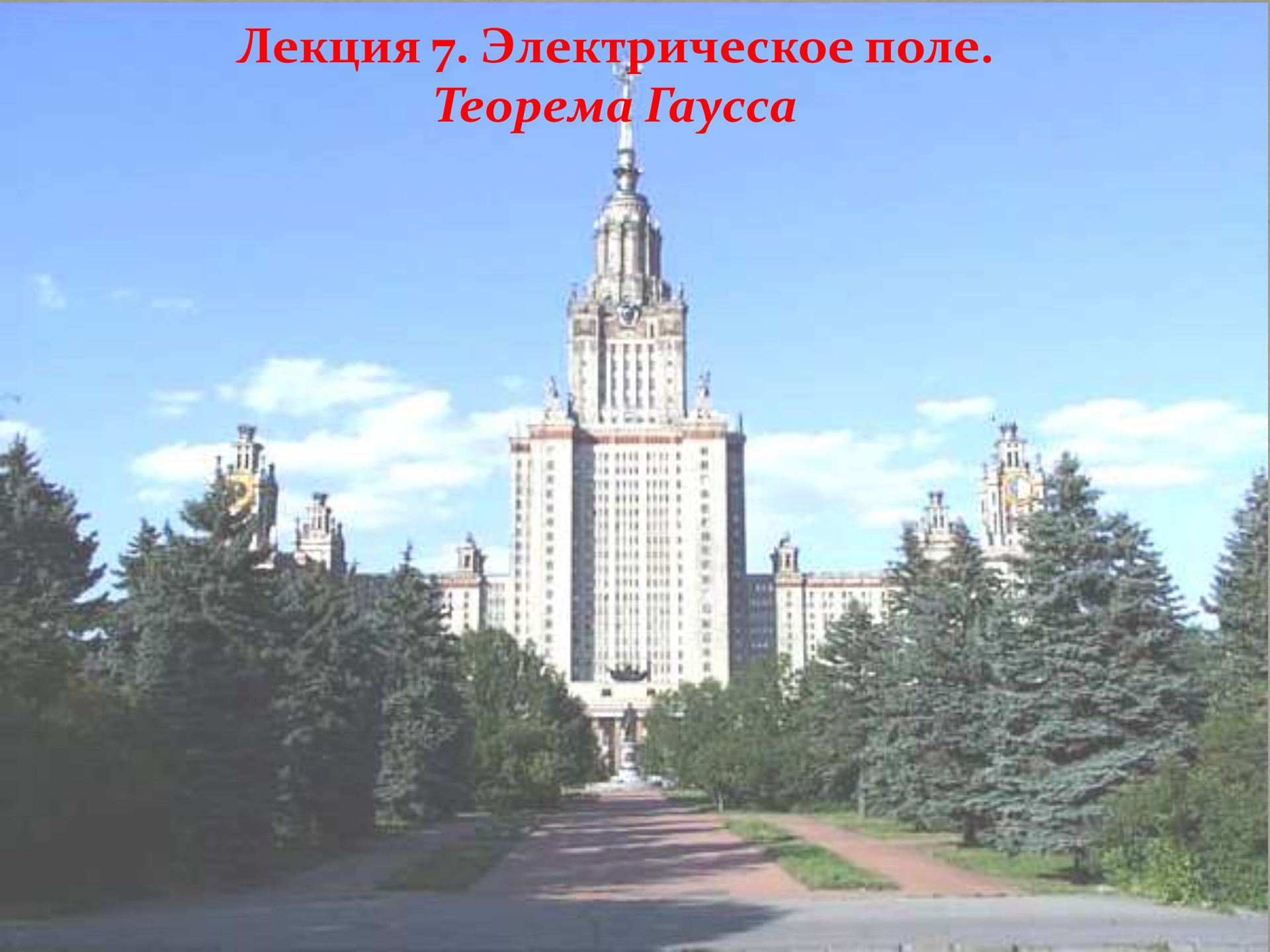


Лекция 7. Электрическое поле. Теорема Гаусса



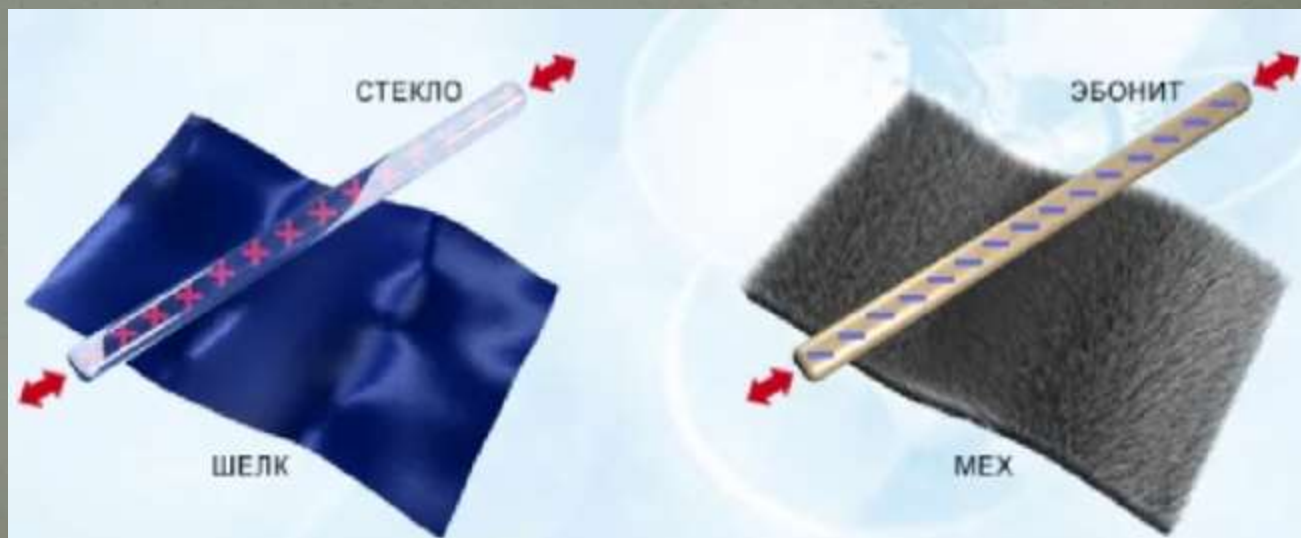
Часть 2. ЭЛЕКТРИЧЕСТВО (и МАГНЕТИЗМ)

Электродинамика – раздел физики, изучающий взаимодействия электрически заряженных тел, свойства электрических и магнитных полей

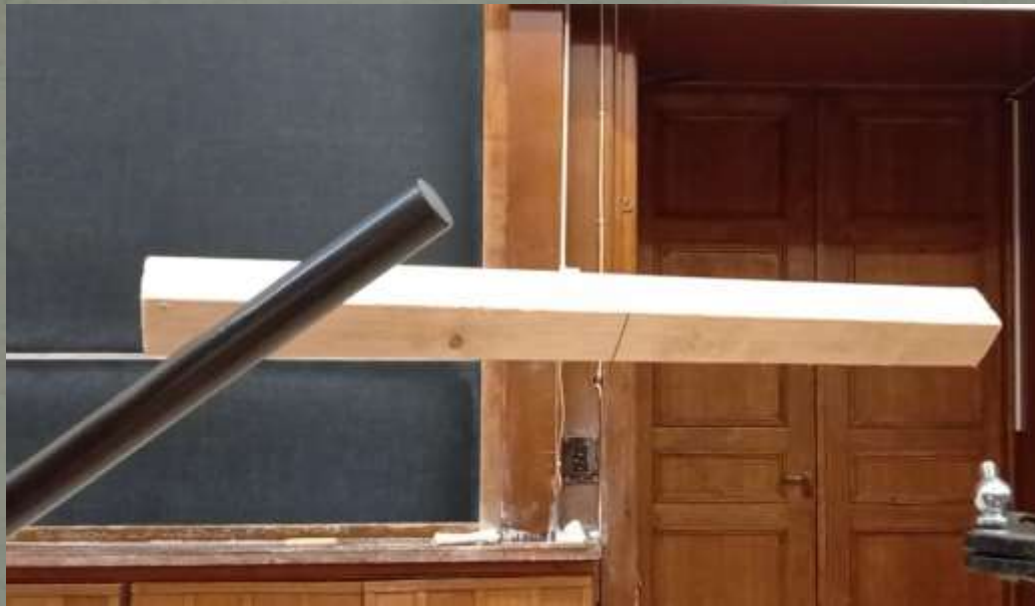
“... Силы трения, сила ветра, химические связи, вязкость, магнетизм, силы, заставляющие вертеться колёса фабрик и заводов, – все эти явления – не что иное, как закон Кулона ...”

Дж.Р. Захариас (в журнале “Science”, 1957 г.)

Электрические взаимодействия ???



Электрические взаимодействия ???



§ 7. Закон Кулона. Электрическое поле

7.1. Электрический заряд ? ...

Ш. Кулон: “электрическая масса”

► “Опр.” - мера способности частиц и тел к электрическим и магнитным взаимодействиям

Свойства:

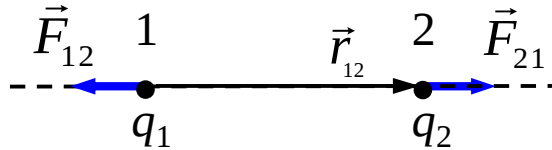
- 1) Существует два сорта эл. зарядов – “+” и “-”;
 - 2) Заряд дискретен – существует минимальная порция: $|e| = 1,6 \dots \cdot 10^{-19} \text{ Кл}$;
 - 3) Заряд тел: $q = \pm n \cdot |e|$, n – натуральное число.
 - 4) Заряд сохраняется;
 - 5) Заряд инвариантен;
- 

♣ В электрически изолированной системе алгебраическая сумма электрических зарядов не изменяется с течением времени ($\Sigma q = \text{const}$).₅

Электростатика (заряды в покое)

7.2. Закон Кулона – основной закон электростатики

1785 г.



$$F_{21} \sim \frac{1}{r^2}, |q_1| \cdot |q_2|, \dots$$

Замечания:

- 1) $\frac{1}{r^2}$ А вполне ли точно ?
- 2) ... в покое. А если в движении ?
- 3) ... в вакууме. А если в «среде» ?
- 4) Мощнее гравитации ... ?

$$\vec{F}_{21} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q_1 \cdot q_2}{r^2} \cdot \frac{\vec{r}_{12}}{r}$$

Атом водорода

$$\frac{F_e}{F_G} \sim 10^{\circ}$$

“1 %” ???

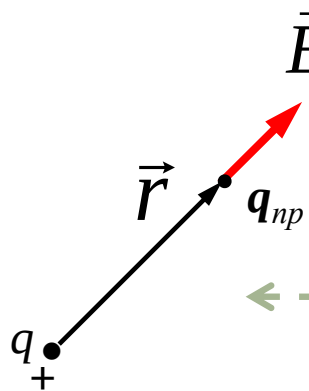


“поднимает Землю”

!!!

7.3. Напряжённость поля. Принцип суперпозиции

«Электрическое поле» ? ... $\Rightarrow$ $\vec{E}(\vec{r}) = \frac{\vec{F}_e}{q_{np}}$



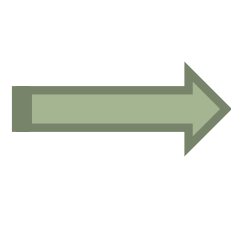
$$\vec{E}_{\text{тз.}}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q}{r^2} \cdot \frac{\vec{r}}{r}$$

$$\vec{F} = q \cdot \vec{E}(x, y, z)$$

«Поле»!

$$\vec{E} = \vec{E}(x, y, z)$$

А если зарядов много или заряжено тело ? ...



$$\vec{E}(\vec{r}) = \sum_{i=1}^N \vec{E}_i$$

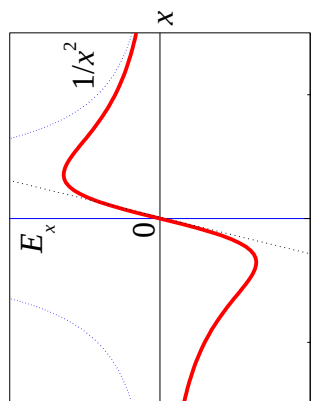
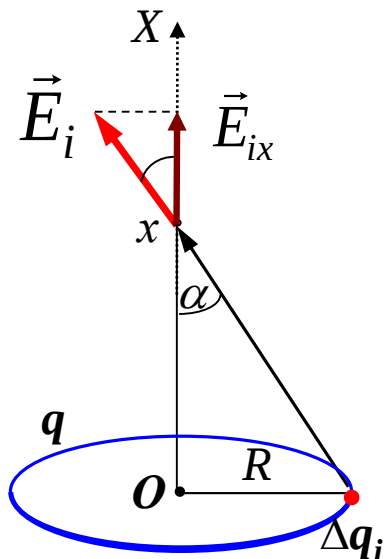
Принцип суперпозиции полей
сил и полей (эксперимент !)

А как это реализуют на практике?



7.5. Расчёт напряжённости поля протяжённых заряженных тел – “путь 1”: применение принципа суперпозиции

Пример 1. (Задача 6.3) Определить напряжённость электрического поля на оси равномерно заряженного кольца радиуса R . Заряд кольца q , x – расстояние от центра кольца.



$$\vec{E}_i = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\Delta q_i}{r^2} \cdot \frac{\vec{r}_i}{r} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\Delta q_i}{(R^2 + x^2)} \cdot \frac{\vec{r}_i}{r}$$

$$E(x) = \sum_i (E_i \cdot \cos \alpha) = \sum_i \left[\frac{\Delta q_i \cdot x}{4\pi\epsilon_0 (R^2 + x^2)^{3/2}} \right] =$$

$$= \frac{x}{4\pi\epsilon_0 (R^2 + x^2)^{3/2}} \cdot \sum_i \Delta q_i \quad ?$$

$$\vec{E}(x) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q \cdot x}{(R^2 + x^2)^{3/2}} \cdot \vec{e}_x$$

асимптотики ?

$$a) x \gg R \quad \Rightarrow \quad E \sim 1/x^2$$

$$a) x \ll R \quad \Rightarrow \quad E \sim x$$

Замечания:

1) Кольцо $\Delta q_i \rightarrow$ без интегралов

► (Опр.)

задача 6.4 (диск): $\rightarrow E(x) = \int_0^R \frac{2\pi r \sigma x}{4\pi\epsilon_0 (r^2 + x^2)^{3/2}} dr$

$$\sigma = \frac{dq}{dS}$$

2) Поверхностная плотность заряда

3) Линейная плотность заряда:

► (Опр.)

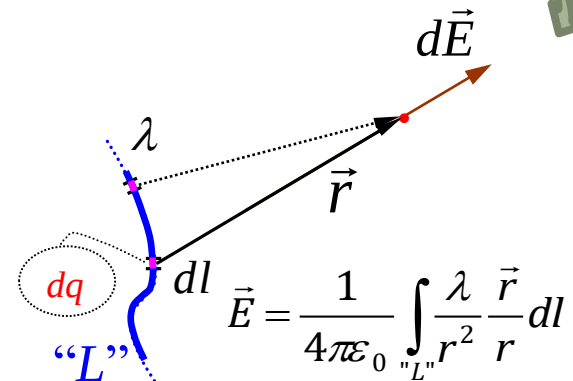
$$\lambda = \frac{dq}{dl}$$

► (Опр.)

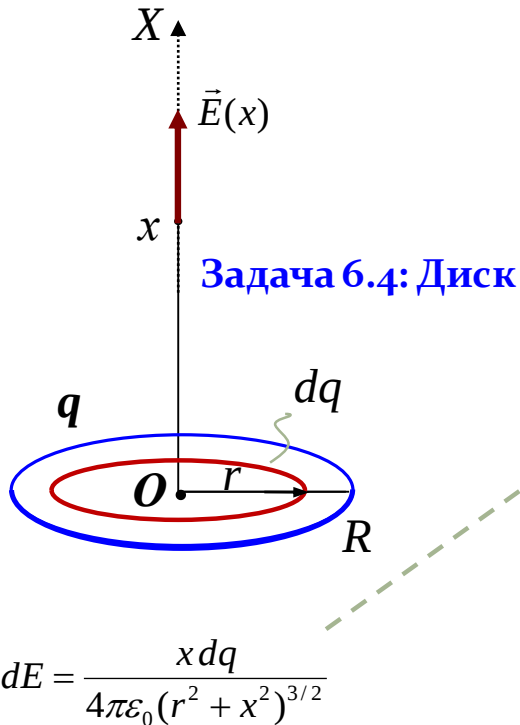
4) Объёмная плотность заряда:

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\Omega} \frac{\rho}{r^2} \frac{\vec{r}}{r} dV$$

$$\rho = \frac{dq}{dV}$$

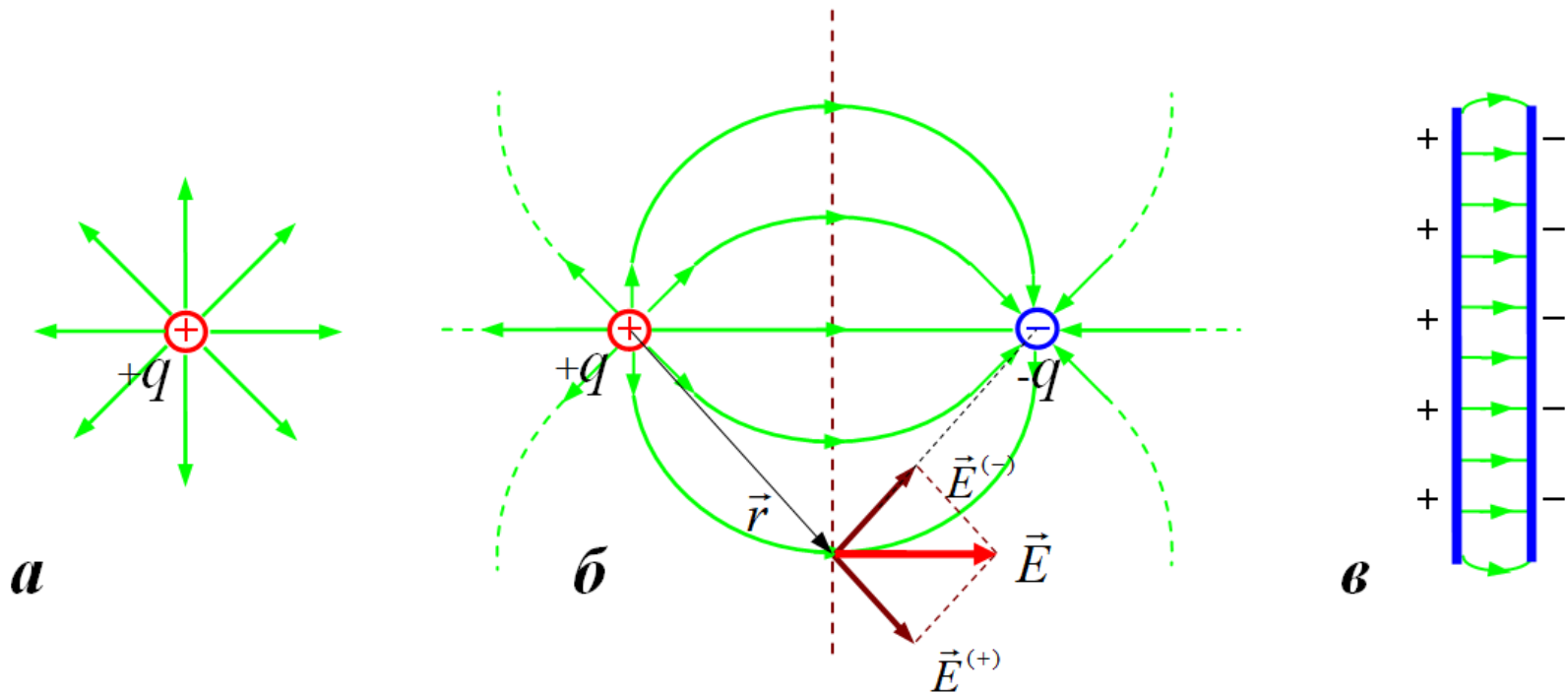


$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{L} \frac{\lambda}{r^2} \frac{\vec{r}}{r} dl$$



7.4. Линии напряжённости – “силовые линии”

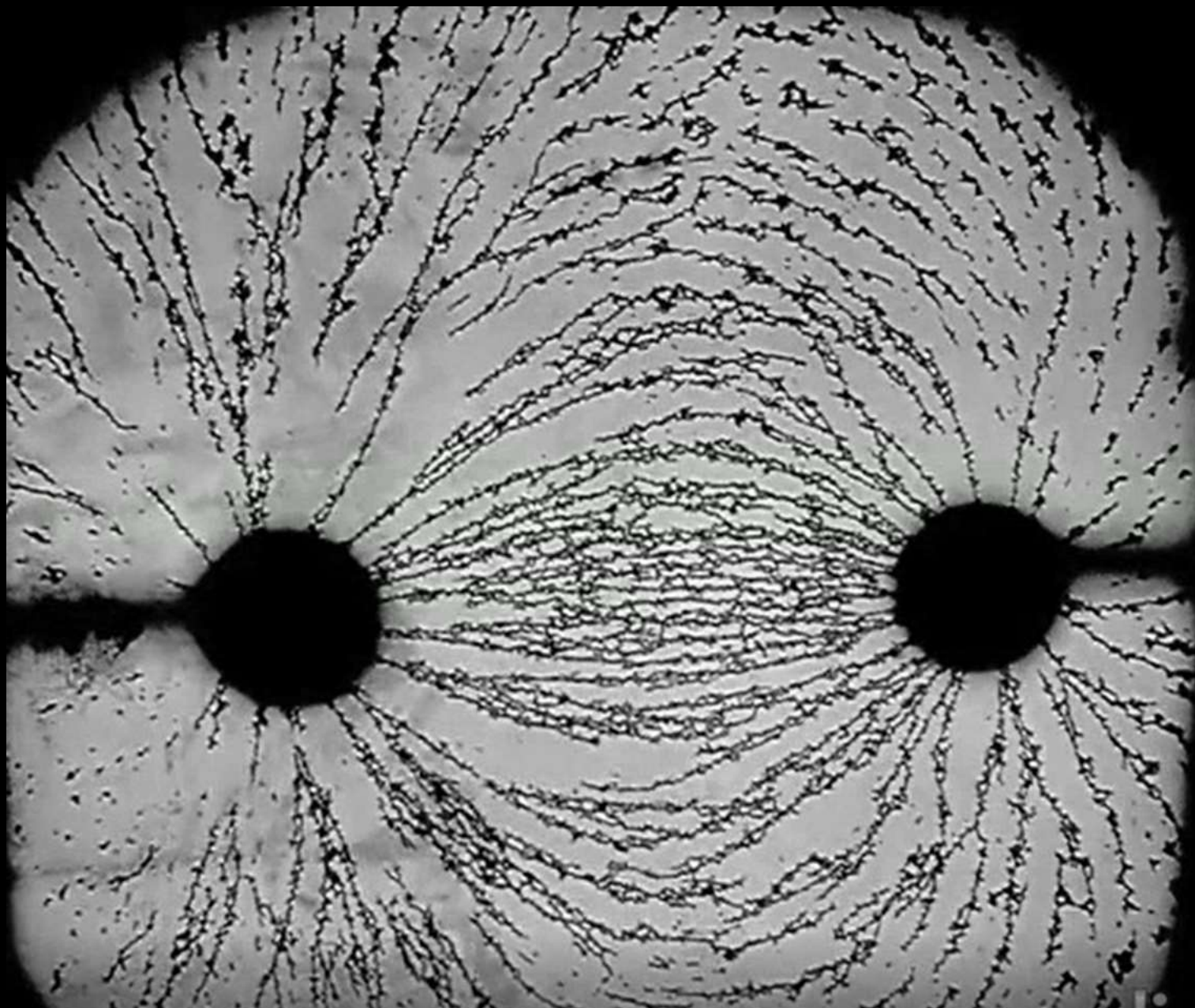
► (Опр.) Линии, касательные к которым в каждой точке поля совпадают с направлением вектора напряжённости в данной точке, называются линиями напряжённости электрического поля



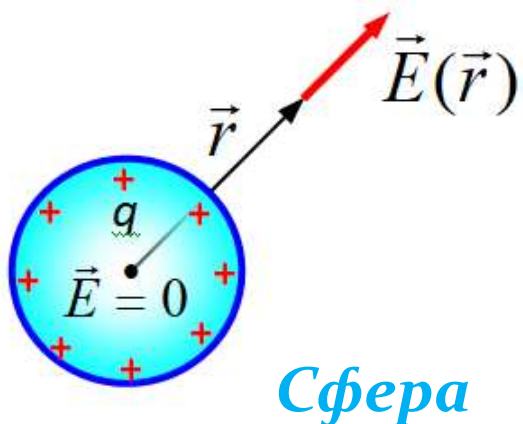
♣ **Линии:**

- 1) Незамкнуты;
- 2) Не пересекаются;
- 3) Густота пропорциональна E

Силовые линии

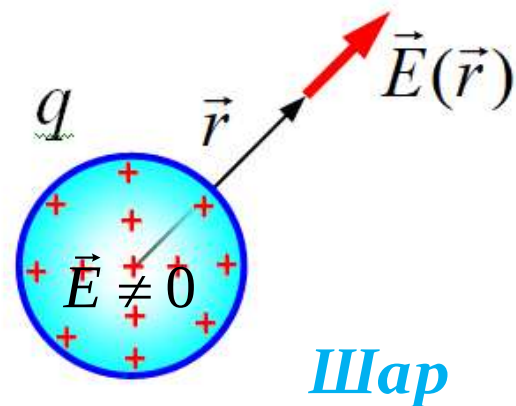


А такие тела?

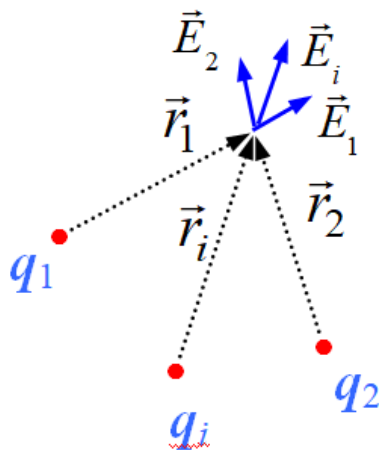


или

“Задача Ньютона”



Как искать $\vec{E}(\vec{r})$?



???

Теорема Гаусса

§ 8. Теорема Гаусса.

8.1. Поток вектора напряжённости

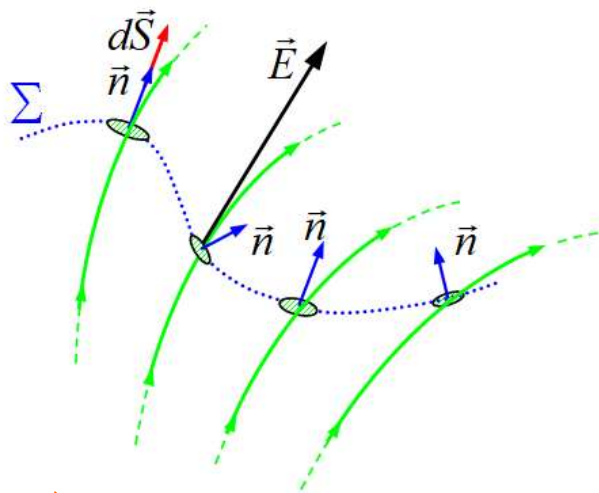
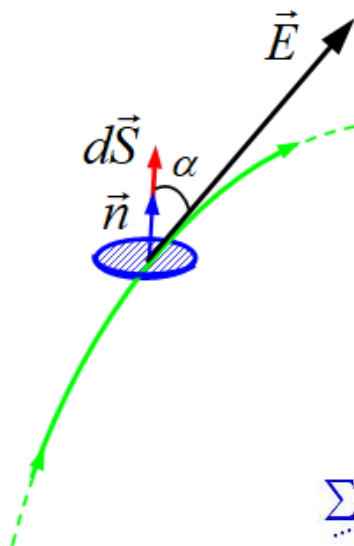
► (Опр.) Элементарный поток:

$$d\Phi = (\vec{E}, d\vec{S})$$

или: $E \cdot dS \cdot \cos \alpha = E_n \cdot dS$

... через “элемент поверхности”

А через всю поверхность ??



► (Опр.) Поток вектора напряжённости:

Сумма

Σ :



$$\Phi = \int_{\Sigma} (\vec{E}, d\vec{S})$$

1) Скаляр; 2) имеет знак; 3) выбор «+» нормали;

4) пропорциональна «числу силовых линий» (“+1”/“-1”); 5) $\Phi = \sum_i \Phi_i$

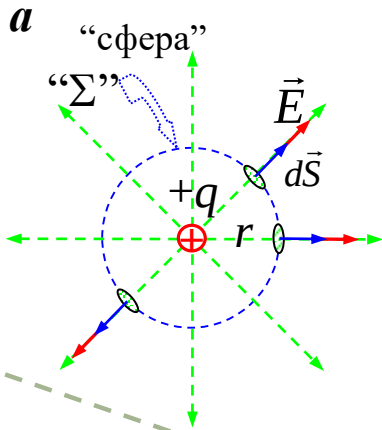
8.2. Теорема Гаусса (формулировка)

♣ Поток вектора напряжённости электростатического поля в вакууме через любую замкнутую поверхность пропорционален суммарному заряду, расположенному внутри этой поверхности:

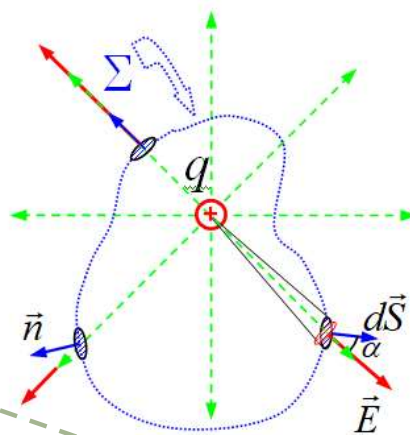
$$\oint_{\Sigma} (\vec{E}, d\vec{S}) = \frac{1}{\varepsilon_0} \sum q$$

... заряженные тела ?

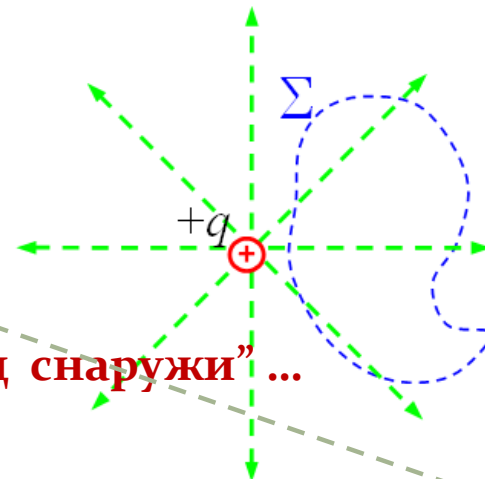
$$\int_{\Omega^*} \rho dV$$



... “заряд в центре” ...



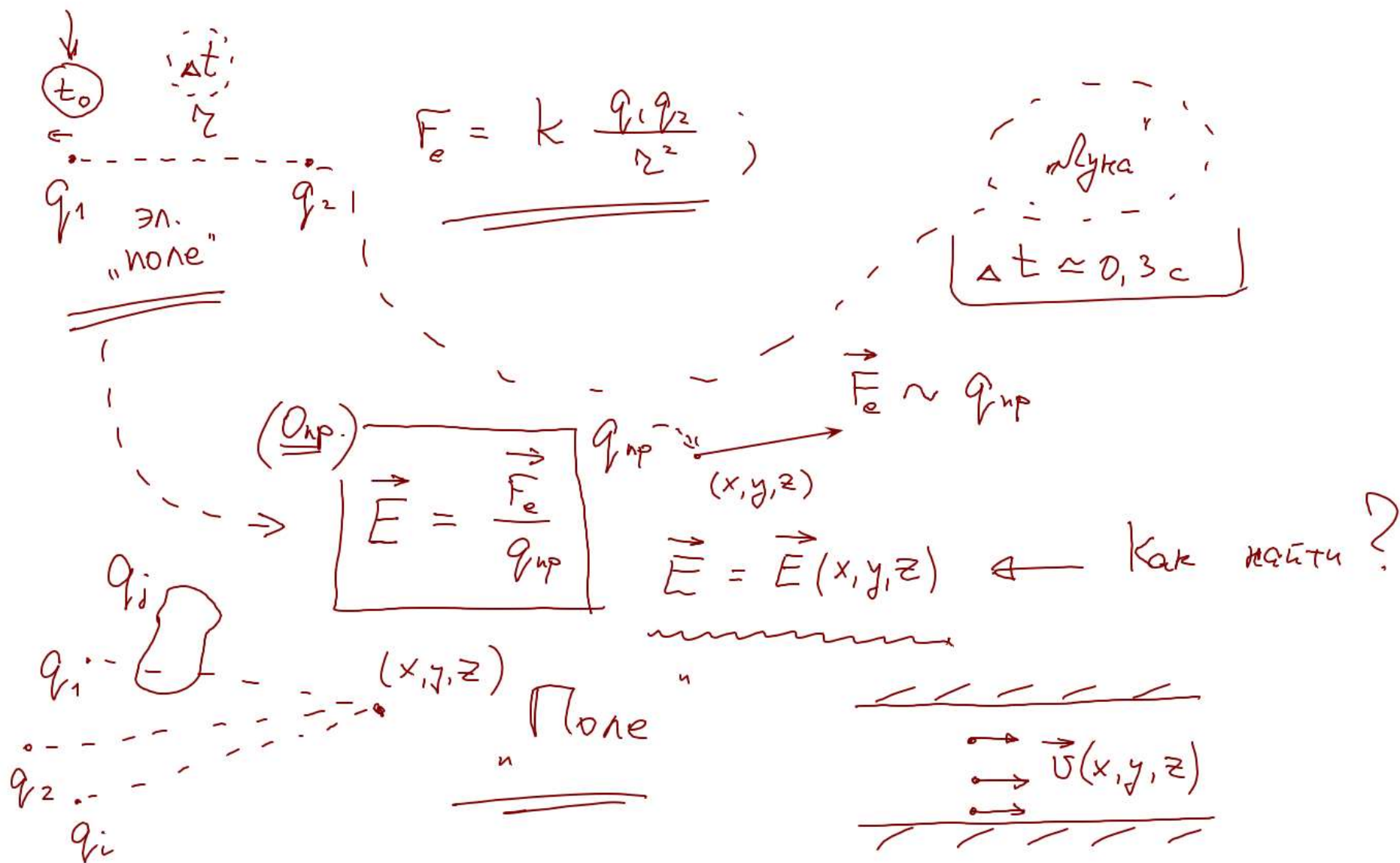
... “заряд внутри” ...



... “заряд снаружи” ...

... “много зарядов”¹⁴

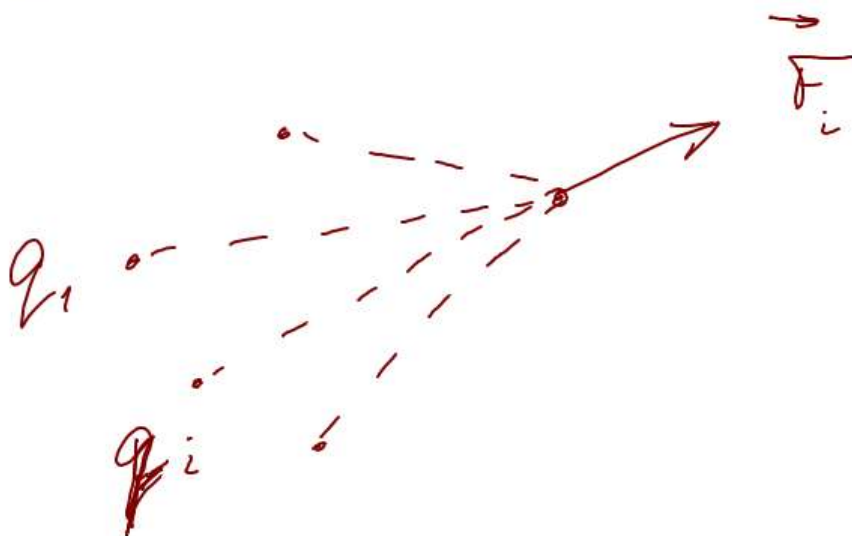
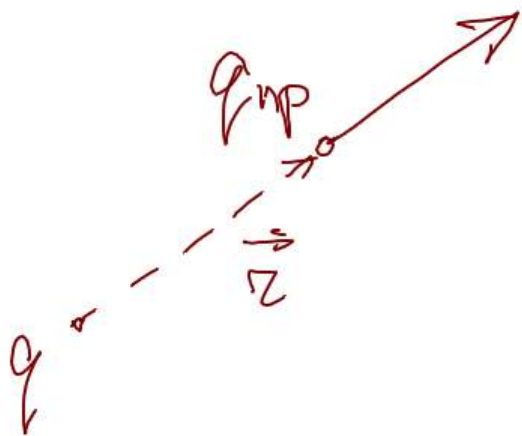
Доска 1



Доска 2

$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q \cdot q_{np}}{r^2} \cdot \frac{\vec{r}}{r}$$

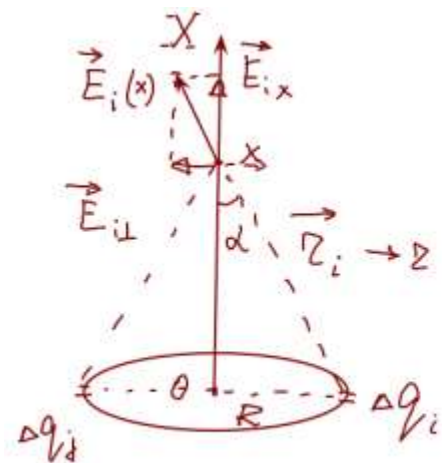
$$\vec{E}_{\text{т.з.}}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \cdot \frac{\vec{r}}{r}$$



$$\vec{F} = \sum_i \vec{F}_i$$

$$\vec{E} = \sum_i \vec{E}_i$$

Доска 3



$$\vec{E}_i(x) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\Delta q_i}{(R^2 + x^2)} \cdot \frac{\vec{r}_i}{r}$$

$$\vec{E} = \sum_i \vec{E}_i = \sum_i \vec{E}_{i,x} + \cancel{\sum_i \vec{E}_{i,\perp}} = \left(\sum_i E_i \cos \alpha \right) \vec{e}_x =$$

$$= \sum_i \left\{ \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\Delta q_i}{(R^2 + x^2)} \cdot \frac{x}{\sqrt{R^2 + x^2}} \right\} \vec{e}_x = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{x}{(R^2 + x^2)^{3/2}} \left(\sum_i \Delta q_i \right) \vec{e}_x$$

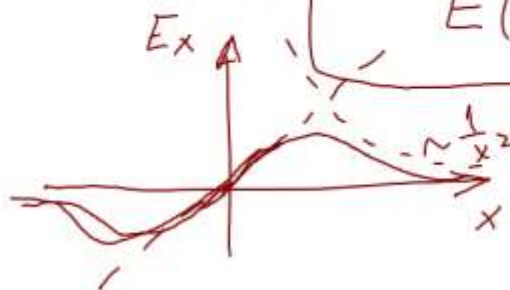
$$\vec{E}(x) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Q \cdot x}{(R^2 + x^2)^{3/2}} \cdot \vec{e}_x$$

a) $x \gg R$

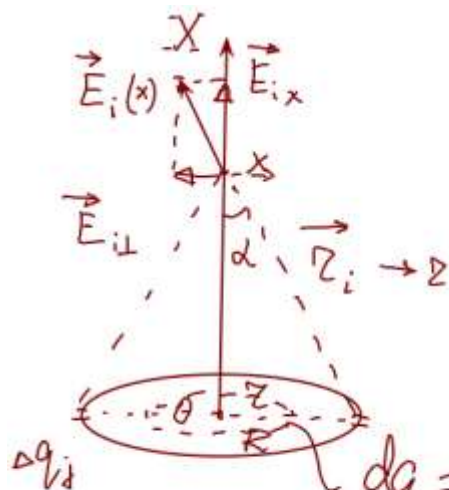
$$E(x) \sim \frac{x}{(R^2 + x^2)^{3/2}} \sim \frac{1}{x^2}$$

б) $x \ll R$

$$\sim x$$



Доска 4



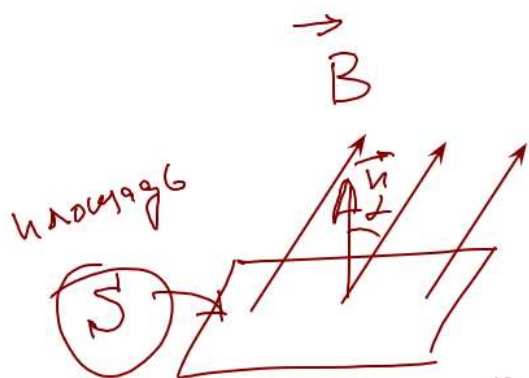
$$E(x) = \int \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{dq}{(z^2 + x^2)^{3/2}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\sigma \cdot 2\pi z dz}{(z^2 + x^2)^{3/2}} = \dots$$

$$\Delta q_i \quad dq = \sigma \cdot \underline{ds} = \underbrace{(\sigma \cdot 2\pi z \cdot dz)}$$

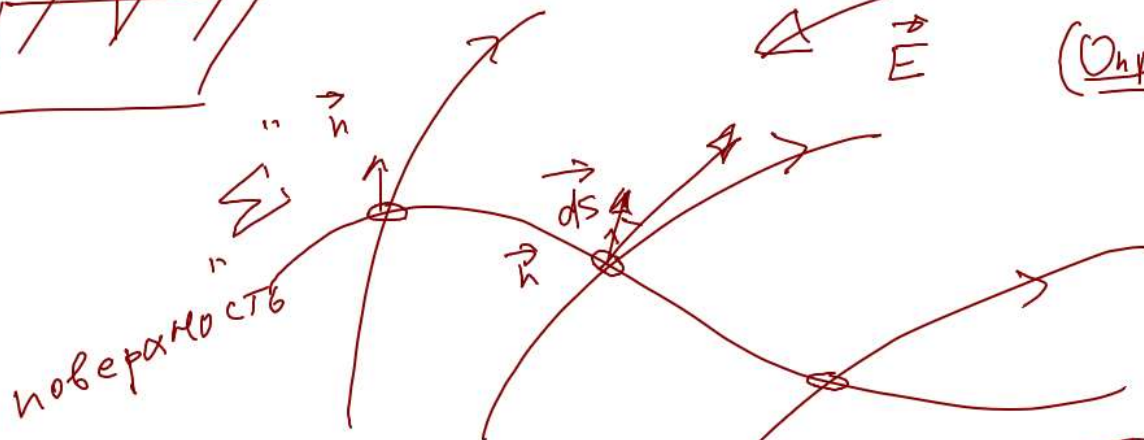
Onp. $\sigma = \frac{dq}{ds} ; \frac{ka}{m^2}$



Доска 5



"Опр." $\Phi = B \cdot S \cdot \cos \alpha$



$\vec{E}$ (Опр.)

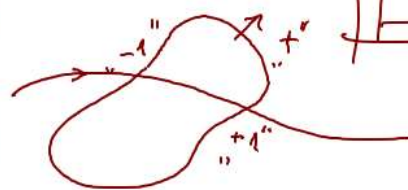
$$d\Phi = E \cdot dS \cdot \cos \alpha$$

$$d\Phi = (\vec{E}, d\vec{s})$$

$$d\Phi = E_n \cdot dS$$

$$\Phi = \int_{\Sigma} (\vec{E}, d\vec{s})$$

- 1) скалярная
2) + / - ;



3) $\Phi = \sum_i \Phi_i$