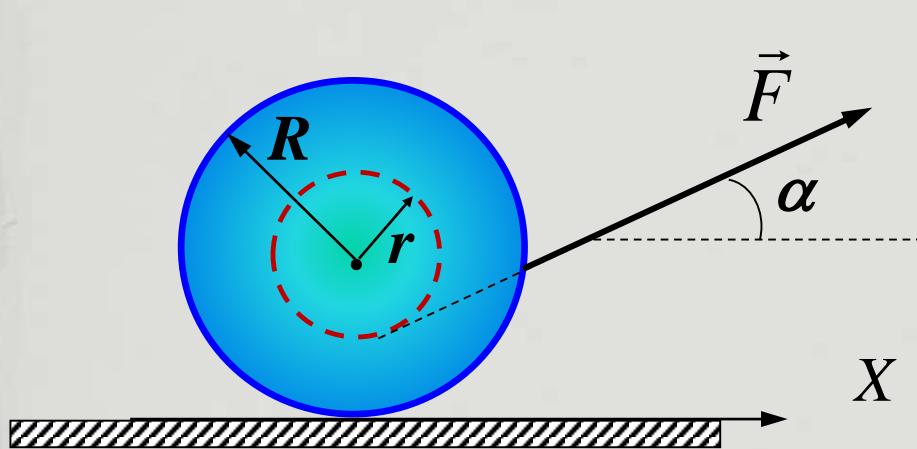


Лекция 5. Законы сохранения в механике



Пример 4.2. (Задача о «послушной катушке») На горизонтальной поверхности лежит катушка с намотанной на неё нитью. За нитку тянут с силой F под углом α и катушка катится по поверхности без проскальзывания. Найти ускорение центра масс катушки. Величины F, m, I_z, α, R и r считать заданными.



$$\left\{ \begin{array}{l} ma_x = F \cdot \cos \alpha - F_{mp} ; \\ (0 = F_N + F \cdot \sin \alpha - mg) \\ I_{zc} \cdot \beta_z = F_{mp} \cdot R - F \cdot r ; \\ a_x = \beta_z \cdot R . \end{array} \right.$$

$$a_x = \frac{F}{m + I_{zc} / R^2} \cdot \left(\cos \alpha - \frac{r}{R} \right)$$

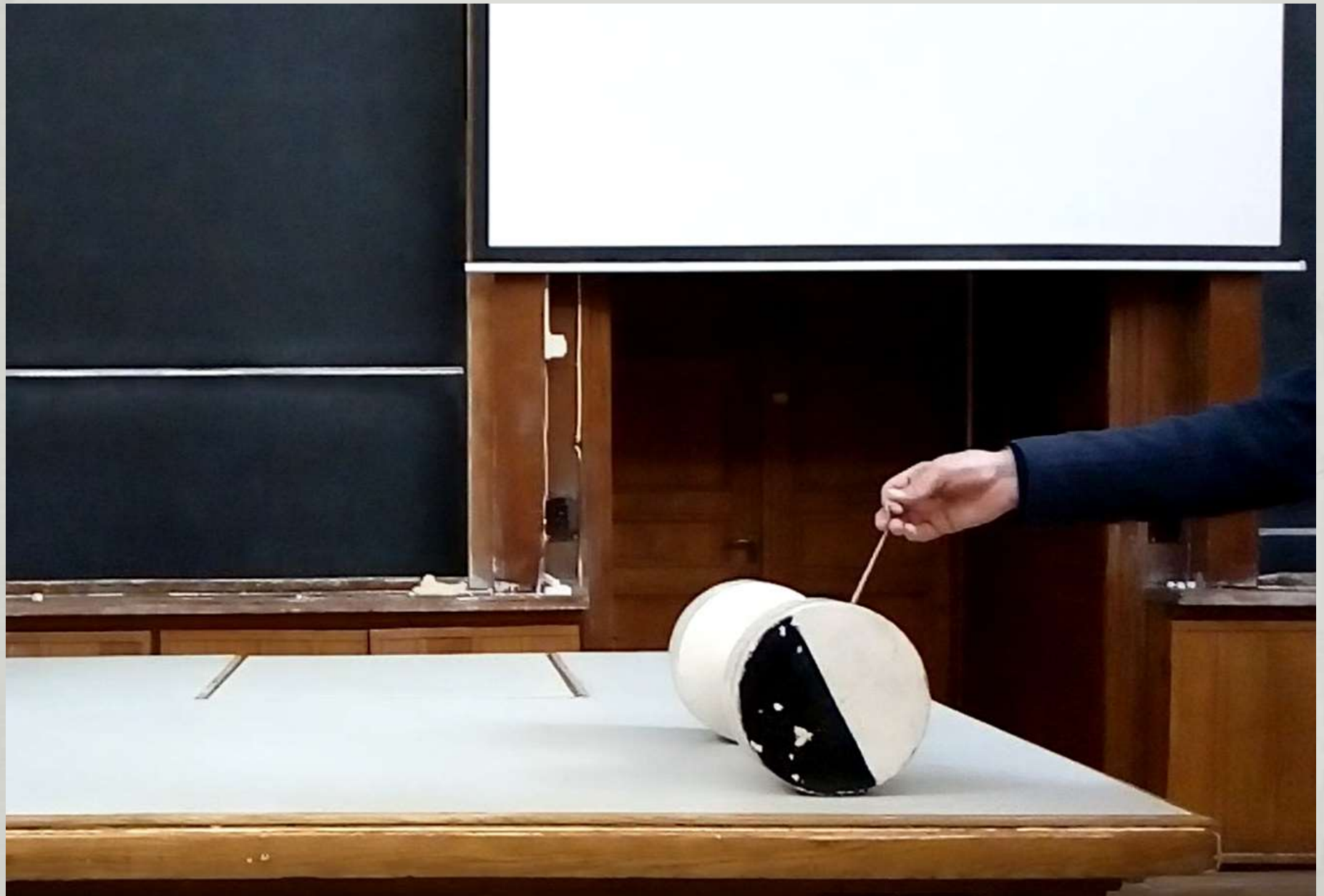
$$a_x \left\{ \begin{array}{l} > \\ < \\ = \end{array} \right. \quad ??$$

Д.З.: Выяснить условие отсутствия проскальзывания? $\leftarrow \dots \left(F_{mp} < \mu \cdot F_N \right)$

Если проскальзывание: $F_{mp}^{ск} = \mu F_N = \mu \cdot (mg - F \cdot \sin \alpha)$

$$\beta = \frac{2\mu g \cos \alpha}{R}; \quad a_c = g(\sin \alpha - \mu \cos \alpha);$$

"Послушная катушка"

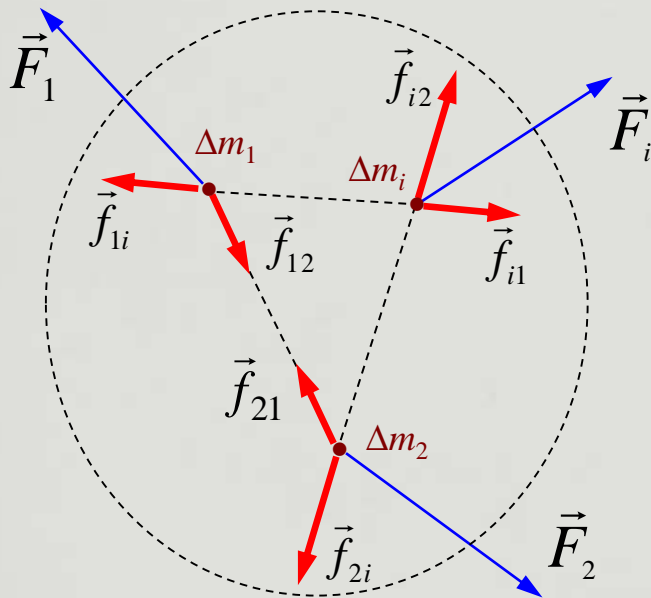


Проскальзывание:

$$F_{mp}^{ck} = \mu F_N = \mu \cdot (mg - F \cdot \sin \alpha)$$

§ 5. Законы сохранения в механике

5.1. Закон сохранения импульса



ИСО:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d\vec{p}_1}{dt} = \sum_{j \neq 1} \vec{f}_{1j} + \vec{F}_1^{\text{внешн}}; \\ \dots \dots \\ \frac{d\vec{p}_i}{dt} = \sum_{i \neq j} \vec{f}_{ij} + \vec{F}_i^{\text{внешн}}; \\ \dots \dots \\ \frac{d\vec{p}_n}{dt} = \sum_{j \neq n} \vec{f}_{nj} + \vec{F}_n^{\text{внешн}}. \end{array} \right. \quad \text{"+"}$$

$$\sum_{i=1}^n \frac{d\vec{p}_i}{dt} = \sum_{i \neq j} (\vec{f}_{ij} + \vec{f}_{ji}) + \sum_{i=1}^n \vec{F}_i^{\text{внешн.}}$$

$$\vec{f}_{ij} = -\vec{f}_{ji}$$

Сумма справа:

$$\sum_{i=1}^n \vec{F}_i^{\text{внешн.}}$$

Сумма слева:

$$\sum_{i=1}^n \frac{d\vec{p}_i}{dt} = \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^n \vec{p}_i = \frac{d\vec{P}}{dt}$$

Итог:

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i^{\text{внешн.}}$$

Как и для М.Т.!



Закон сохранения импульса:

♣ **Если** сумма всех внешних сил, действующих на тела системы равна нулю, то импульс системы не меняется с течением времени (т.е. сохраняется)

Если $\sum_{i=1}^n \vec{F}_i^{\text{внешн.}} = 0$, то $\vec{P}^{\text{"до"}} = \vec{P}^{\text{"после"}}$.

• **Замечания:**

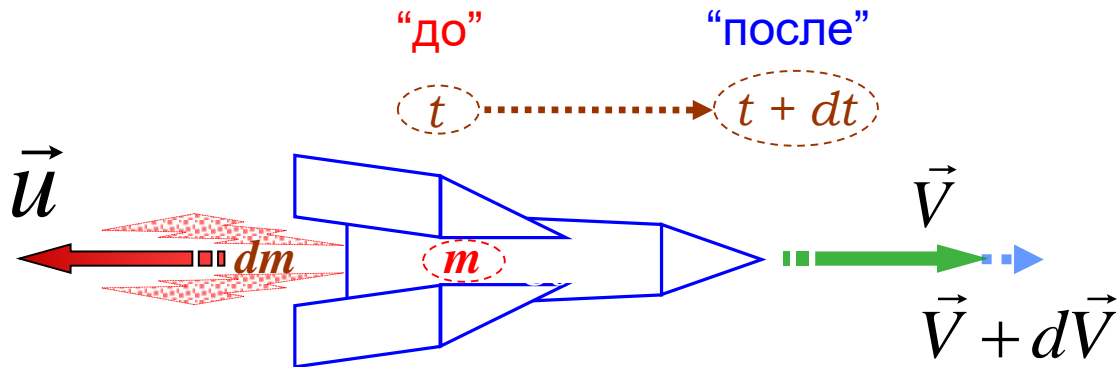
1) “замкнутые”/ “изолированные” ... ?

2) ИСО !!

3) Если $\sum_{i=1}^n (\vec{F}_i^{\text{внешн.}})_x = 0$, то $(\vec{P})_x^{\text{“до”}} = (\vec{P})_x^{\text{“после”}}$; пример

4) $\vec{f}_{ij}^{\text{внутр.}}$ - любые !

5.2. Реактивное движение. Уравнение Мещерского



$$m \frac{d\vec{V}}{dt} = -\mu \cdot \vec{u}$$

\vec{u} – скорость выброса продуктов сгорания топлива

$$\frac{dm}{dt} \equiv \mu \quad \dots ? \quad (\text{темп расхода топлива})$$

$$\vec{F}_{\text{реакт}} = -\mu \cdot \vec{u} \quad \text{“реактивная сила”}$$

5.3. Закон сохранения момента импульса

$$\frac{d\vec{M}}{dt} = \sum_{i=1}^n \vec{N}_i^{\text{внешн.}} \quad (\text{“уравнение моментов”})$$



♣ Если сумма моментов всех внешних сил, действующих на тела системы равна нулю, то момент импульса системы не меняется с течением времени (т.е. сохраняется)

$$\text{Если } \sum_{i=1}^n \vec{N}_i^{\text{внешн.}} = 0, \text{ то } \vec{M} = \text{const}$$

Аналогично и для проекций :





$$\sum_{i=1}^n (\vec{N}_i^{\text{внешн.}})_z = 0$$

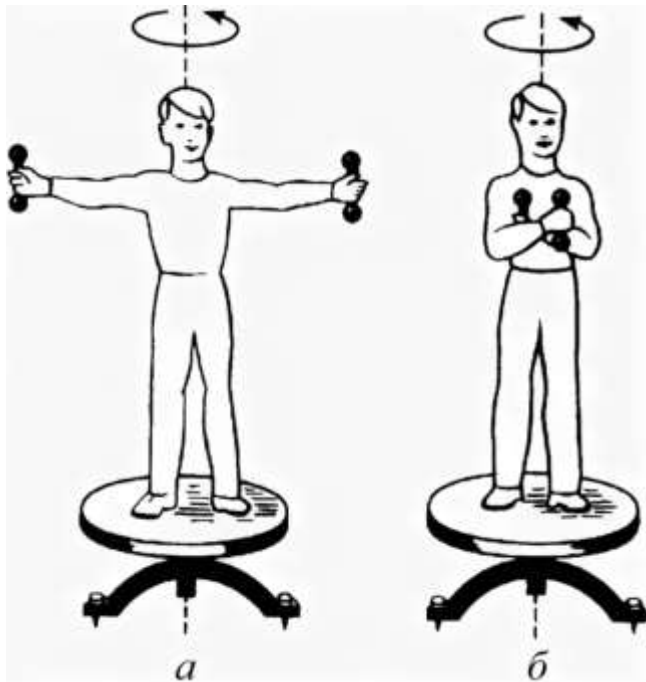


$$(\vec{M})_z^{\text{"до"}} = (\vec{M})_z^{\text{"после"}}$$

Пример 5.1. *“Скамья Жуковского”*
(демонстрация)

Пример 5.2. *“Маятник Пешехонова”*
(демонстрация)

$$(I_z \omega)^{\text{"до"}} = (I_z \omega)^{\text{"после"}}$$



**Сохранение момента
импульса –
Скамья Жуковского**



... “скачок” во времени ... ☺

5.3 5.11. Закон сохранения механической энергии

♣ **Если** равна нулю суммарная работа внешних сил, действующих на тела системы, а также равна нулю и работа внутренних неконсервативных сил, то полная механическая энергия системы не меняется с течением времени (т.е. сохраняется)

$$\text{Если: } \begin{cases} A_{\text{внешн.}} = 0; \\ A_{\text{внутр.}}^{(\text{нк})} = 0, \end{cases} \quad \text{то: } \Delta \mathcal{E} = 0.$$

*)

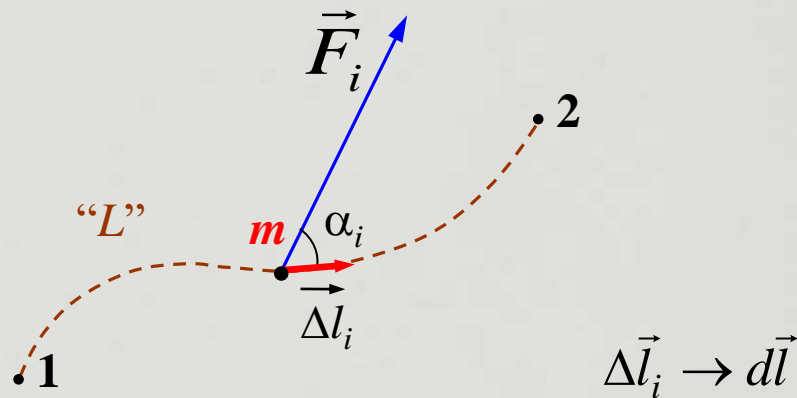
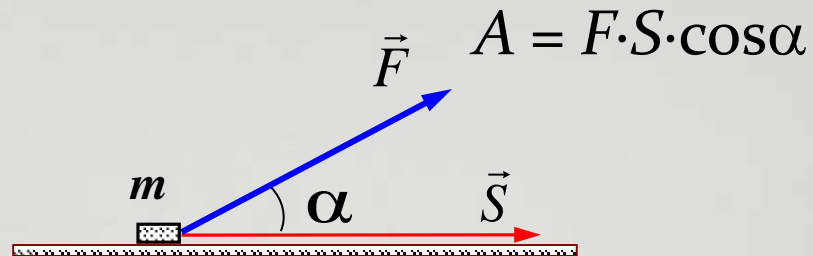
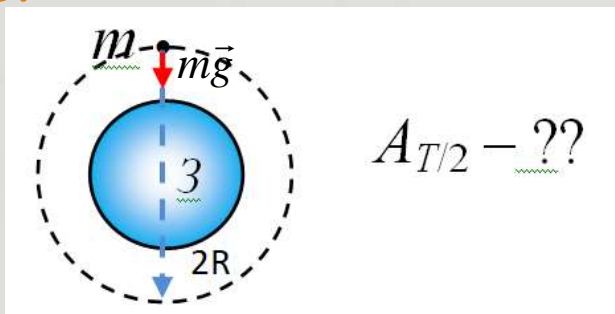
$$\Delta(T + U) = A^{(\text{нк})}$$

$$\Delta \mathcal{E} = A^{(\text{нк})}$$

... вернулись ...

5.4. Работа силы “Опр.” ???

Пример:



$$A_{12} = \sum_i \Delta A_i = \sum_i (F_i \cdot \Delta l_i \cdot \cos \alpha_i)$$

► “Опр.” Элементарной работой δA называется произведение проекции силы на направление малого перемещения $d\vec{l}$ точки приложения силы на модуль этого перемещения:

$\Delta A_i \rightarrow \delta A$

$$\delta A = (\vec{F}, d\vec{l}) \begin{cases} \rightarrow \delta A = F_l \cdot dl \\ \rightarrow \delta A = F \cdot dl \cdot \cos \alpha \end{cases}$$

► “Опр.” Работа на конечном участке траектории вычисляется как сумма элементарных работ:

$$A_{12} = \int_{"L"} F_l dl$$



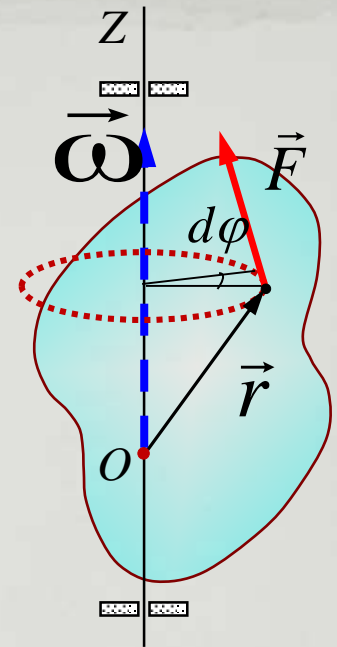
• **Замечания:**

1) Система отсчёта !

2) При вращении твёрдого тела:

$$\delta A = (\vec{F}, d\vec{l}) = (\vec{F}, \vec{V}dt) = (\vec{F}, [\vec{\omega}, \vec{r}])dt$$

$$\delta A = (\vec{F}, [\vec{\omega}, \vec{r}])dt = ([\vec{r}, \vec{F}], \vec{\omega})dt = (\vec{N}, \vec{\omega})dt = N_{\omega} \cdot \omega dt = N_z \cdot d\varphi$$



$$A = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} N_z d\varphi$$

3) **Мощность силы**

► (**Опр.**) Мощность силы равна отношению работы δA , совершаемой за малый интервал времени dt к величине этого интервала:

$$\delta A = F dl \cos \alpha$$

$$v = \frac{dl}{dt}$$

$$W_{\tau} = F \cdot v \cdot \cos \alpha$$

или

$$W_{\tau} = (\vec{F}, \vec{V})$$

$$W = \frac{\delta A}{dt}$$

5.5. Механическая энергия

?? Энергия

Примеры:

Из “недавнего” (☺):

Слияние чёрных дыр

При этом: 3 массы Солнца ($3M_{\odot} \cdot c^2 = 10^{47}$ Дж) “потерялись”

-----> в излучение гравитационных волн (см. следующий слайд)

- 1) от Солнца за год $\sim 10^{30}$ Дж;
- 2) на Землю $\sim 10^{25}$ Дж;
- 3) землетрясение $\sim 10^{21}$ Дж;
- 4) Химическая связь $\sim 10^{-18}$ Дж;
- 5) Ядерная связь $\sim 10^{-11}$ Дж.

► (Опр.) Механическая энергия – физическая величина, измеряемая запасённой работой, которую способна совершить система тел



За счёт движения тел
системы

Кинетическая

T



За счёт взаимодействия тел
системы

Потенциальная

U

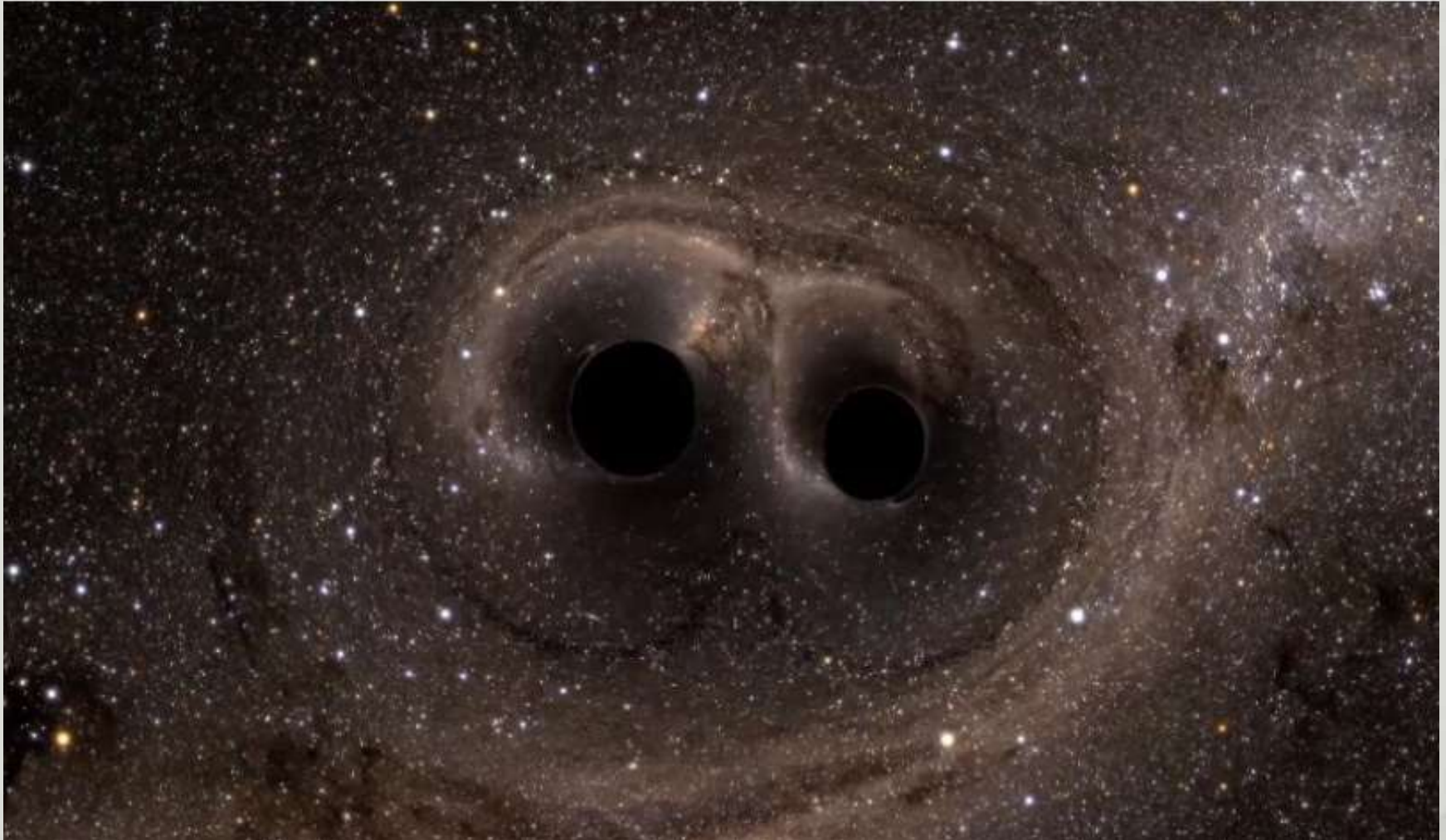
**Полная механическая
энергия**

$$T + U = \mathcal{E} \quad (W)$$

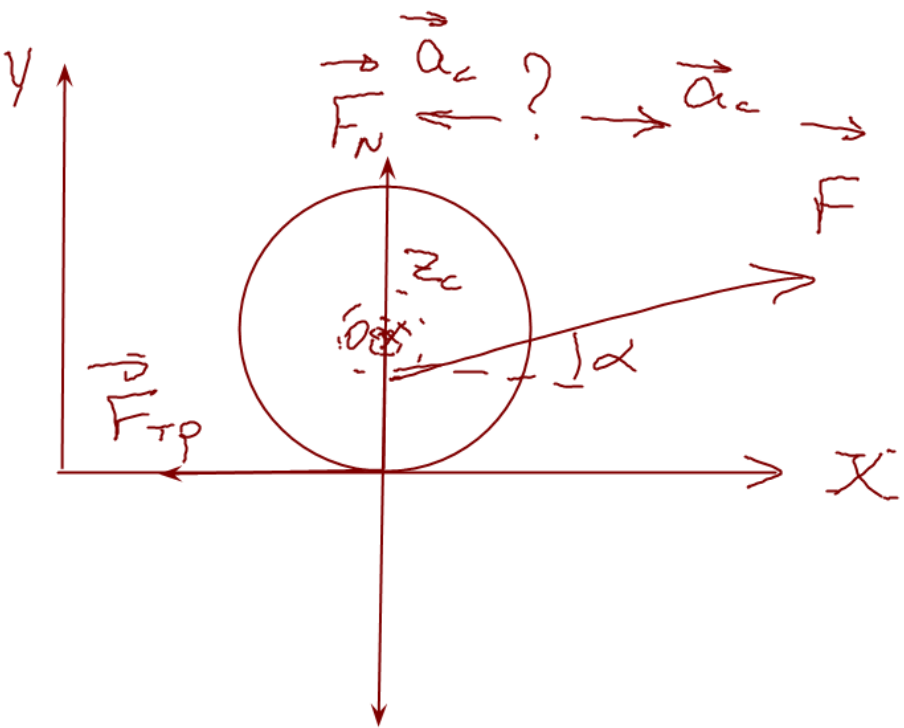
**“Гравитационный коллапс” за миллиард световых лет от Земли – слияние чёрных дыр
(обнаружен 14.09.2015 → “Нобель” 2017 г.)**

“ $29 M_{\odot} + 36 M_{\odot} = 62 M_{\odot}$ ” → $\sim 3 M_{\odot} \Rightarrow$ энергия гравитационных волн

!!



Доска 1



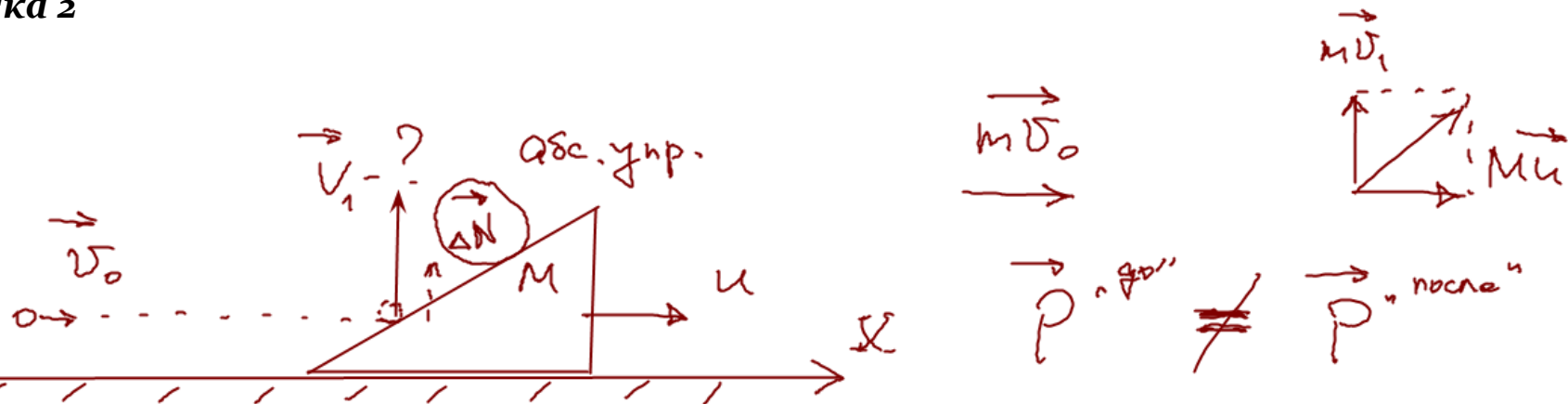
$$\left\{ \begin{aligned} ma_x &= F \cdot \cos \alpha - F_{тр} \\ (0 &= F_N - mg + F \cdot \sin \alpha) \\ I_{zc} \cdot \beta_z &= F_{тр} \cdot R - F \cdot z \\ a_x &= \beta_z \cdot R \end{aligned} \right.$$

$$a_x = \frac{F \left(\cos \alpha - \frac{z}{R} \right)}{m + I_{zc}/R^2} ;$$

$$\cos \alpha > \frac{R/2}{R} \Rightarrow a_x > 0$$

$$\cos \alpha < \frac{R/2}{R} \Rightarrow a_x < 0$$

Доска 2



$$0 = Mg - \underline{N_1}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} m v_0 = M u \\ \frac{m v_0^2}{2} = \frac{m v_1^2}{2} + \frac{M u^2}{2} \end{array} \right. \rightarrow v_1 = ?$$

Доска 3 (реактивная сила)

$$\vec{p}^{\text{"до"}} = \vec{p}^{\text{"после"}}; \quad \underline{\underline{dm > 0}}$$

ИСО: $m\vec{v} = (m-dm) \cdot (\vec{v} + d\vec{v}) + dm \cdot (\vec{v} + \vec{u})$

$$\cancel{m\vec{v}} = \cancel{m\vec{v}} + m d\vec{v} - \cancel{dm \cdot \vec{v}} - \underbrace{dm \cdot d\vec{v}}_{\rightarrow 0} + \cancel{dm \cdot \vec{v}} + dm \cdot \vec{u}$$

$$m d\vec{v} = - dm \cdot \vec{u} \quad \Bigg| : dt$$

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = - \underbrace{\left(\frac{dm}{dt} \right)}_{\mu} \cdot \vec{u}$$

$$\mu = \frac{dm}{dt};$$

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = - \mu \cdot \vec{u}$$

реакт. сила