Лекция 7. Электрическое поле.
Теорема Гаусса

7.3. Напряжённость поля. Принцип суперпозиции

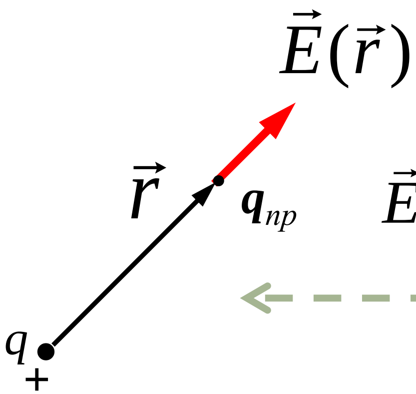
«Электрическое поле» **? ...** $\Rightarrow$ ***Опр.***

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{\vec{F}_e}{q_{пр}}$$

$$\vec{F} = q \cdot \vec{E}(x, y, z)$$

«Поле»!

$$\vec{E} = \vec{E}(x, y, z)$$



$$\vec{E}_{т.з.}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{q}{r^2} \cdot \frac{\vec{r}}{r}$$

А если зарядов много или заряжено тело **? ...**

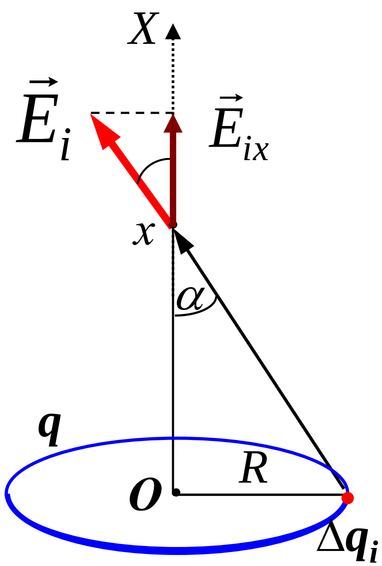
$$\vec{E}(\vec{r}) = \sum_{i=1}^{N} \vec{E}_i$$

Принцип суперпозиции полей
сил и полей (эксперимент !)

А как это реализуют на практике?

7.5. Расчёт напряжённости поля протяжённых заряженных тел – “путь 1”: применение принципа суперпозиции

Пример 1. **(Задача 6.3)** Определить напряжённость электрического поля на оси равномерно заряженного кольца радиуса *R*. Заряд кольца *q*, *x* – расстояние от центра кольца.

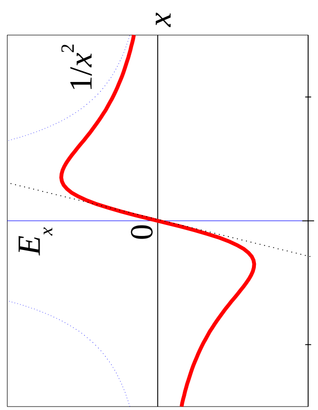


$$\vec{E}_i = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\Delta q_i}{r^2}\cdot\frac{\vec{r}_i}{r} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\Delta q_i}{(R^2+x^2)}\cdot\frac{\vec{r}_i}{r}$$

$$E(x) = \sum_i (E_i\cdot\cos\alpha) = \sum_i\left[\frac{\Delta q_i\cdot x}{4\pi\varepsilon_0(R^2+x^2)^{3/2}}\right] =$$

$$= \frac{x}{4\pi\varepsilon_0(R^2+x^2)^{3/2}}\cdot\sum_i \Delta q_i$$

?



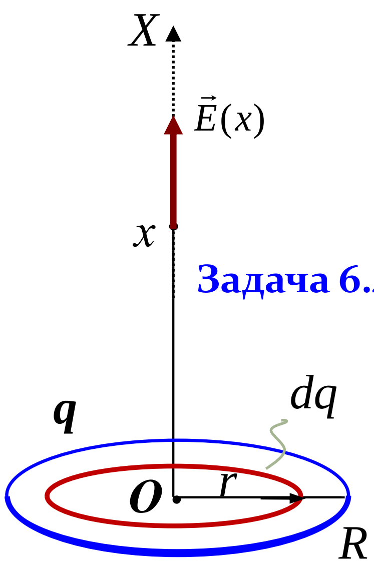
$$\vec{E}(x) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q\cdot x}{(R^2+x^2)^{3/2}}\cdot\vec{e}_x$$

асимптотики ?

а) $x >> R \Rightarrow E \sim 1/x^2$

а) $x << R \Rightarrow E \sim x$

Замечания:



Задача 6.4: Диск

$$dE = \frac{x\,dq}{4\pi\varepsilon_0 (r^2 + x^2)^{3/2}}$$

1) Кольцо Δq_i $\xrightarrow[\dots]{}$ без интегралов

задача 6.4 (диск): $\longrightarrow$ $E(x) = \int\limits_0^R \frac{2\pi r \sigma x}{4\pi\varepsilon_0 \left(r^2 + x^2\right)^{3/2}} dr$

(Опр.)

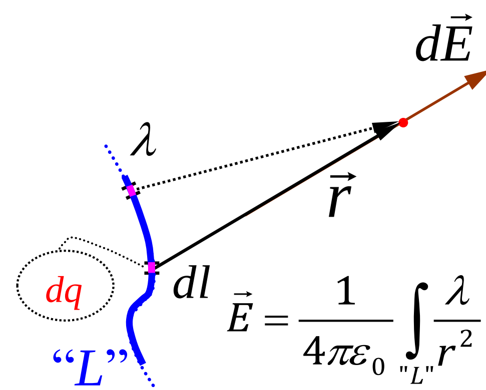
$$\boxed{\sigma = \frac{dq}{dS}}$$

2) Поверхностная плотность заряда

3) Линейная плотность заряда:

(Опр.)

$$\boxed{\lambda = \frac{dq}{dl}}$$



$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int\limits_{"L"} \frac{\lambda}{r^2} \frac{\vec{r}}{r} dl$$

(Опр.)

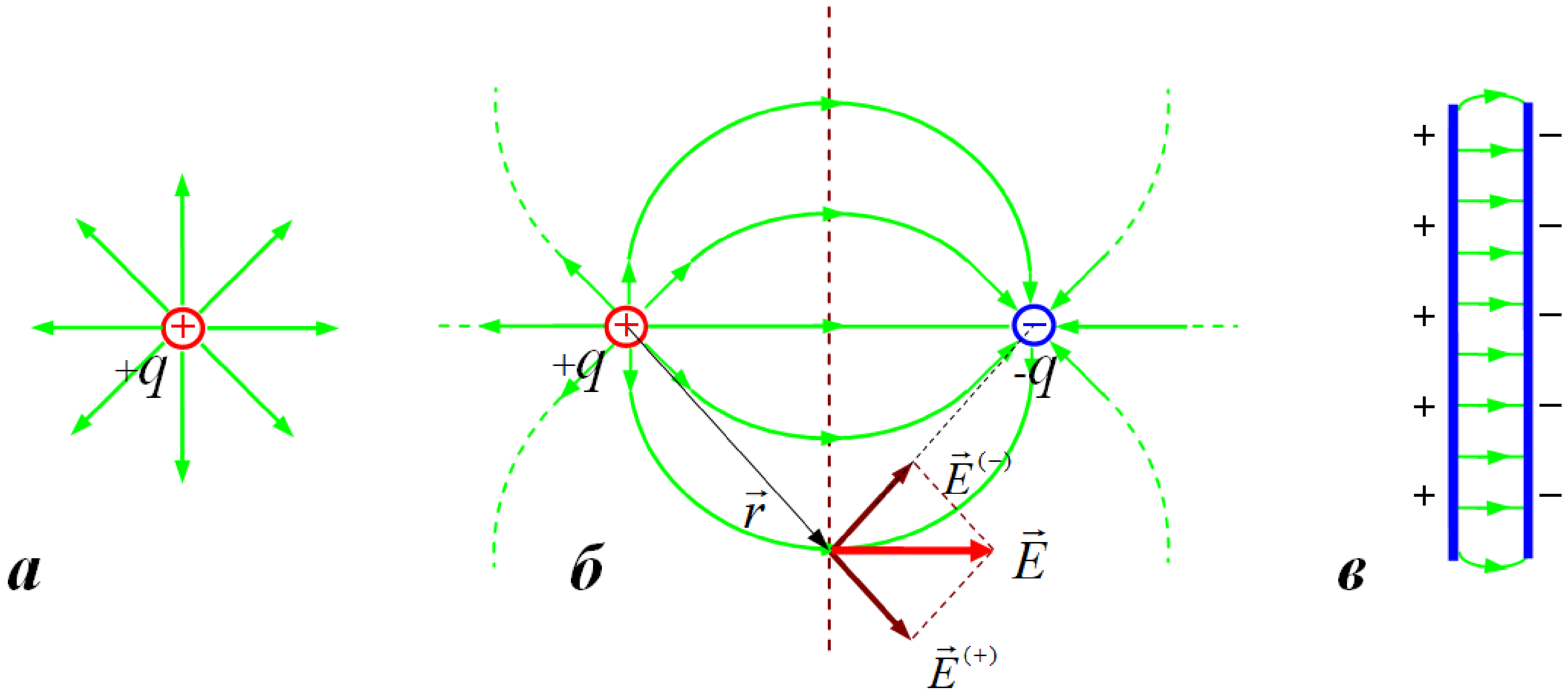
4) Объёмная плотность заряда:

$$\boxed{\rho = \frac{dq}{dV}}$$

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int\limits_{"\Omega"} \frac{\rho}{r^2} \frac{\vec{r}}{r} dV$$

7.4. Линии напряжённости – “силовые линии”

(**Опр.**) *Линии, касательные к которым в каждой точке поля совпадают с направлением вектора напряжённости в данной точке, называются линиями напряжённости электрического поля*

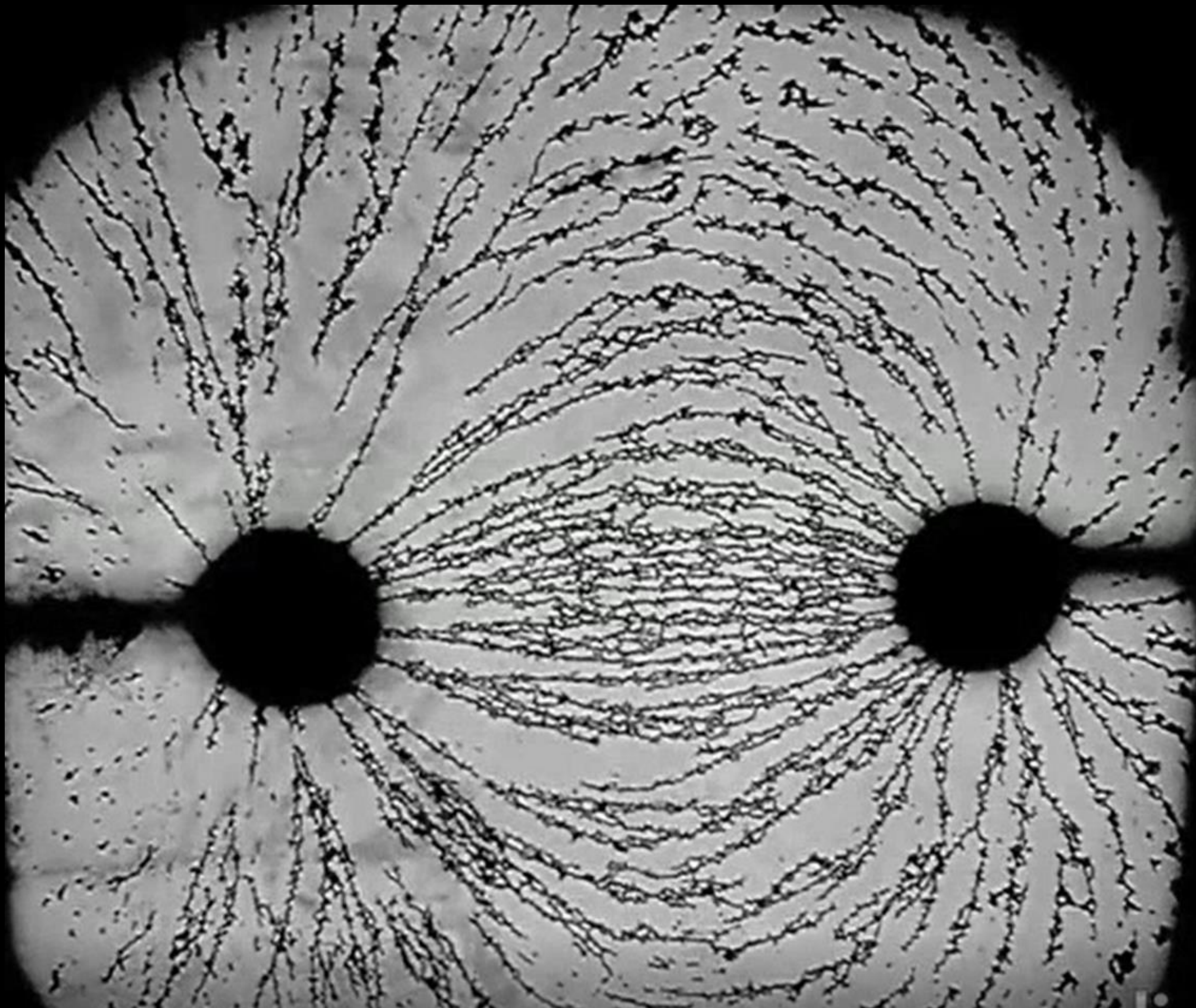


♣ ***Линии:***

1) Незамкнуты; 2) Не пересекаются;

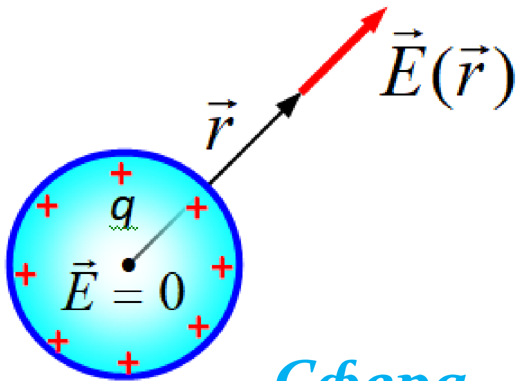
3) Густота пропорциональна Е

Силовые линии



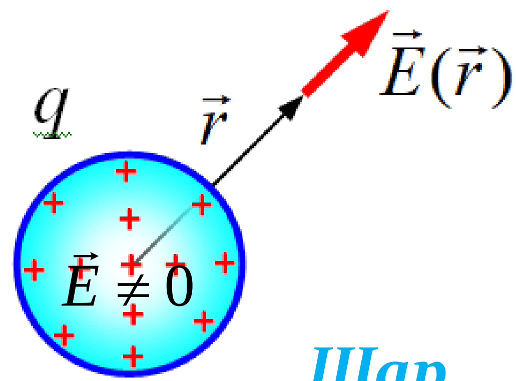
А такие тела?

“Задача Ньютона”



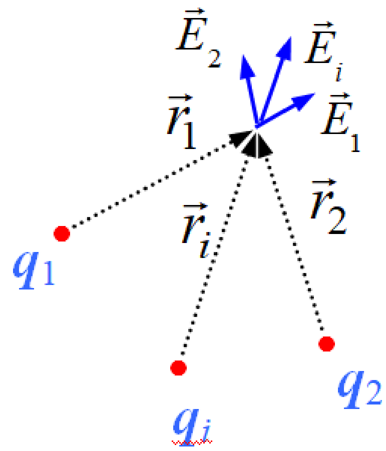
Сфера

или



Шар

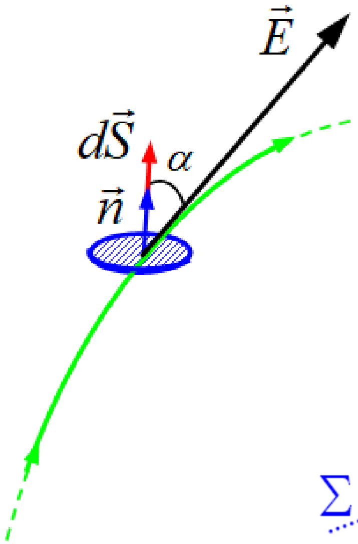
Как искать $\vec{E}(\vec{r})$ *?*



???

Теорема Гаусса

§ 8. Теорема Гаусса. 8.1. Поток вектора напряжённости

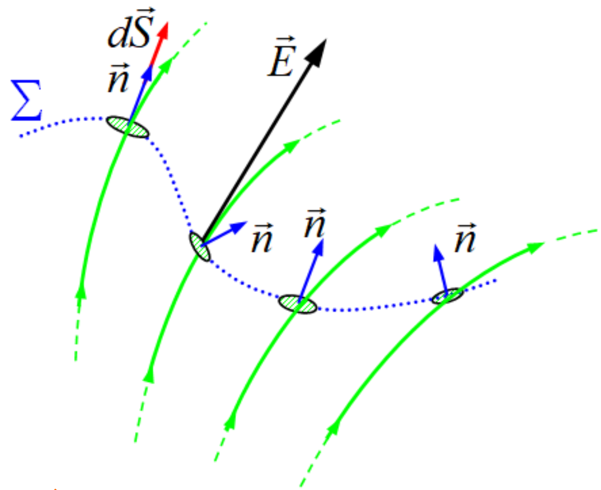


(**Опр.**) *Элементарный поток*: $\boxed{d\Phi = (\vec{E}, d\vec{S})}$

или: $E \cdot dS \cdot \cos\alpha = E_n \cdot dS$

… через “элемент поверхности”

А через всю поверхность ??



Сумма

Σ **:**

(**Опр.**) **Поток вектора напряжённости:** $\boxed{\Phi = \int\limits_{"\Sigma"} (\vec{E}, d\vec{S})}$

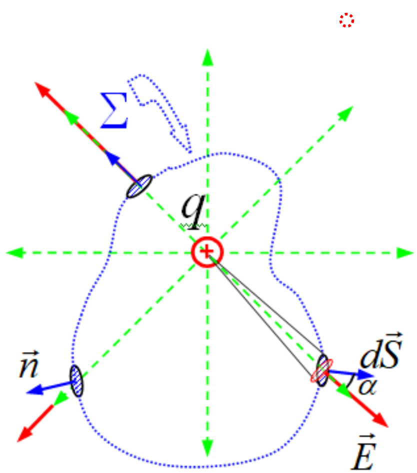
1) Скаляр; 2) имеет знак; 3) выбор «+» нормали;

4) пропорциональна «числу силовых линий» (“+1”/”-1”); 5) $\Phi = \sum_i \Phi_i$

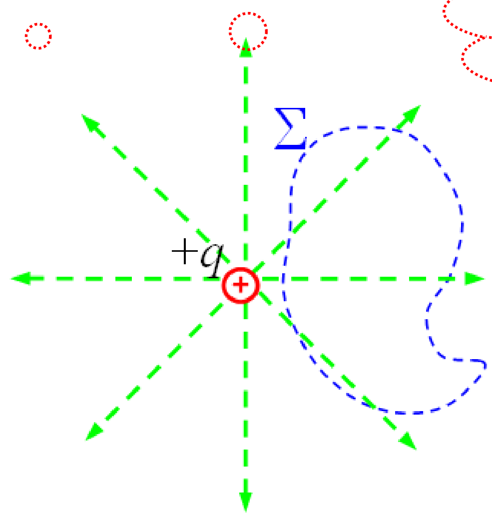
8.2. Теорема Гаусса (формулировка)

♣ *Поток вектора напряжённости электростатического поля в вакууме через любую замкнутую поверхность пропорционален суммарному заряду, расположенному внутри этой поверхности*:

$$\oint\limits_{"\Sigma"} (\vec{E}, d\vec{S}) = \frac{1}{\varepsilon_0}\sum q$$



... "заряды внутри"



... "заряды снаружи"

... заряженные тела ?

? Что вместо $\sum q$

$$\int\limits_{"\Omega^*"} \rho \, dV$$

8.3. Применение теоремы для расчёта напряжённости электрического поля протяжённых заряженных тел

Доска 1

t_0 Δt r

q_1 q_2

эл. „поле"

$F_e = k\dfrac{q_1 q_2}{r^2}$;

„Дука"

$\Delta t \simeq 0{,}3$ с

$\vec{F}_e \sim q_{пр}$

$(O_{пр}.)$

$$\boxed{\vec{E} = \frac{\vec{F}_e}{q_{пр}}}$$

$q_{пр}$ (x, y, z)

$\vec{E} = \vec{E}(x, y, z)$ ← Как найти?

q_j

q_1 (x, y, z)

q_2

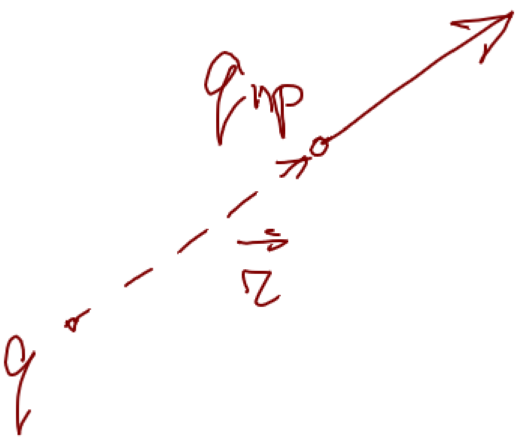
q_i

„Поле"

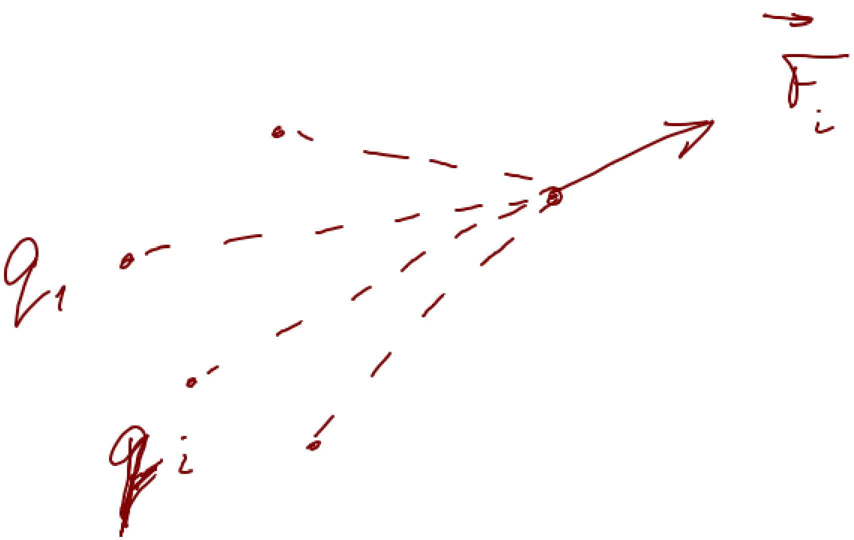
$\vec{v}(x, y, z)$

Доска 2

$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{q\cdot q_{пр}}{r^2}\cdot\frac{\vec{r}}{r}$$



$$\boxed{\vec{E}_{т.з.}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{q}{r^2}\cdot\frac{\vec{r}}{r}}$$

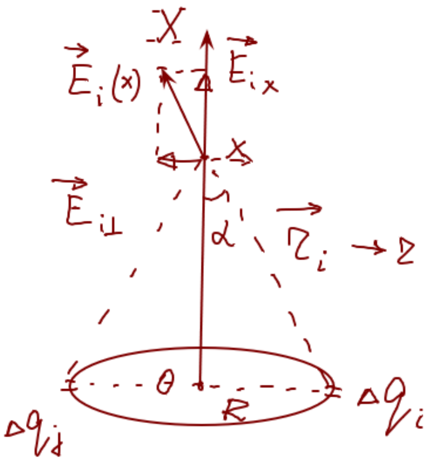


$$\vec{F} = \sum_i \vec{F}_i$$

$$\Downarrow$$

$$\vec{E} = \sum_i \vec{E}_i$$

Доска 3



$$\vec E_i(x) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{\Delta q_i}{(R^2+x^2)}\cdot\frac{\vec r_i}{r}$$

$$\vec E = \sum_i \vec E_i = \underline{\sum_i \vec E_{ix}} + \underbrace{\cancel{\sum_i \vec E_{i\perp}}}_{0} = \left(\sum_i E_i\cdot\cos\alpha\right)\cdot\vec e_x =$$

$$= \sum_i\left\{\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{\Delta q_i}{(R^2+x^2)}\cdot\frac{x}{\sqrt{R^2+x^2}}\right\}\vec e_x = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{x}{(R^2+x^2)^{3/2}}\cdot\overbrace{\sum_i \Delta q_i}^{q}\cdot\vec e_x$$

$$\boxed{\vec E(x) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{q\cdot x}{(R^2+x^2)^{3/2}}\cdot\vec e_x}$$

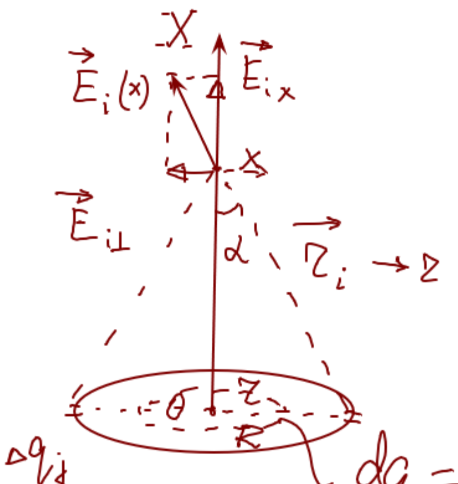
а). $\underline{x \gg R}$

$$E_x(x) \sim \frac{x}{(R^2+x^2)^{3/2}} \quad \left(\sim \frac{1}{x^2}\right)$$

б). $x \ll R$

$$\sim x$$

Доска 4

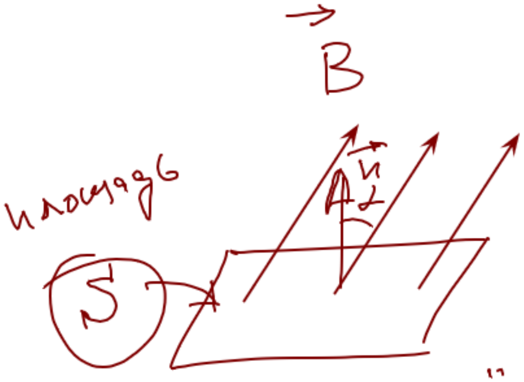


$$E(x) = \int \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{dq}{(r^2+x^2)^{3/2}} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int \frac{\sigma \cdot 2\pi r\, dr}{(r^2+x^2)} = \ldots$$

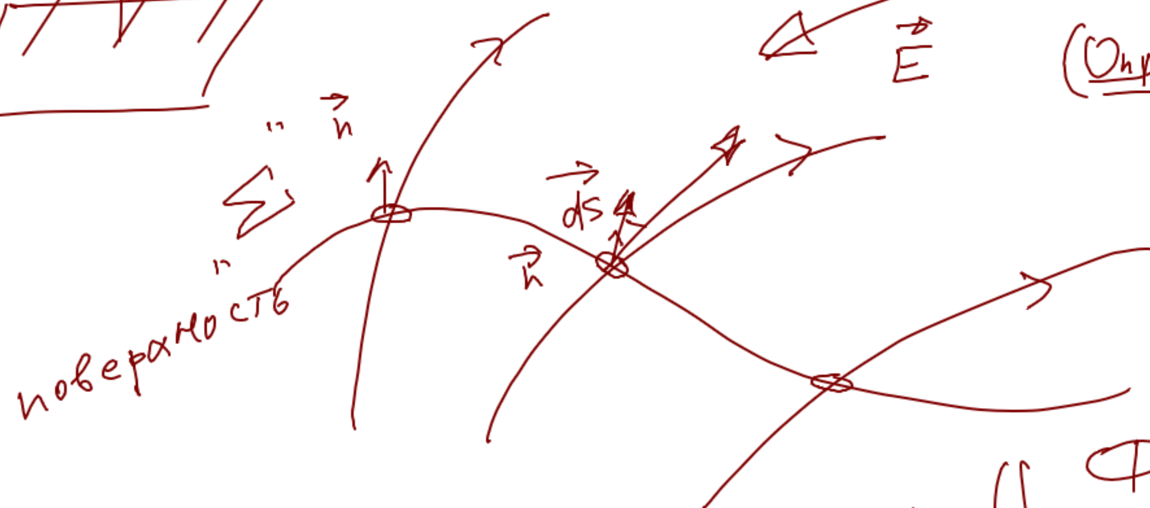
$$dq = \sigma \cdot ds = \sigma \cdot 2\pi r \cdot dr$$

Опр. $\sigma = \dfrac{dq}{ds}$; $\dfrac{\text{Кл}}{\text{м}^2}$

Доска 5



„Опр.“ $\Phi = B \cdot S \cdot \cos\alpha$



(Опр)

$$d\Phi = E \cdot dS \cdot \cos\alpha$$

$$d\Phi = (\vec{E}, \vec{dS})$$

$$d\Phi = E_n \cdot dS$$

$$\Phi = \int_{\text{„}\Sigma\text{“}} (\vec{E}, \vec{dS})$$

1) скалярная

2) $+ / -$;

3) $\Phi = \sum_i \Phi_i$