Лекция 8. Применение теоремы Гаусса.
Работа в электрическом поле

8.3. Применение теоремы для расчёта напряжённости электрического поля протяжённых заряженных тел

Пример. **(Задача 6.11)** Определить напряжённость электрического поля бесконечного цилиндрического стержня радиуса *R* *а*) снаружи и *б*) внутри этого стержня. Заряд распределён по стержню равномерно с объёмной плотностью ρ ; диэлектрическая проницаемость материала стержня равна ε.

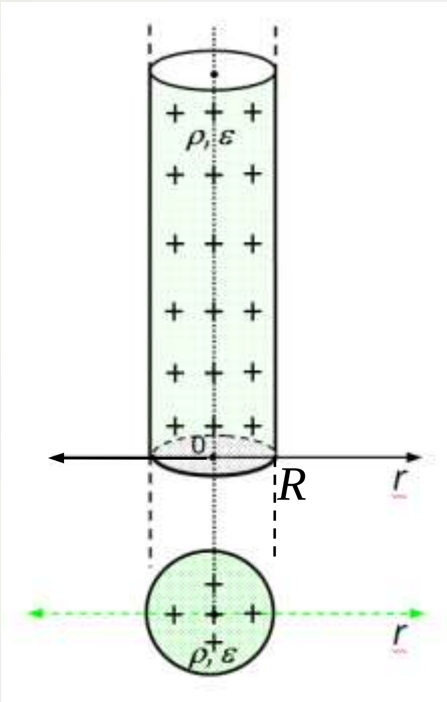
План

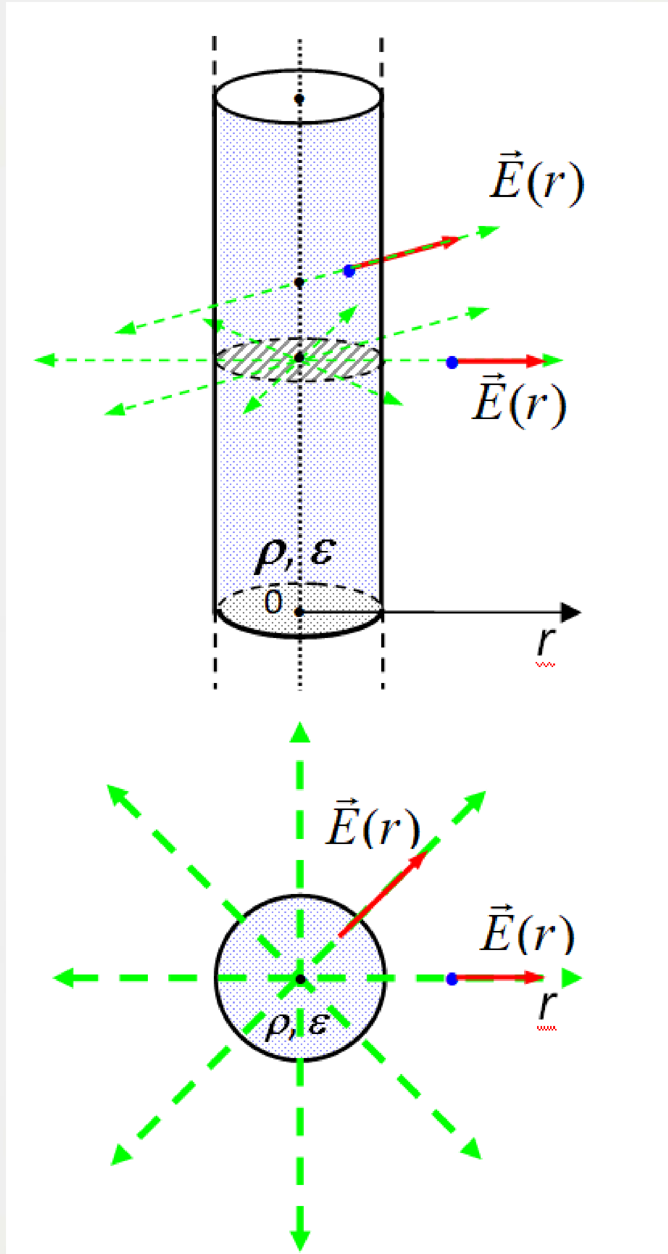
- **1.** Сделать схематический рисунок
- **2.** Проанализировать структуру поля
- **3.** *выбрать замкнутую поверхность* Σ (поверхности) для применения теоремы Гаусса
- **4.** *«рассчитать» поток вектора напряжённости через поверхность* Σ
- **5.** *рассчитать заряд, оказавшийся охваченным замкнутой поверхностью* Σ
- **6.** *записать равенство, соответствующее утверждению теоремы Гаусса*

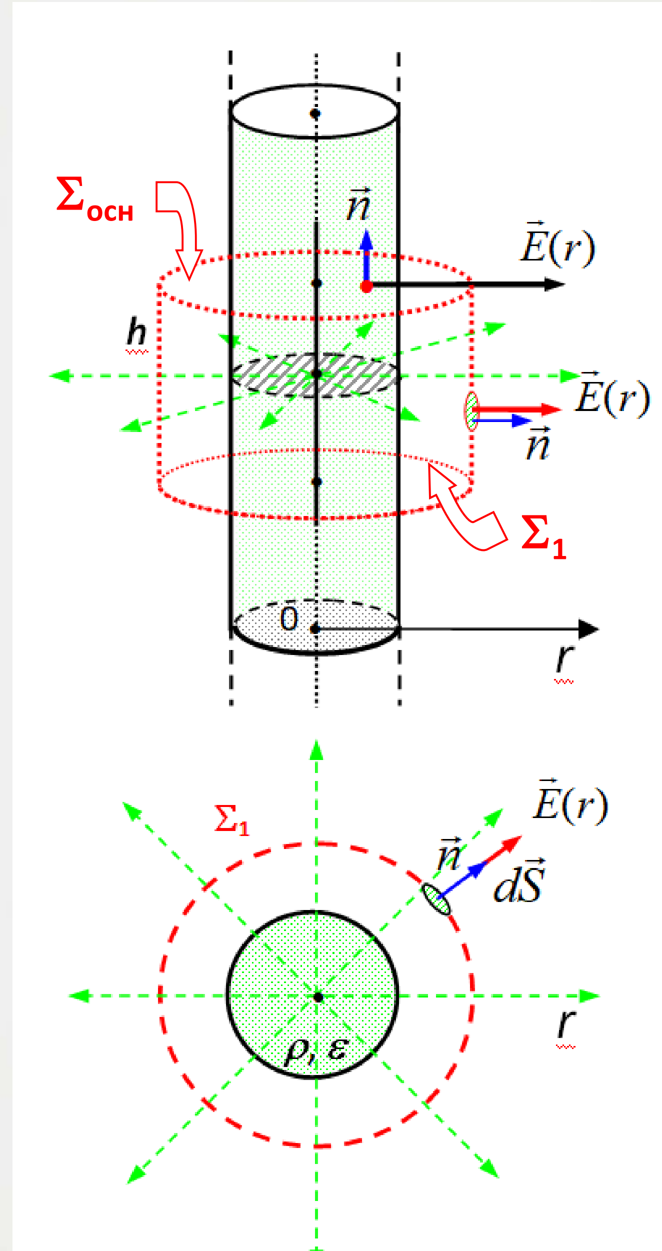
1. Рисунок !

2. “Структура поля”

3. Выбор поверхности







4. "Посчитать" поток:

$$\oint\limits_{\Sigma_{1,2}}(\vec{E},d\vec{S})=\int\limits_{\Sigma_{осн.}}(\vec{E},d\vec{S})+\int\limits_{\Sigma_{бок.}}(\vec{E},d\vec{S})=\int\limits_{\Sigma_{осн.}}\{E\cdot dS\cdot\cos(90^\circ)\}+$$

$$+\int\limits_{\Sigma_{бок.}}\{E(r)\cdot dS\cos(0^\circ)\}=E(r)\cdot\int\limits_{\Sigma_{бок.}}dS=E(r)\cdot S_{бок.}=\underline{\underline{E(r)\cdot 2\pi r\cdot h}}$$

5. "Посчитать" заряд внутри:

$$\sum q=\begin{cases}\rho\cdot\pi R^2\cdot h, & r>R, \quad \text{"вне"} \ (\Sigma_1)\\ \rho\cdot\pi r^2\cdot h, & r\le R \quad \text{"внутри"} \ (\Sigma_2)\end{cases}$$

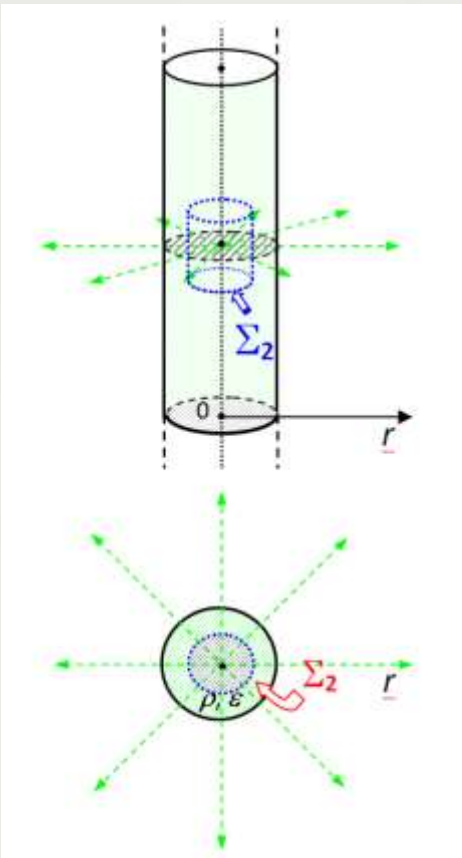
6. "Применить" … :

$$E^{(вне)}(r)\cdot\cancel{2\pi}r\cdot\cancel{h}=\frac{1}{\varepsilon_0}\cdot\rho\cdot\cancel{\pi}R^2\cdot\cancel{h}$$

1) *Поле "вне":* $E^{(вне)}(r)=\dfrac{\rho R^2}{2\varepsilon_0}\cdot\dfrac{1}{r}$ ⟸ "вне" $(r>R)$

2) Поле “внутри”: Σ_2 :

5. “Посчитать” заряд внутри:



$$\sum q = \begin{cases} \rho \cdot \pi R^2 \cdot h, & r > R, \text{ “вне” } (\Sigma_1) \\ \rho \cdot \pi r^2 \cdot h, & r \le R, \text{ “внутри” } (\Sigma_2) \end{cases}$$

6. “Применить” … :

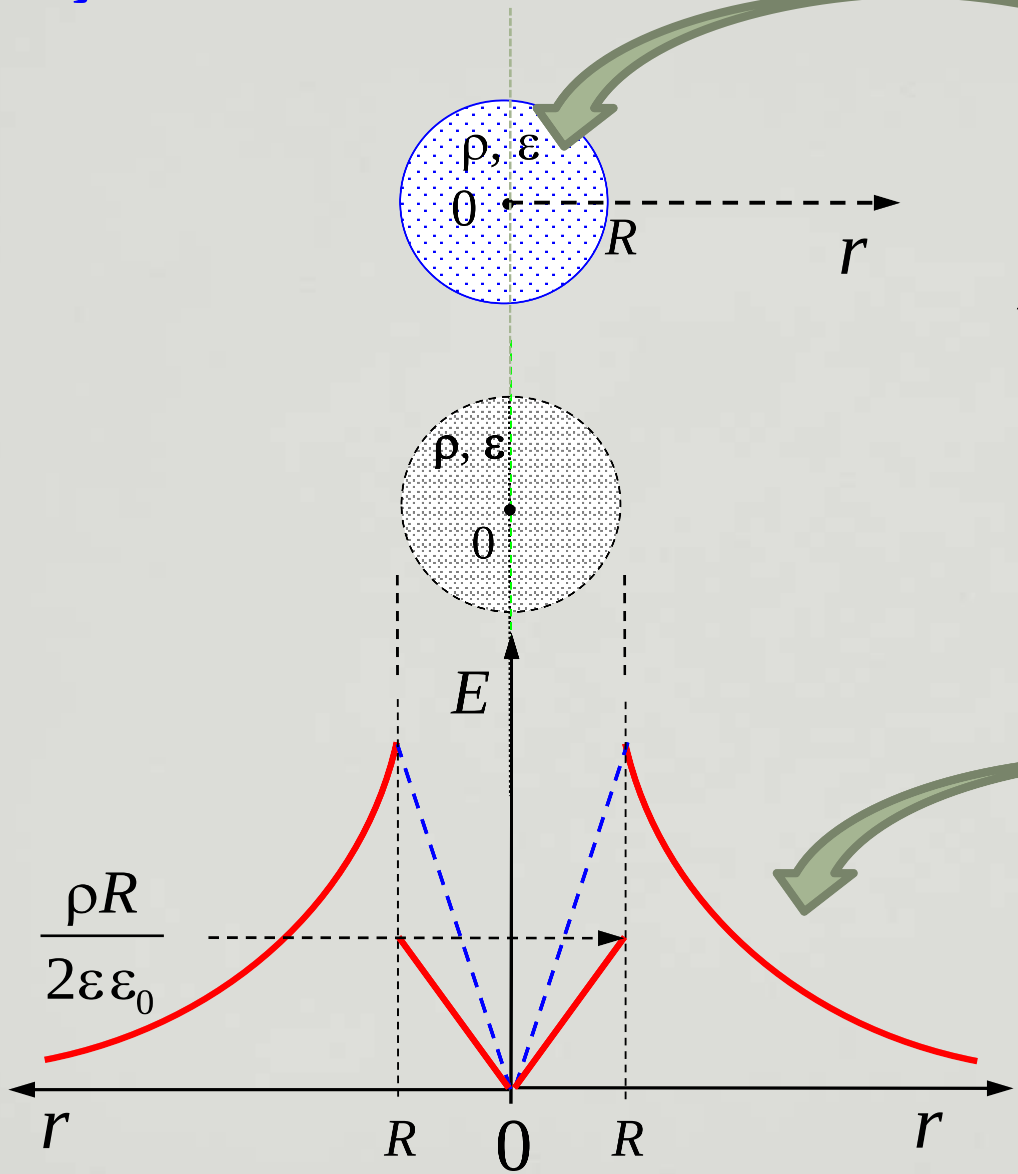
$$E^{(вне)}(r) \cdot 2\cancel{\pi r} \cdot \cancel{h} = \frac{1}{\varepsilon_0} \cdot \rho \cdot \cancel{\pi r}^2 \cdot \cancel{h}$$

2) Поле “внутри”:

$$E^{(внутри)}(r) = \frac{\rho}{2\,\varepsilon\,\varepsilon_0} \cdot r$$

“внутри” ($r \le R$)

Результаты :

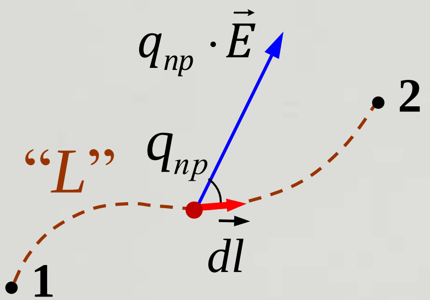


$$E^{(внутри)}(r) = \frac{\rho}{2\,\varepsilon\,\varepsilon_0}\cdot r$$

$$E^{(вне)}(r) = \frac{\rho R^2}{2\varepsilon_0}\cdot\frac{1}{r}$$

§ 9. Работа в электростатическом поле

9.1. Разность потенциалов. Потенциал



$A_{12}^{поля} \leftarrow$ *не зависит от "L"*

!!

Характеристика поля

Но $A \sim q$

➧ (**Опр.**) **Разность потенциалов:**

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \frac{A_{12}^{поля}}{q_{пр}}$$

$$\frac{Дж}{Кл} =$$

"Вольт"

$$A_{12}^{поля} = q \cdot (\varphi_1 - \varphi_2)$$

Связь разности потенциалов и напряжённости:

$$A_{1\to2}^{поля} = \underset{\substack{(1)\\ \text{по любой}\\ \text{траектории}}}{\int^{(2)}} (\vec{F}, d\vec{l}) = q_{пр} \cdot \int_{(1)}^{(2)} (\vec{E}, d\vec{l}) \Rightarrow \varphi_1 - \varphi_2 = \frac{A_{1\to2}^{поля}}{q_{пр}} = \int_{(1)}^{(2)} E_l \, dl$$

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \underset{\substack{(1)\\ \text{по любой}\\ \text{траектории}}}{\int^{(2)}} (\vec{E}, d\vec{l})$$

[*] Rem (Механика): 5.9. Потенциальная энергия

"Запас работы" за счёт взаимодействия тел системы

Только для консервативных сил **!!!**

$$U = f(x, y, z); \quad (x, y, z) \equiv \underline{\{x_1, y_1, z_1, \ldots, x_i, y_i, z_i, \ldots, x_n, y_n, z_n\}}$$

"конфигурация"

$$U(x, y, z): \qquad A_{12}^{(\kappa)} = U_1 - U_2 = -\Delta U$$

$$A_{12}^{(\text{сист.})} > 0, \quad \textit{если} \quad U \quad \text{убывает!}$$

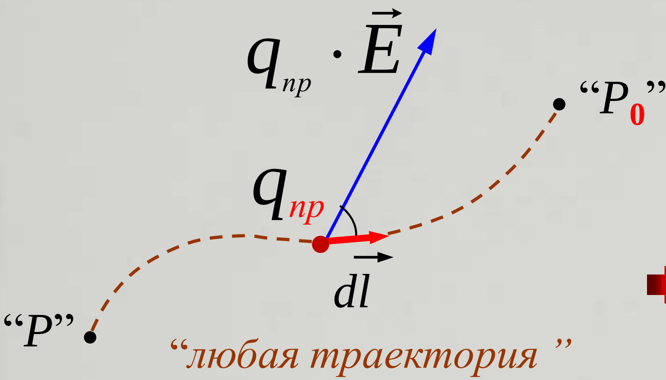
А как узнать $U(x, y, z):$ **?**

1) «Нормировка» - договор: $U(''P_0'') = 0$

2) Как искать: $U(''P'') = A_{P \to P_0}^{(\text{сист.})};$

Потенциал

1) $\varphi(P_0) = 0$;



2)

(*Опр.*) Потенциал:

$$\boxed{\varphi(P) = \frac{A^{поля}_{P \to P_0}}{q_{пр}}}$$

А как же потенциальная энергия **?**

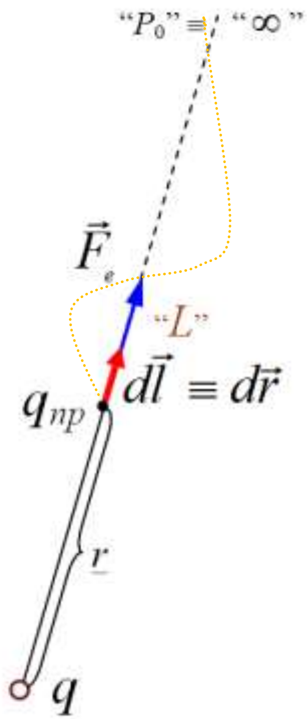
$$\varphi(x, y, z) = \frac{U(x, y, z)}{q_{пр}}$$

$$U(x, y, z) = q \cdot \varphi(x, y, z)$$

Потенциальная энергия точечного заряда в данной точке поля

9.2. Потенциал поля точечного заряда

1) Нормировка: $\varphi(\infty) = 0\,;$



2) Выбор траектории

3) Расчёт: $\varphi_P = \int\limits_{(P)}^{(P_0)} E_l\, dl = \int\limits_r^{\infty} E_r\, dr =$

по любой траектории

$$= \int\limits_r^{\infty} \left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q}{r^2} \right) dr = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \int\limits_r^{\infty} \left(\frac{1}{r^2} \right) dr = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \left(-\frac{1}{r} \right) \Bigg|_r^{\infty} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \varphi_{\text{т.з.}}(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q}{r}$$

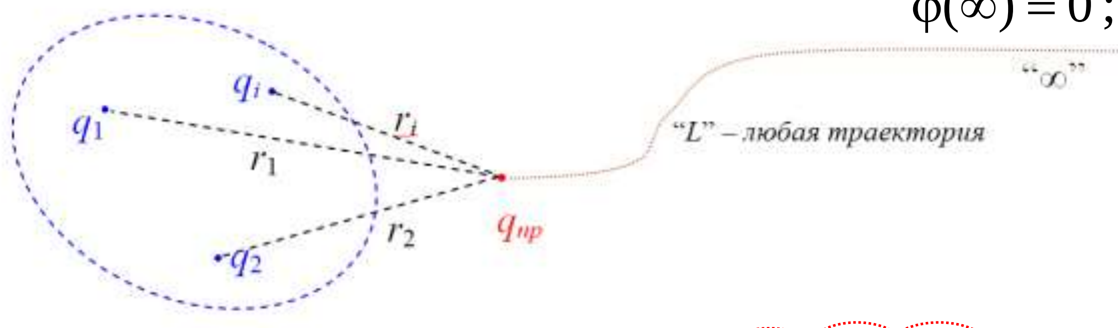
Принцип суперпозиции для потенциалов **??**

9.3. Расчёт потенциала в поле системы зарядов – принцип суперпозиции для потенциалов

Много зарядов

Нормировка

$$\varphi(\infty) = 0\,;$$



$$A^{поля}_{P\to P_0} = \sum_{i=1}^{N} A_i$$

$$\begin{cases} \varphi_1 = \dfrac{\left(A_{P\to P_0}\right)_1}{q_{пр}}\,; \\ \ldots \\ \varphi_i = \dfrac{\left(A_{P\to P_0}\right)_i}{q_{пр}}\,; \\ \ldots \\ \varphi_N = \dfrac{\left(A_{P\to P_0}\right)_N}{q_{пр}} \end{cases}$$

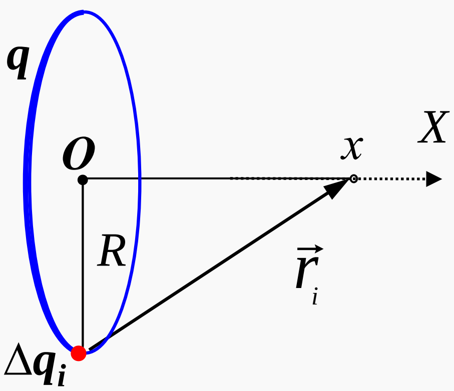
$$\varphi = \sum_{i=1}^{N} \varphi_i$$

$$\varphi = \frac{A^{поля}_{P\to P_0}}{q_{пр}} = \frac{\sum_{i=1}^{N} A_i}{q_{пр}} = \frac{q_{пр}\cdot\sum_{i=1}^{N}\varphi_i}{q_{пр}} = \sum_{i=1}^{N}\varphi_i$$

Как считать на практике ?

Применение принципа суперпозиции для расчёта потенциала электрического поля протяжённых заряженных тел

Пример: «Кольцо» (Задача 7.2) Определить потенциал электрического поля, созданного равномерно заряженным тонким кольцом на оси, проходящей через центр кольца перпендикулярно плоскости, в которой лежит кольцо. Радиус кольца R, его заряд q.



$$\varphi = \sum_{i=1}^{N} \varphi_i = \sum_{i=1}^{N} \left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{\Delta q_i}{r_i} \right) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \sum_{i=1}^{N} \left(\frac{\Delta q_i}{\sqrt{R^2 + x^2}} \right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \varphi(x) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q}{\sqrt{R^2 + x^2}}$$

А можно ли, зная φ(*x*,*y*,*z*), найти $\vec{E}(x, y, z)$ **??**

Ещё вернёмся к этому вопросу ! (“Обратная задача”)

9.4. Связь напряжённости и потенциала
(прямая и обратная задачи)

а) $\vec{E}(x,y,z) \Rightarrow \varphi(x,y,z);$ *("Прямая задача")*

б) $\varphi(x,y,z) \Rightarrow \vec{E}(x,y,z)$ *("Обратная задача")*

9.4.1. "обратная":

Можно ли, зная *φ(x,y,z)*, найти $\vec{E}(x,y,z)$ **??**

$$\begin{cases} dA = q_{np} \cdot E_l \cdot dl; \\ dA = -q_{np} \cdot d\varphi. \end{cases}$$

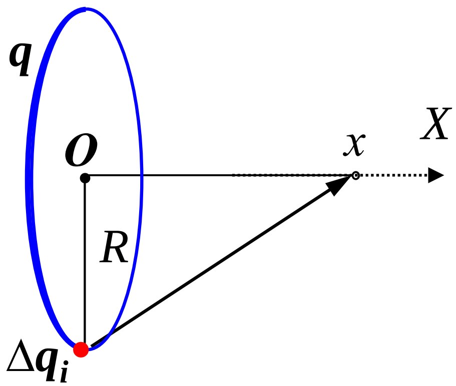
(Определение элементарной работы)

(Определение разности потенциалов)

$$E_l = -\frac{d\varphi}{dl}$$

$$\vec{E} = -\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\vec{e}_x + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\vec{e}_y + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\vec{e}_z \right)$$ **или** $$\vec{E} = -\,\mathrm{grad}\,\varphi$$

Пример: «Кольцо»

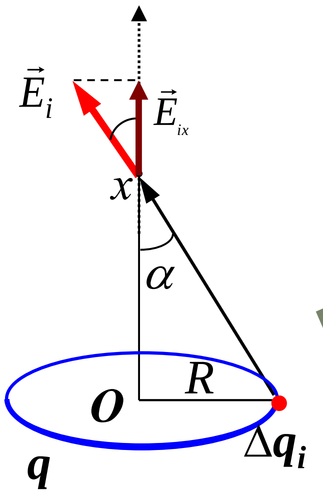


Уже “посчитали” φ(x):

$$\varphi(x) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{\sqrt{R^2 + x^2}}$$

$$E_x = -\frac{\partial\varphi}{\partial x} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q \cdot x}{\left(R^2 + x^2\right)^{3/2}};$$

Вместо:



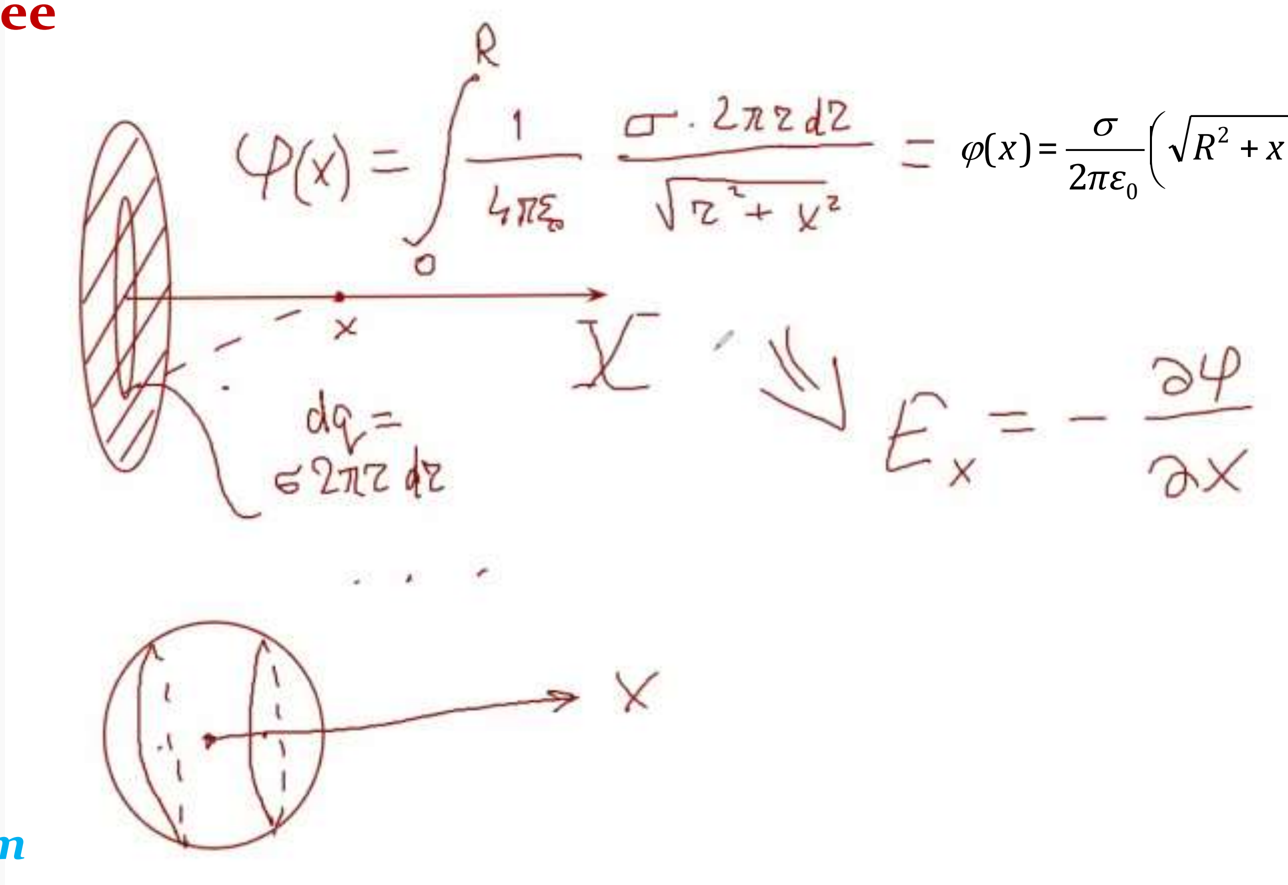
$$\vec{E}(x) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q \cdot x}{\left(R^2 + x^2\right)^{3/2}} \cdot \vec{e}_x$$

Уже знаем. Но … !

Применение принципа суперпозиции для расчёта потенциала электрического поля протяжённых заряженных тел

А можно посложнее

??



$$\varphi(x) = \frac{\sigma}{2\pi\varepsilon_0}\left(\sqrt{R^2 + x^2} - x\right)$$

Можно-то можно

… ,

да не всегда имеет смысл ☺

Проще, решив "прямую задачу"):

$$\vec{E}(x, y, z) \Longrightarrow \varphi(x, y, z);$$

а) Вернёмся к “прямой задаче”:

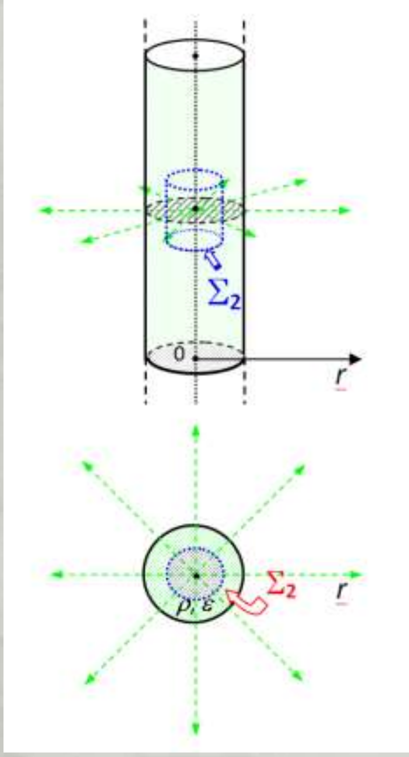
Как, зная, $\vec{E}(x,y,z)$ **найти** $\varphi(x,y,z)$ **??**

«Рецепт» есть: 1) Нормировка + 2) расчёт $\varphi_P = \int\limits_{(P)}^{(P_0)} (\vec{E}, d\vec{l}\,)$

по любой траектории !

Пока только для т.з. мы её решили: $\varphi_{\text{т.з.}}(r) = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{q}{r}$

А посложнее ??



Пример «Стержень»:

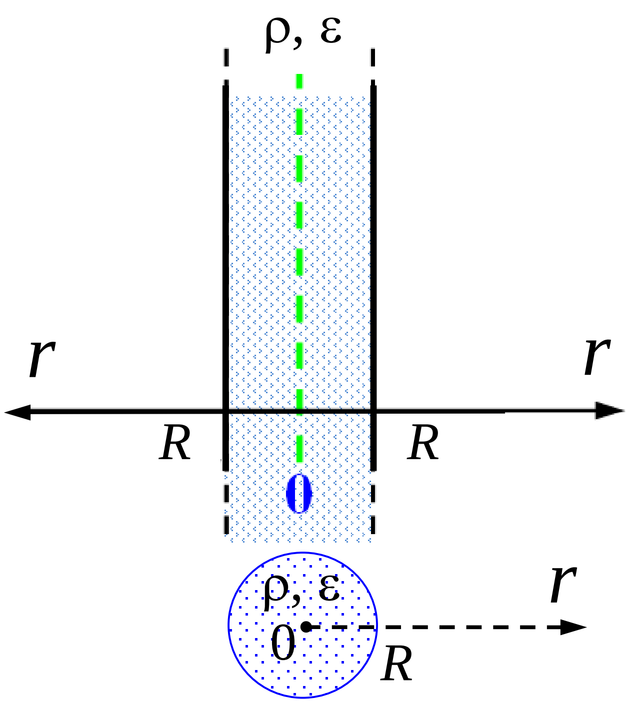
1) Поле “вне”: $E^{(вне)}(r) = \dfrac{\rho R^2}{2\varepsilon_0}\cdot\dfrac{1}{r}$, $(r > R)$

2) Поле “внутри”: $E^{(внутри)}(r) = \dfrac{\rho}{2\varepsilon\varepsilon_0}\cdot r$, $(r \le R)$

С него и начнём …

Пример. Бесконечный цилиндрический стержень радиуса R заряжен равномерно с объёмной плотностью ρ; диэлектрическая проницаемость материала стержня равна ε. Найти $\varphi(r)$: *а*) внутри и *б*) вне этого стержня. * (“ключ” к задачам: 7.4; 7.10 – 7.12; 7.14,б; 7.17)

1. Рисунок !

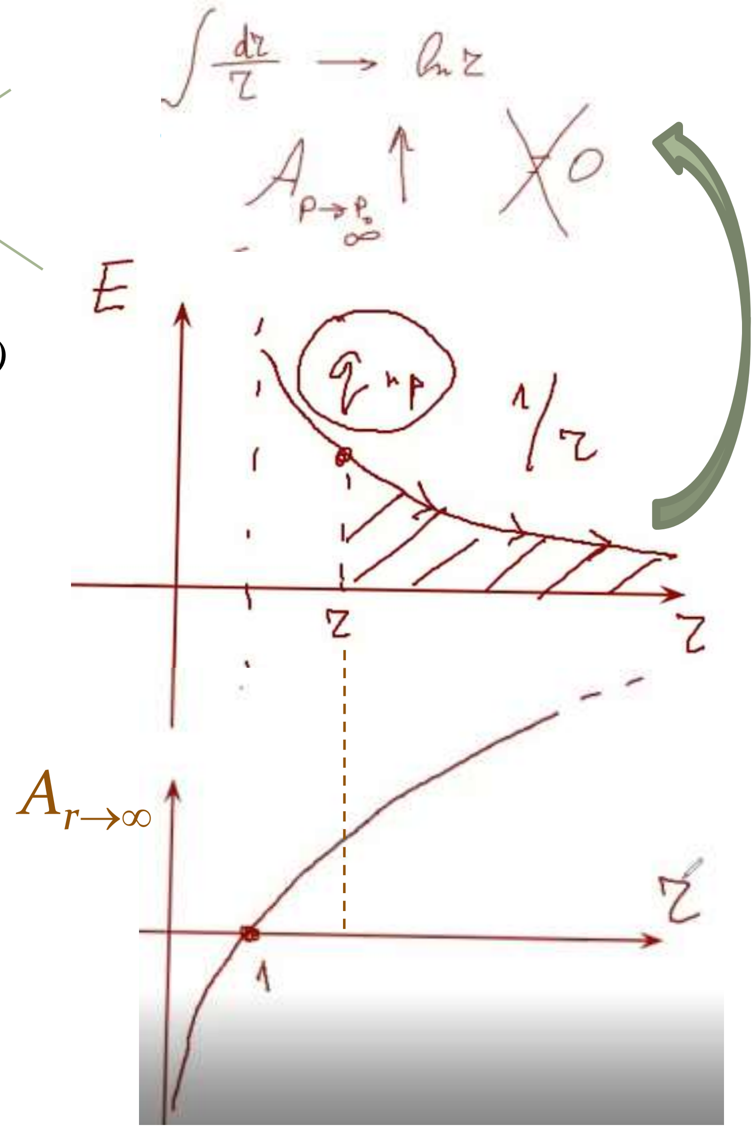


2. Нормировка !

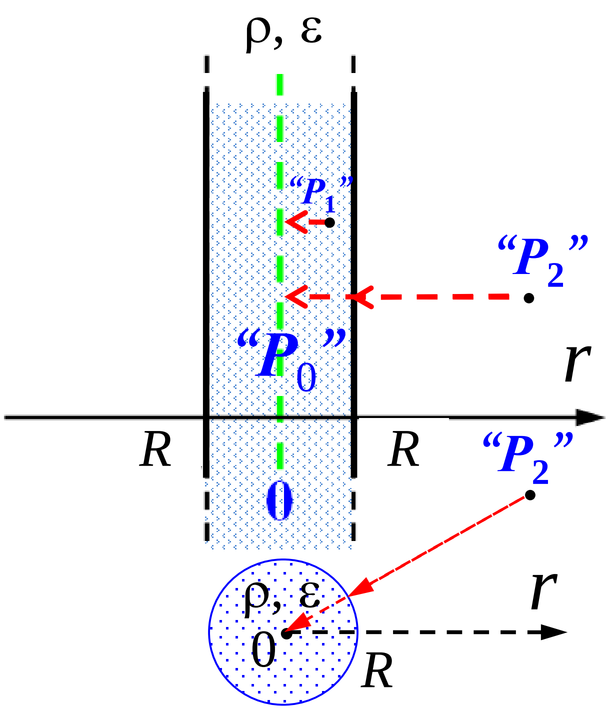
$$\cancel{\varphi(\infty)=0}$$

? Нет! ***(графики)***

$$E^{(вне)}(r)=\frac{\rho R^2}{2\varepsilon_0}\cdot\frac{1}{r},$$



3. Выбор траектории



$$\varphi_P = \int_{(P)}^{(P_0)} (\vec{E}, d\vec{l})$$

траектория – любая ??

а) “P_1” – внутри $(r \le R)$:

$$\varphi_P = \int_{(P_1)}^{(P_0)} (\vec{E}, d\vec{l}) = \int_r^0 E(r)dr = \int_r^0 \frac{\rho \cdot r}{2\varepsilon\varepsilon_0} dr = \left. \frac{\rho \cdot r^2}{4\varepsilon\varepsilon_0} \right|_r^0 \Rightarrow$$

$(r \le R)$

$$\varphi(r)^{(внутри)} = -\frac{\rho}{4\varepsilon\varepsilon_0} r^2$$