Лекция 6. Сохранение энергии. Электростатика

5.5. Механическая энергия

?? Энергия

Примеры:

1) от Солнца за год $\sim 10^{30}$ *Дж*;
2) на Землю $\sim 10^{25}$ *Дж*;
3) землетрясение $\sim 10^{21}$ *Дж*;
4) Химическая связь $\sim 10^{-18}$ *Дж*;
5) Ядерная связь $\sim 10^{-11}$ *Дж*.

Из "недавнего" (☺):

Слияние чёрных дыр

При этом: 3 массы Солнца ($3M_C \cdot c^2 = 10^{47}$ *Дж*) "потерялись"

→ в ***излучение гравитационных волн (см. следующий слайд)***

(Опр.) *Механическая энергия – физическая величина, измеряемая запасённой работой, которую способна совершить система тел*

За счёт движения тел системы

Кинетическая

T

За счёт взаимодействия тел системы

Потенциальная

U

Полная механическая энергия

$$T + U = \mathcal{E} \qquad (W)$$

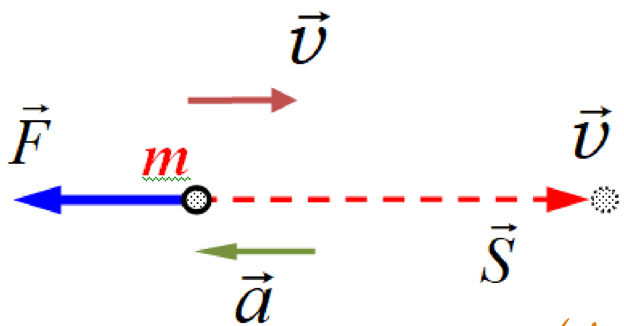
5.6. Кинетическая энергия. Теорема о кинетической энергии

5.6.1. Кинетическая энергия

а) Одна частица (МТ) (**Опр.**)

$$\boxed{T = \frac{m\upsilon^2}{2}}$$

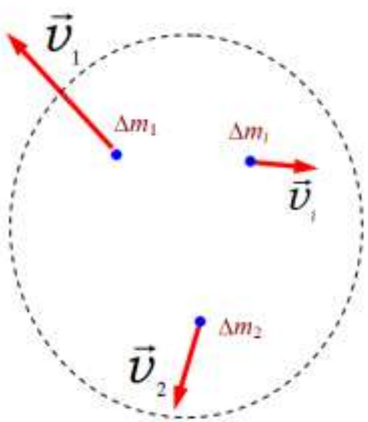
$\frac{1}{2}$ **… ???**



$$A_F = -\frac{m\upsilon^2}{2}$$

($A = -A_F$ – «запас работы»)

б) Система частиц (или ТТ):



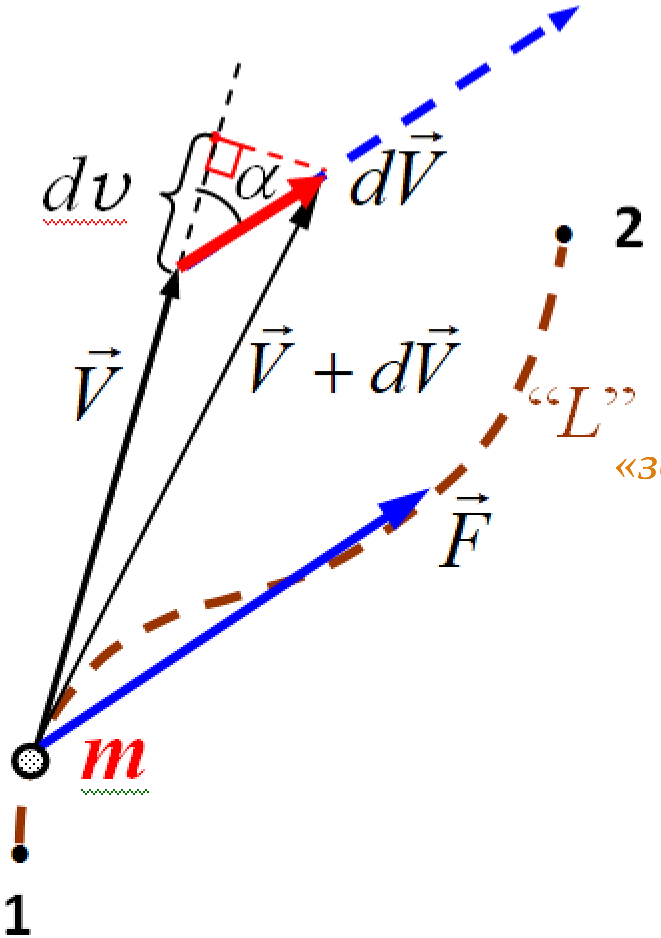
(**Опр.**)

$$\boxed{T = \sum_{i=1}^{n} \frac{\Delta m_i \upsilon_i^2}{2}}$$

- Замечания:

1) *Система отсчёта !* ;
2) *скаляр*, > 0;
3) *аддитивна.*

5.6.2. Теорема о кинетической энергии



«запас работы»

$$A_{12} = ?$$

$$\delta A = (\vec{F}, d\vec{l}\,) = \left(m\frac{d\vec{V}}{dt}, \vec{V}dt\right) =$$

$$= m(d\vec{V}, \vec{V}) = m \cdot \underbrace{|\vec{V}|}_{\upsilon} \cdot \underbrace{|d\vec{V}| \cdot \cos\alpha}_{d\upsilon} =$$

$$m\upsilon \cdot d\upsilon = d\left(\frac{m\upsilon^2}{2}\right) \equiv dT\ ;$$

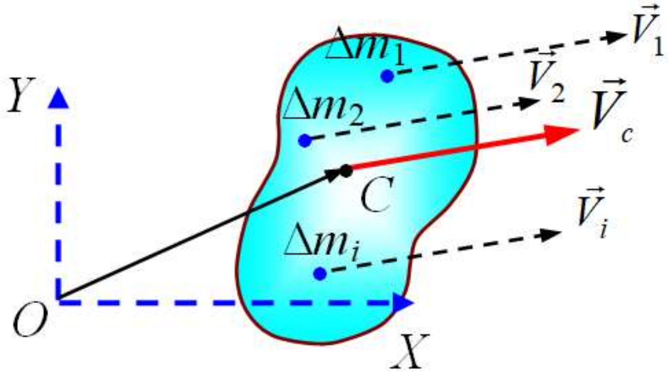
$$A_{12} = \int\limits_{\substack{(1)\\ "L"}}^{(2)} dT = T_2 - T_1$$

Теорема о кинетической энергии : $T_2 - T_1 = A_{12}$

Пример:

5.7. Кинетическая энергия при движении твёрдого тела

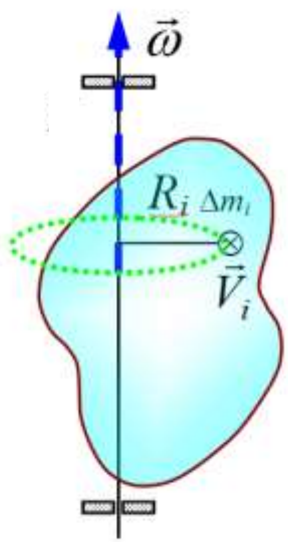
а)Поступательное движение



$$T_{пост} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\Delta m_i \upsilon_i^2}{2} = \frac{\upsilon_c^2}{2} \cdot \sum_{i=1}^{n} \Delta m_i \Rightarrow$$

$$T_{пост} = \frac{m\upsilon_c^2}{2}$$

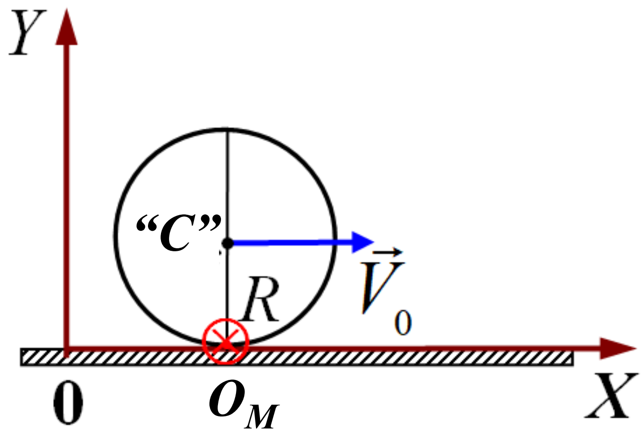
б) Вращательное движение



$$T_{вращ} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\Delta m_i \upsilon_i^2}{2} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\Delta m_i (\omega R_i)^2}{2} = \frac{\omega^2}{2} \sum_{i=1}^{n} \Delta m_i R_i^2 \Rightarrow$$

$$T_{вращ} = \frac{I\omega^2}{2}$$

в)Плоское движение



$$T = \frac{I_{O_M}\omega^2}{2}; \qquad I_{O_M} = I_c + mR^2$$

$$T_{плоск} = \frac{(I_c + mR^2)\omega^2}{2} = \frac{I_c\omega^2}{2} + \frac{m(R\omega)^2}{2} \Rightarrow$$

$$T_{плоск} = \frac{m\upsilon_c^2}{2} + \frac{I_c\omega^2}{2}$$

5.8. Консервативные и неконсервативные силы

(**Опр.**) *Силы, работа которых не зависит от формы траектории, а определяется лишь начальным и конечным положением тела, называются консервативными*

Примеры: гравитационные (тяжести), упругие, "кулоновские", ...

НО ... ! *)

*) **Всегда ли ? ...**

***Зам*. Можно показать, что** $A^{(к)}_{\circlearrowleft} = 0$

Примеры: гравитационные (тяжести), упругие, “кулоновские”, ...

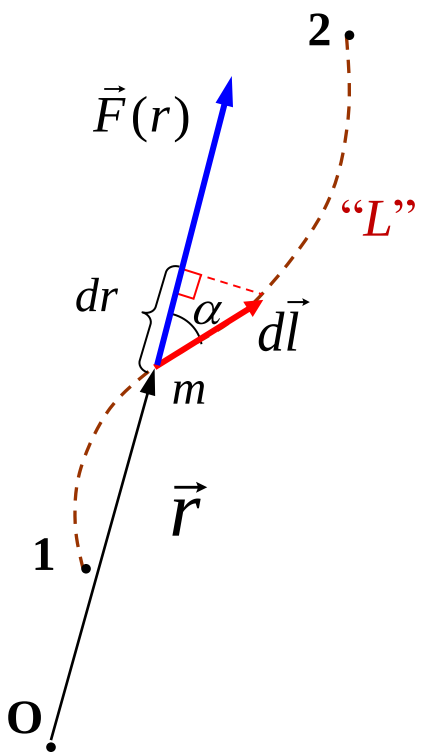
А неконсервативные? **? ...**

... трения; реактивная сила; сила, действующая на заряженную частицу со стороны вихревого электрического поля, ...

$$A^{(нк)}_{\circlearrowleft} \neq 0$$

“Шкаф” ☺

Теорема о консервативности центральных сил



“Центральная сила” – ?

$$\vec e_r = \frac{\vec r}{r}$$

$$\vec F(\vec r) = F_r(r)\cdot \vec e_r$$

(гравитационные, упругие, “кулоновские”)

$$A_{12} = \int\limits_{\substack{(1)\\ "L"}}^{(2)} (\vec F, d\vec l\,) = \int\limits_{\substack{(1)\\ "L"}}^{(2)} \left|\vec F\right|\cdot \underbrace{\left|d\vec l\,\right|\cdot\cos\alpha}_{dr} = \int\limits_{r_1}^{r_2} f(r)dr$$

Неподвижный “силовой центр”!

$$A_{12} = \int\limits_{r_1}^{r_2} f(r)dr = \Phi(r)\Big|_{r_1}^{r_2} = \Phi(r_2) - \Phi(r_1)$$

Консервативна !

5.9. Потенциальная энергия

"Запас работы" за счёт взаимодействия тел системы

Только для консервативных сил !!!

$$U = f(x, y, z); \quad (x, y, z) \equiv \{x_1, y_1, z_1, \ldots, x_i, y_i, z_i, \ldots, x_n, y_n, z_n\}$$

"конфигурация"

$$U(x, y, z): \qquad A_{12}^{(\kappa)} = U_1 - U_2 = -\Delta U$$

$$A_{12}^{(сист.)} > 0, \quad если \quad U \quad \text{убывает!}$$

<u>Зам</u>.: 1) Скаляр, 2) >/< 0 .

А как узнать $U(x, y, z):$ **?**

«Демо “Резинка”»

Работа в результате изменения “конфигурации” системы **??**

$$U \equiv f\,(x,y,z);$$

$$(x,y,z) = (x_1,y_1,z_1,\ \ldots,\ x_i,y_i,z_i,\ \ldots,\ x_n,y_n,z_n\}$$

“конфигурация”

5.10. Связь силы и потенциальной энергии. Прямая и обратная задачи

а) $\vec{F}^{(\kappa)}(x,y,z) \Rightarrow U(x,y,z);$

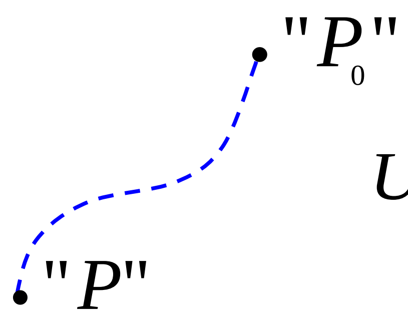
б) $U(x,y,z); \Rightarrow \vec{F}^{(\kappa)}(x,y,z)$

5.10.1. *Прямая задача:* ***известна*** $\vec{F}^{(\kappa)}(x,y,z)$,

как узнать $U = f(x,y,z)$ **?**

“Процедура”:

1) «Нормировка» - договор: $U(''P_0'') = 0$ ***“конфигурация”***



2) Как искать:

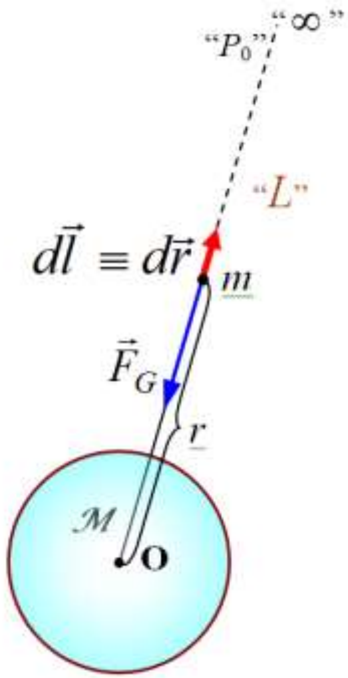
$$U(''P'') = A^{(сист.)}_{P \to P_0}; \Rightarrow \int\limits_{''P''}^{''P_0''} (\vec{F}^{(\kappa)}, d\vec{l})$$

по любой траектории!

Примеры

1. *Гравитационное взаимодействие*

$$U(r) = A_{r\to\infty} = \int_r^{\infty} F_r dr = -GMm\int_r^{\infty}\frac{dr}{r^2} = -GMm\left(-\frac{1}{r}\right)\Bigg|_r^{\infty} = -G\frac{Mm}{r}$$



$$\boxed{U_G(r) = -G\frac{Mm}{r}}$$

$U < o$!?

притяжение !

2. *Электростатическое взаимодействие («кулоновские» силы)*

$$U_э(r) = \int_r^{\infty} F_r dr = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot q_1 q_2 \cdot \int_r^{\infty}\frac{dr}{r^2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot q_1 q_2 \cdot \left(-\frac{1}{r}\right)\Bigg|_r^{\infty} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{q_1 q_2}{r}$$

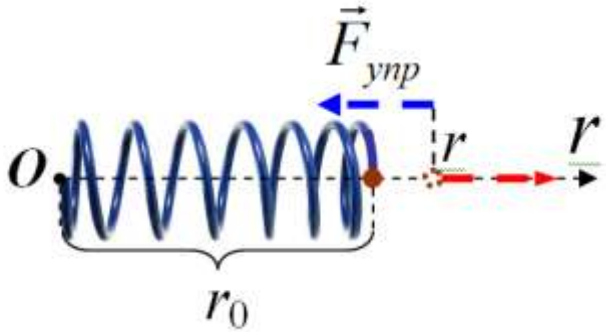
$$\boxed{U_э(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{q_1 q_2}{r}}$$

$U \gtreqless o$!?

отталкивание и притяжение

2. Упругие силы

$$U_{\text{упр}}(r)=\int_r^{r_0}F_r dr=-k\cdot\int_r^{r_0}(r-r_0)dr=-k\cdot\left.\frac{(r-r_0)^2}{2}\right|_r^{r_0}=\frac{k(r-r_0)^2}{2}$$



$$\left\{\quad U_{\text{упр}}(x)=\frac{kx^2}{2}\quad\right\}$$

Знакомый результат? ☺

5.10.2. Обратная задача: известна $U=U(x,y,z)$

$$\begin{cases} dA^{(\kappa)}=-dU\,; & \text{(из определения потенциальной энергии)} \\ dA^{(\kappa)}=(\vec{F},d\vec{l}\,) & \text{(определение элементарной работы)} \end{cases}$$

$(\vec{F},d\vec{l}\,)=-dU$ **или** $F_x dx+F_y dy+F_z dz=-\left(\frac{\partial U}{\partial x}dx+\frac{\partial U}{\partial y}dy+\frac{\partial U}{\partial z}dz\right)$

или

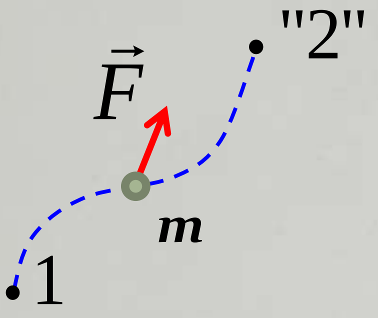
$$\vec{F}=-\left(\frac{\partial U}{\partial x}\vec{e}_x+\frac{\partial U}{\partial y}\vec{e}_y+\frac{\partial U}{\partial z}\vec{e}_z\right)$$

$$\vec{F}=-\,grad(U)$$

“Градиент”

5.11. Закон сохранения механической энергии

5.11.1. Одна частица (МТ)



$$\Delta T = \underline{\underline{A_{12}^{(к)}}} + A_{12}^{(нк)}$$

?

$$\Delta T = -\Delta U + A_{12}^{(нк)} \quad \Rightarrow \quad \Delta(T + U) = A_{12}^{(нк)}$$

$$\Delta \mathcal{E} = A_{12}^{(нк)}$$

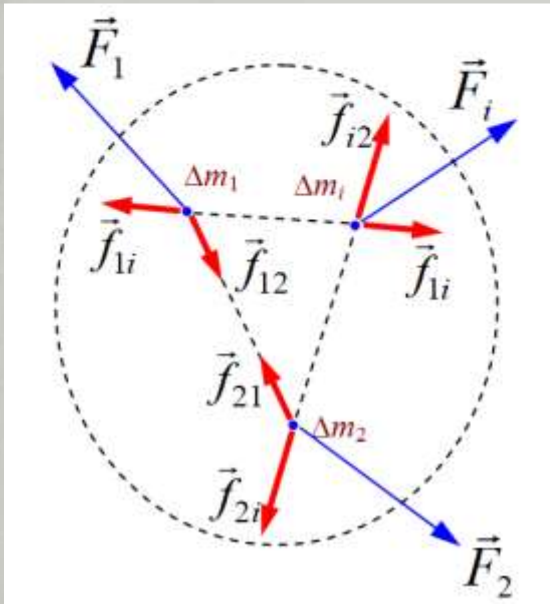
♣ ***Если*** *работа неконсервативных сил, действующих на частицу, равна нулю, то её полная механическая энергия сохраняется*

5.11.2. Система материальных точек

А. *(«подготовительная» формулировка) Если внешних сил, действующих на тела системы, нет, а также нет и внутренних неконсервативных сил, то полная механическая энергия системы не меняется с течением времени (т.е. сохраняется)*

Б. *(«рабочая» формулировка)* ♣ ***Если*** *равна нулю работа внешних сил **), действующих на тела системы, а также равна нулю и работа внутренних неконсервативных сил, то полная механическая энергия системы не меняется с течением времени (т.е. сохраняется)*

$$\textbf{Если:}\quad \begin{cases} A_{внешн.} = 0; \\ A^{(нк)}_{внутр.} = 0, \end{cases} \qquad \textbf{то:}\quad \Delta\mathcal{E} = 0.$$



$$\begin{cases} \Delta T_1 = \underline{\underline{A_1^{(к)}}} + A_1^{(нк)}; \\ \ldots \\ \Delta T_i = \underline{\underline{A_i^{(к)}}} + A_i^{(нк)}; \\ \ldots \\ \Delta T_n = \underline{\underline{A_n^{(к)}}} + A_n^{(нк)}. \end{cases}$$

Сложим

$$\sum_{i=1}^{n} A_i^{(к)} = -\Delta U^{(системы)}$$

$$\Delta T^{сист.} + \Delta U^{сист.} = \sum_{i=1}^{n} A_i^{(нк)} \quad \Rightarrow \quad \Delta \mathcal{E} = A^{(нк)}_{любых!}$$

Если: $A^{(нк)}_{любых} = 0,$ **то:** $\mathcal{E} = const.$

♣*В.* ***Если*** *равна нулю* ***работа неконсервативных сил*** *), *действующих на тела системы, то полная механическая энергия системы сохраняется*

(«расширенная» формулировка – “для экзамена” ☺)

***Замечания к формулировкам*:**

1) *) *сил, не учтённых в потенциальной энергии системы – неконсервативными могут оказаться гравитационные, упругие и “кулоновские“ силы, если они внешние!*

2) **) *Ещё раз о «замкнутых системах» (см. формулировку «Б» – можно ли заменить … ??)*

Замечания к §5

1) Обзор ***основных*** *законов классической механики*

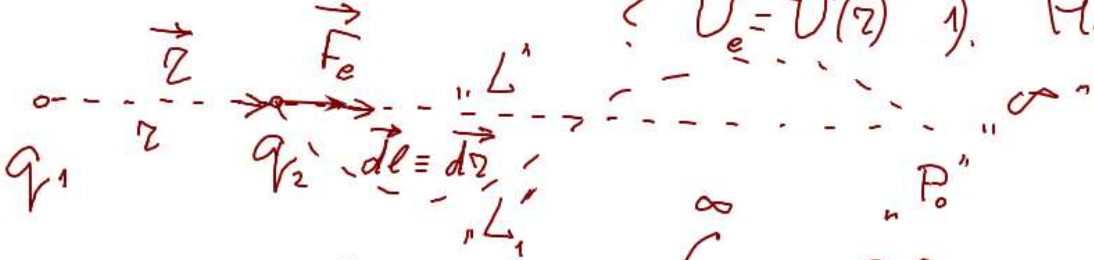
2) Законы сохранения были представлены нами, как “теоремы” классической механики, мы опирались на законы Ньютона. НО …

Это самостоятельные фундаментальные законы физики!!

3) Имеют “интегральный характер” – …

Доска 4

? $U_e = U(r)$ 1). Нормировка: $\underline{\underline{U(\text{"}\infty\text{"}) = 0}}$



$$U_e(r) = A_{r \to \text{"}\infty\text{"}} = \int_r^{\infty} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{q_1 q_2}{r^2}\,dr = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} q_1 q_2 \left(-\frac{1}{r}\right)\Big|_r^{\infty} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{q_1 q_2}{r};$$

$$\boxed{U_e(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{q_1 q_2}{r}} \gtrless 0 \sim \frac{1}{r}.$$

Доска 5

$$y = f(x); \quad y' = \lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta f}{\Delta x} \equiv \frac{df}{dx} = \frac{dy}{dx}$$

$$U = U(x,y,z): \quad \frac{\partial U}{\partial x} \equiv \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ y = y_0 \\ z = z_0}} \frac{\Delta U}{\Delta x}$$

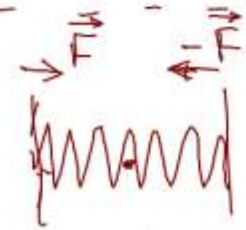
$$\left[\begin{array}{l} F_x = -\dfrac{\partial U}{\partial x}; \\ \dots \end{array}\right] \longrightarrow \boxed{\vec F = -\operatorname{grad} U}$$

$$\operatorname{grad} U \equiv \left\{\frac{\partial U}{\partial x}; \frac{\partial U}{\partial y}; \frac{\partial U}{\partial z}\right\}$$

Доска 1

Сохр. имп.

Если $\sum_i \vec{F}_i^{\,внешн.} = 0$



$\sum_i \vec{F}_i = 0$

$\Delta U = \frac{kx^2}{2} > 0$

Сохр. мех. эн.

а) ;

б) $= 0$

$\mathcal{E} = const$?

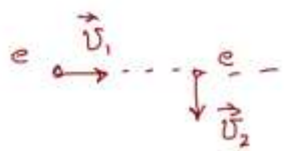
Доска 2

$\vec{a} = \frac{\sum_i \vec{F}_i}{m} \longrightarrow \vec{a}$ + н.у. $(t=0)$ кинематика $\longrightarrow$ „Закон движения"

$\Rightarrow$ Законы для „частных сил" ...

3-ны класс.

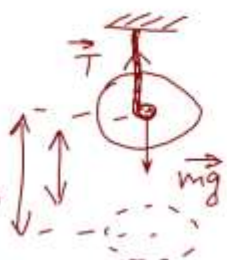
1).



2).

v_c? $\Leftarrow$ $mgh = \frac{mv_c^2}{2} + \frac{I_z\omega^2}{2}$

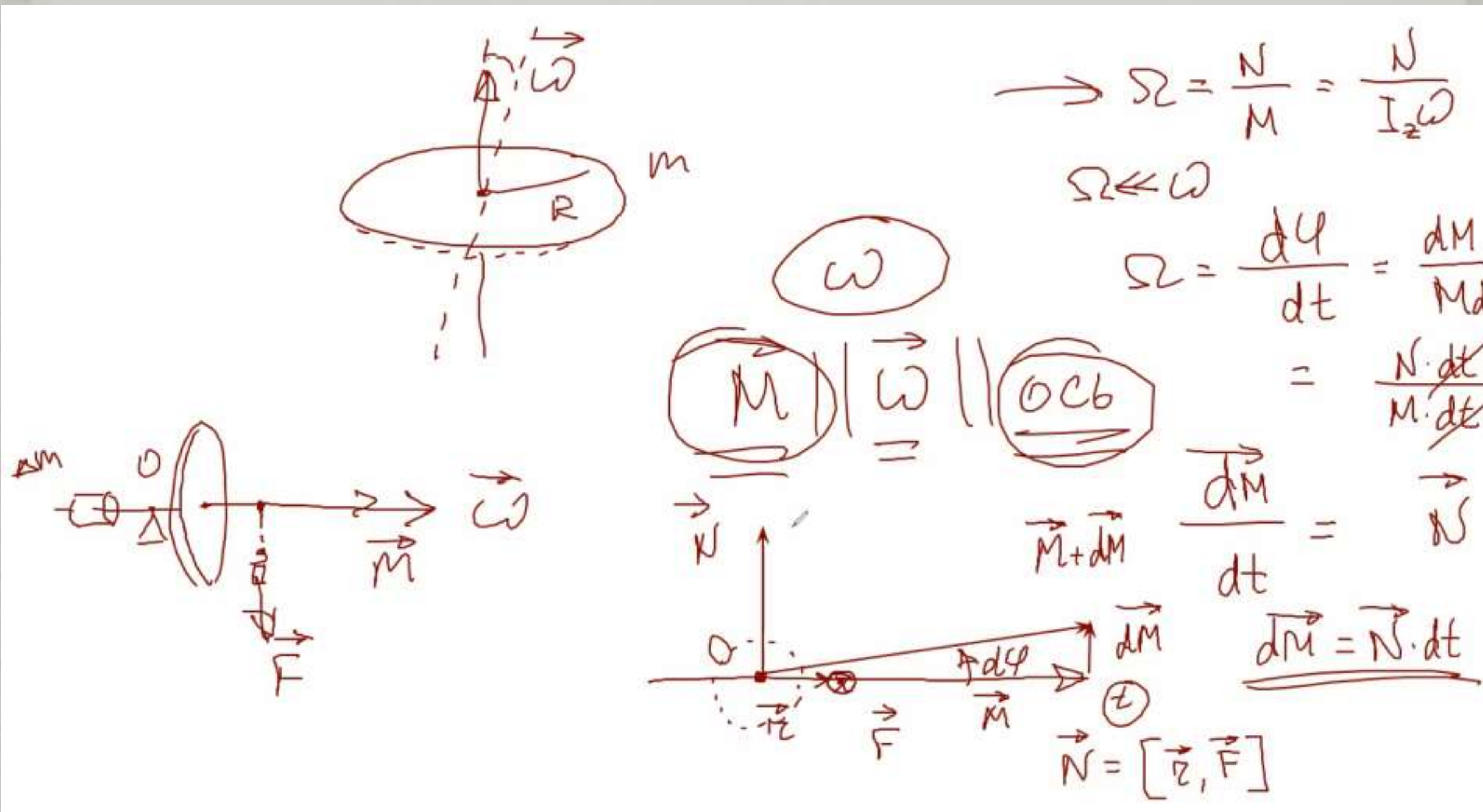
3)



...

$$\begin{cases} ma_c = mg - T \\ I_z\beta = TR \\ a_c = \beta R \\ I_z = \ldots \\ v_c = a_c \cdot \tau; \; h = \frac{a_c\tau^2}{2} \end{cases}$$

Доска 3


$\vec{\omega}$
m
R
$\Omega = \frac{N}{M} = \frac{N}{I_z\omega}$
$\Omega \ll \omega$
$\Omega = \frac{d\varphi}{dt} = \frac{dM}{M\,dt} = \frac{N \cdot \cancel{dt}}{M \cdot \cancel{dt}}$
ω
$\vec{M} \parallel \vec{\omega} \parallel$ ОСЬ
Δm
O
$\vec{\omega}$
$\vec{M}$
$\vec{r}$
$\vec{F}$
$\vec{N}$
$\vec{M} + d\vec{M}$
$\frac{d\vec{M}}{dt} = \vec{N}$
$d\vec{M}$
$d\varphi$
$d\vec{M} = \vec{N} \cdot dt$
t
$\vec{N} = [\vec{r}, \vec{F}]$