^{\text{ск}} = \mu F_N = \mu\cdot(mg - F\cdot\sin\alpha)$

$$\beta = \frac{2\mu g\cos\alpha}{R};\qquad a_c = g(\sin\alpha - \mu\cos\alpha);$$

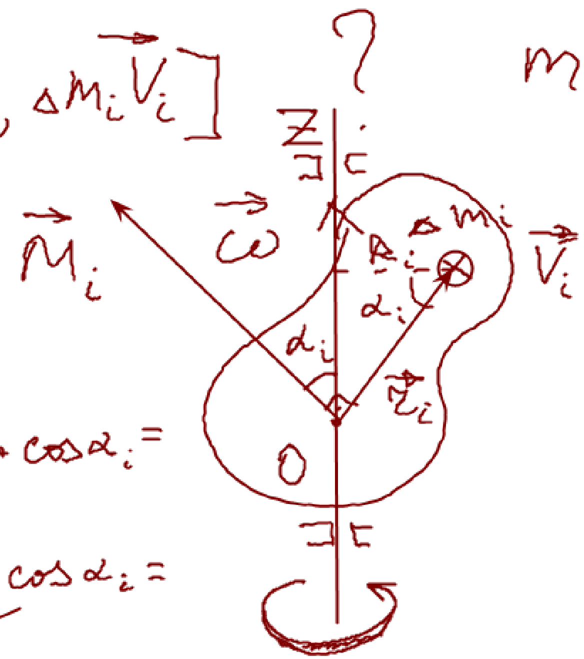
4.4.1. Осевой момент импульса

Доска 1

$$\frac{d\vec{M}}{dt} = \sum_i \vec{N}_i^{\text{внешн.}};$$

(Опр.) $$\vec{M} = \sum_i [\vec{r}_i, \Delta m_i \vec{V}_i]$$

$$M_z - ?$$



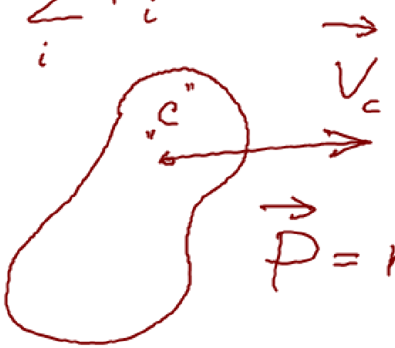
$$z: \quad \frac{dM_z}{dt} = \sum_i N_{iz}^{\text{внешн}}$$

$$M_{zi} = r_i \cdot \Delta m_i V_i \cdot \cos\alpha_i =$$

$$= \underbrace{r_i \cdot \Delta m_i \cdot \omega R_i \cos\alpha_i}_{R_i} =$$

$$= \Delta m_i R_i^2 \cdot \omega.$$

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \sum_i \vec{F}_i$$



$$\vec{P} = m\vec{V}_c$$

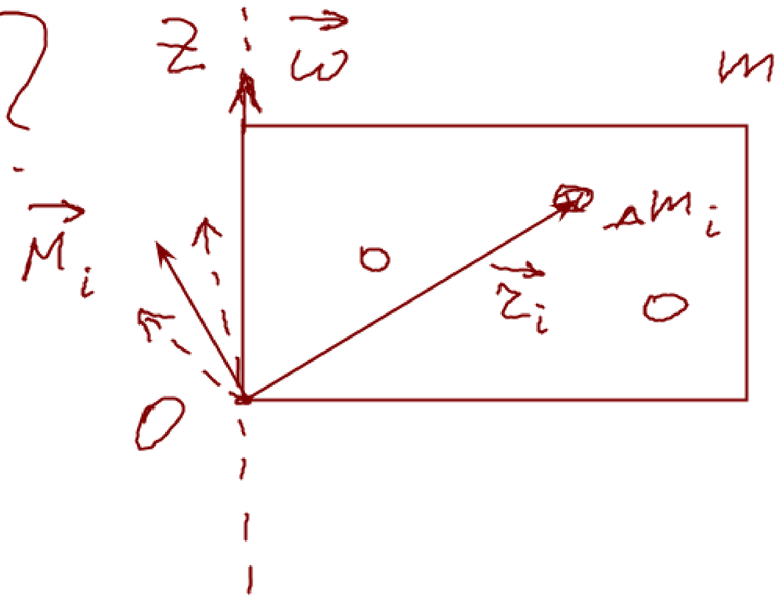
$$M_z = \underbrace{\sum_i (\Delta m_i R_i^2)}_{I_z} \cdot \omega$$

$$M_z = I_z \cdot \omega$$

$$\boxed{M_z = I_z \cdot \omega}$$

Доска 2

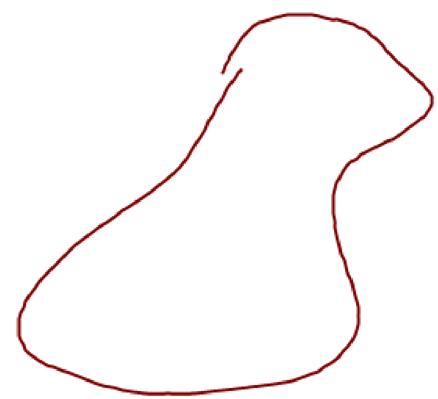
$\vec{M} \cancel{=} I_z \vec{\omega}$?



$\vec{M} = \sum_i \vec{M}_i$

$\vec{\omega} \uparrow\uparrow z$;

$\vec{M} \not\parallel z$



Доска 3

$$\beta = \frac{a_c}{R} \longrightarrow \frac{I_{zc}}{R^2}\, a_c = F_{тр}$$

$$m a_c = m g \sin\alpha - \frac{I_{zc}}{R^2}\, a_c$$

$$a_c = \frac{m g \sin\alpha}{m + I_{zc}/R^2} \longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} a_c = \frac{2}{3}\, g \sin\alpha \\ \dots \end{array} \right.$$

диска $\quad I_z = \dfrac{mR^2}{2}$