Лекция 6. Сохранение энергии

5.9. Потенциальная энергия

"Запас работы" за счёт взаимодействия тел системы

Только для консервативных сил **!!!**

$$U = f(x,y,z); \quad (x,y,z) \equiv \{x_1, y_1, z_1, \ldots, x_i, y_i, z_i, \ldots, x_n, y_n, z_n\}$$

"конфигурация"

$$U(x,y,z): \qquad A_{12}^{(к)} = U_1 - U_2 = -\Delta U$$

$$A_{12}^{(сист.)} > 0, \quad если \quad U \quad \text{убывает}!$$

Зам.: 1) Скаляр, 2) >/< 0 .

А как узнать $U(x,y,z)$: **?**

«Демо “Резинка”»

Работа в результате изменения “конфигурации” системы

??

$U \equiv f\,(x,y,z);$

$$(x,y,z) = \underbrace{(x_1,y_1,z_1,\ \ldots,\ x_i,y_i,z_i,\ \ldots,\ x_n,y_n,z_n\}}_{\text{“конфигурация”}}$$

5.10. Связь силы и потенциальной энергии. Прямая и обратная задачи

а) $\vec{F}^{(\kappa)}(x,y,z) \Rightarrow U(x,y,z);$

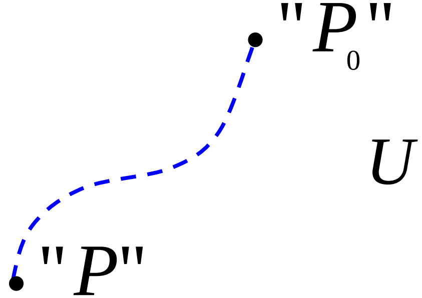
б) $U(x,y,z); \Rightarrow \vec{F}^{(\kappa)}(x,y,z)$

5.10.1. Прямая задача: *известна* $\vec{F}^{(\kappa)}(x,y,z)$,

как узнать $U = f(x,y,z)$ **?**

"Процедура":

1) «Нормировка» - договор: $U(''P_0'') = 0$ *"конфигурация"*



2) Как искать:

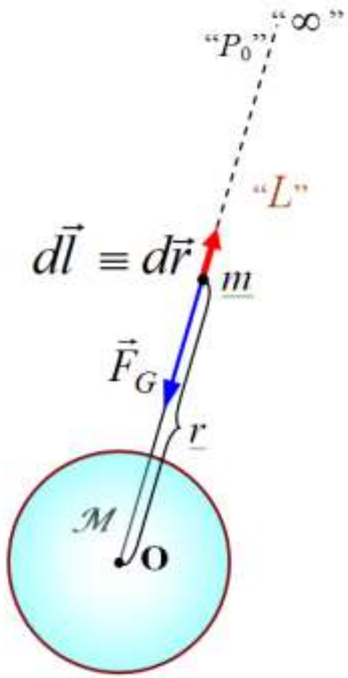
$$U(''P'') = A^{(сист.)}_{P\to P_0}; \Rightarrow \int\limits_{''P''}^{''P_0''} (\vec{F}^{(\kappa)}, d\vec{l})$$

по любой траектории!

Примеры

1. *Гравитационное взаимодействие*

$$U(r) = A_{r\to\infty} = \int_r^\infty F_r dr = -GMm\int_r^\infty \frac{dr}{r^2} = -GMm\left(-\frac{1}{r}\right)\Bigg|_r^\infty = -G\frac{Mm}{r}$$



$$\boxed{U_G(r) = -G\frac{Mm}{r}}$$

$U < 0$!?

притяжение !

2. *Электростатическое взаимодействие («кулоновские» силы)*

$$U_э(r) = \int_r^\infty F_r dr = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot q_1 q_2 \cdot \int_r^\infty \frac{dr}{r^2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot q_1 q_2\cdot\left(-\frac{1}{r}\right)\Bigg|_r^\infty = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{q_1 q_2}{r}$$

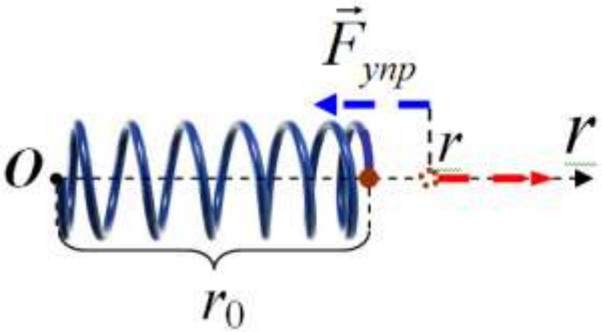
$$\boxed{U_э(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{q_1 q_2}{r}}$$

$U \gtreqless 0$!?

отталкивание и притяжение

2. Упругие силы

$$U_{\text{упр}}(r) = \int\limits_{r}^{r_0} F_r dr = -k \cdot \int\limits_{r}^{r_0} (r - r_0) dr = -k \cdot \left.\frac{(r - r_0)^2}{2}\right|_{r}^{r_0} = \frac{k(r - r_0)^2}{2}$$



$$\boxed{\left\{ U_{\text{упр}}(x) = \frac{kx^2}{2} \right\}}$$

Знакомый результат? ☺

5.10.2. Обратная задача: известна $U = U(x, y, z)$

$$\begin{cases} dA^{(\kappa)} = -dU\,; & \text{(из определения потенциальной энергии)} \\ dA^{(\kappa)} = (\vec{F}, d\vec{l}\,) & \text{(определение элементарной работы)} \end{cases}$$

$$(\vec{F}, d\vec{l}\,) = -dU \quad \textit{или} \quad F_x dx + F_y dy + F_z dz = -\left(\frac{\partial U}{\partial x} dx + \frac{\partial U}{\partial y} dy + \frac{\partial U}{\partial z} dz \right)$$

или

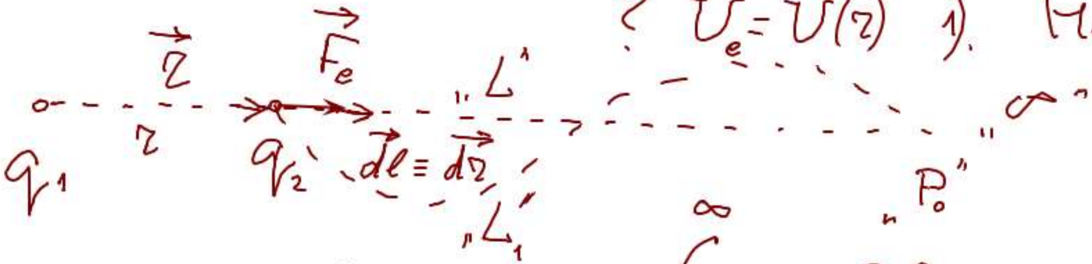
$$\vec{F} = -\left(\frac{\partial U}{\partial x} \vec{e}_x + \frac{\partial U}{\partial y} \vec{e}_y + \frac{\partial U}{\partial z} \vec{e}_z \right)$$

$$\vec{F} = -\, grad(U)$$

“Градиент”

Доска 1

? $U_e = U(r)$ 1). Нормировка: $\underline{\underline{U(\text{"}\infty\text{"}) = 0}}$



$$U_e(r) = A_{r \to \text{"}\infty\text{"}} = \int_r^{\infty} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{q_1 q_2}{r^2}\, dr = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} q_1 q_2 \left(-\frac{1}{r}\right)\Bigg|_r^{\infty} = \underline{\underline{\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{q_1 q_2}{r};}}$$

$$\boxed{U_e(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{q_1 q_2}{r}} \gtrless 0 \sim \frac{1}{r}.$$

Доска 2

$$y = f(x); \quad y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} \equiv \frac{df}{dx} \equiv \frac{dy}{dx}$$

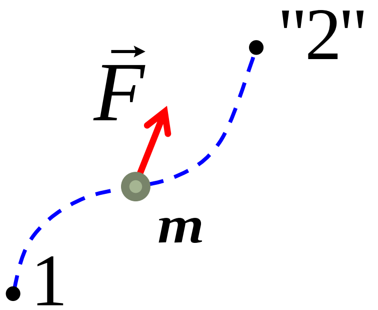
$$U = U(x, y, z): \quad \frac{\partial U}{\partial x} \equiv \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ y = y_0 \\ z = z_0}} \frac{\Delta U}{\Delta x}$$

$$\left[\begin{array}{l} F_x = -\dfrac{\partial U}{\partial x}; \\ \ldots \end{array}\right] \longrightarrow \boxed{\vec F = -\operatorname{grad} U}$$

$$\operatorname{grad} U \equiv \left\{\frac{\partial U}{\partial x}; \frac{\partial U}{\partial y}; \frac{\partial U}{\partial z}\right\}$$

5.11. Закон сохранения механической энергии

5.11.1. Одна частица (МТ)



$$\Delta T = \underline{\underline{A_{12}^{(\kappa)}}} + A_{12}^{(нк)}$$

?

$$\Delta T = -\Delta U + A_{12}^{(нк)} \quad \Rightarrow \quad \Delta(T+U) = A_{12}^{(нк)}$$

$$\Delta\mathcal{E} = A_{12}^{(нк)}$$

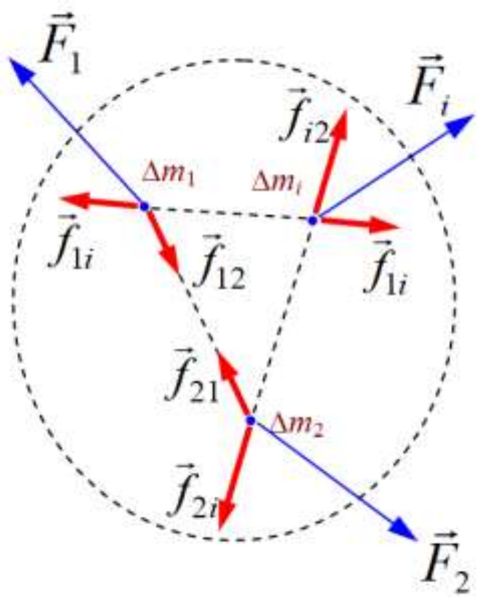
♣ ***Если*** *работа неконсервативных сил, действующих на частицу, равна нулю, то её полная механическая энергия сохраняется*

5.11.2. Система материальных точек

А. *(«подготовительная» формулировка) Если внешних сил, действующих на тела системы, нет, а также нет и внутренних неконсервативных сил, то полная механическая энергия системы не меняется с течением времени (т.е. сохраняется)*

Б. *(«рабочая» формулировка)* ♣ ***Если*** *равна нулю работа внешних сил **), действующих на тела системы, а также равна нулю и работа внутренних неконсервативных сил, то полная механическая энергия системы не меняется с течением времени (т.е. сохраняется)*

Если: $\begin{cases} A_{внешн.} = 0; \\ A^{(нк)}_{внутр.} = 0, \end{cases}$ **то:** $\Delta\mathcal{E} = 0.$



$$\begin{cases} \Delta T_1 = \underline{\underline{A_1^{(к)}}} + A_1^{(нк)}; \\ \ldots \\ \Delta T_i = \underline{\underline{A_i^{(к)}}} + A_i^{(нк)}; \\ \ldots \\ \Delta T_n = \underline{\underline{A_n^{(к)}}} + A_n^{(нк)}. \end{cases}$$

Сложим

$$\sum_{i=1}^{n} A_i^{(к)} = -\Delta U^{(системы)}$$

$$\Delta T^{сист.} + \Delta U^{сист.} = \sum_{i=1}^{n} A_i^{(нк)} \quad \Rightarrow \quad \Delta \mathcal{E} = A_{любых!}^{(нк)}$$

Если: $A_{любых}^{(нк)} = 0,$ **то:** $\mathcal{E} = const.$

♣*В.* ***Если*** *равна нулю* ***работа неконсервативных сил*** *[*)], действующих на тела системы, то полная механическая энергия системы сохраняется*

(«расширенная» формулировка – “для экзамена” ☺)

***Замечания к формулировкам*:**

1) *[*)] сил, не учтённых в потенциальной энергии системы – неконсервативными могут оказаться гравитационные, упругие и “кулоновские“ силы, если они внешние!*

2) *[**)] «замкнутая» (?) система в формулировке «Б» – ??*

Замечания к §5

1) Обзор ***<u>основных</u>*** *законов классической механики*

2) Законы сохранения были представлены нами, как “теоремы” классической механики, мы опирались на законы Ньютона. НО …

Это самостоятельные фундаментальные законы физики!!

3) Имеют “интегральный характер” – …

§ 6. Пример применения основных законов механики – гироскоп

6.1. Основные понятия

(**Опр.**) ***Гироскопом называется осесимметричное твердое тело, быстро вращающееся вокруг оси, которая может поворачиваться в пространстве***

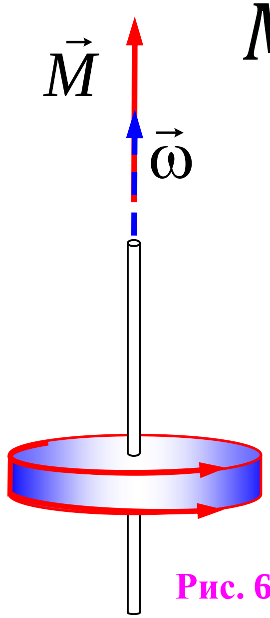


Рис. 6.1

$$\vec{M} = I \cdot \vec{\omega}$$

$$\frac{d\vec{M}}{dt} = \vec{N}$$

- ***Гироскопические эффекты*** :

1) Свободный гироскоп ; $(\vec{N} = 0 \Rightarrow \vec{M} = const)$

2) Нутация $\vec{N} \cdot \Delta t \approx 0 \Rightarrow \Delta\vec{M} \approx 0$

3) Регулярная прецессия $\vec{N} = const$

(“гироскопический маятник”)

Регулярная прецессия

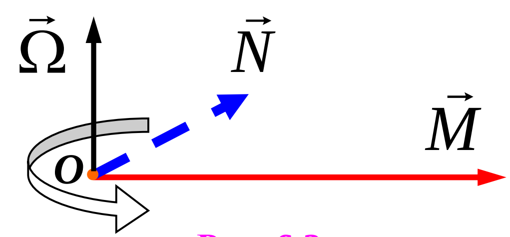


Рис. 6.3

Регулярная прецессия

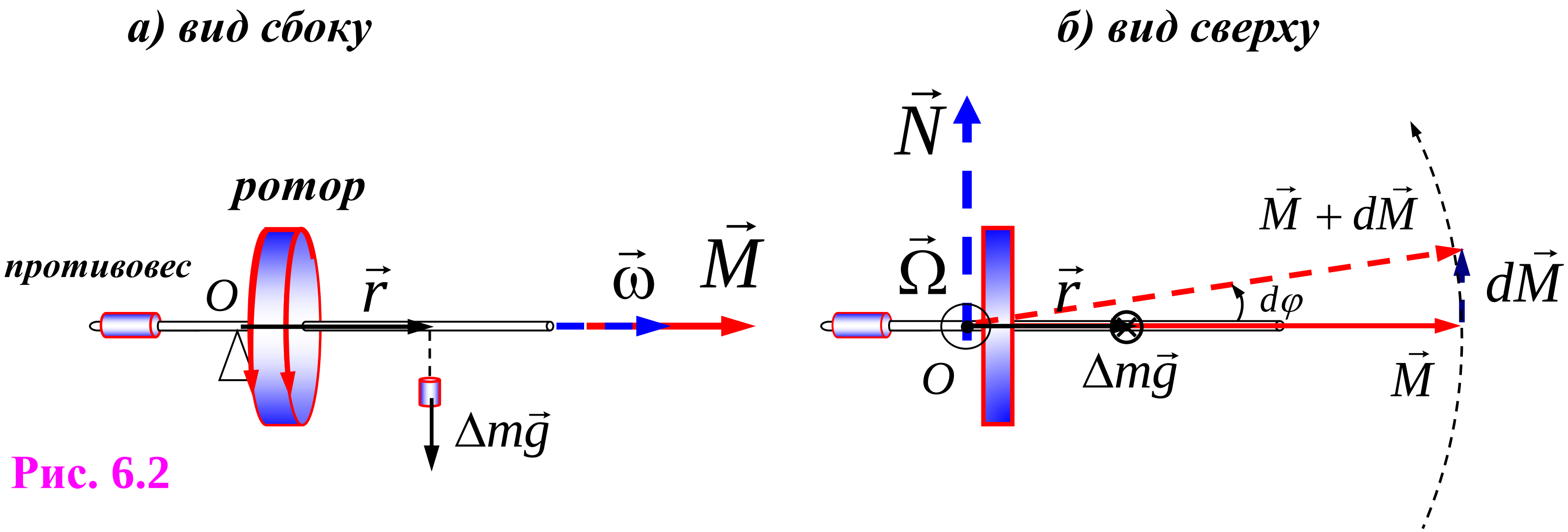


Рис. 6.2

$$d\vec{M} = \vec{N} \cdot dt$$

$$d\varphi = \frac{dM}{M}$$

$$\Omega = \frac{d\varphi}{dt} = \frac{dM}{M \cdot dt}$$

$$\Omega = \frac{N}{I_z \cdot \omega}$$

$$\vec{N} = [\vec{\Omega}, \vec{M}]$$

«Пусть никто не думает, что великое создание Ньютона может быть ниспровергнуто теорией относительности или какой-нибудь другой теорией.

Ясные и широкие идеи Ньютона навечно сохранят своё значение фундамента, на котором построены наши современные физические представления»

А. Эйнштейн (1948 г.)