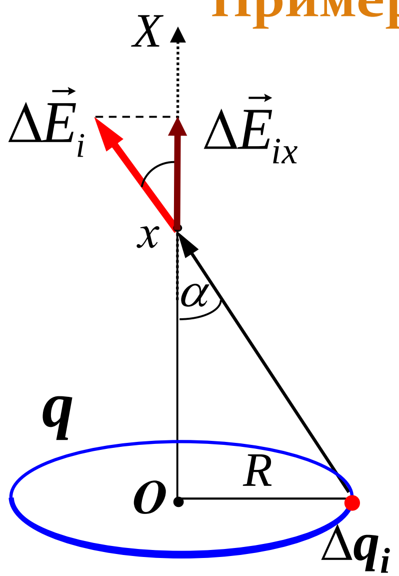
Лекция 8. Применение теоремы Гаусса.
Работа в электрическом поле

7.5. Расчёт напряжённости поля протяжённых заряженных тел – “путь 1”: применение принципа суперпозиции

Пример 1. Определить напряжённость электрического поля на оси равномерно заряженного кольца радиуса R. Заряд кольца q, x – расстояние от центра кольца.

Пример – «кольцо» (Задача 6.3)

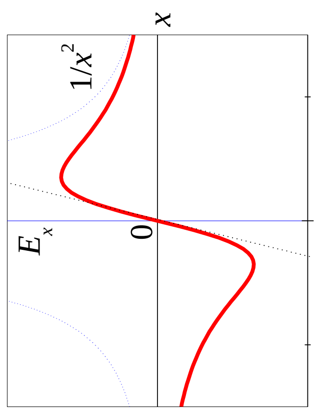


$$\Delta\vec{E}_i = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\Delta q_i}{r^2}\cdot\frac{\vec{r}_i}{r} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\Delta q_i}{(R^2+x^2)}\cdot\frac{\vec{r}_i}{r}$$

$$E(x) = \sum_i(\Delta E_i\cdot\cos\alpha) = \sum_i\left[\frac{\Delta q_i\cdot x}{4\pi\varepsilon_0(R^2+x^2)^{3/2}}\right] =$$

$$= \frac{x}{4\pi\varepsilon_0(R^2+x^2)^{3/2}}\cdot\sum_i\Delta q_i \qquad ?$$

$$\vec{E}(x) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q\cdot x}{(R^2+x^2)^{3/2}}\cdot\vec{e}_x$$

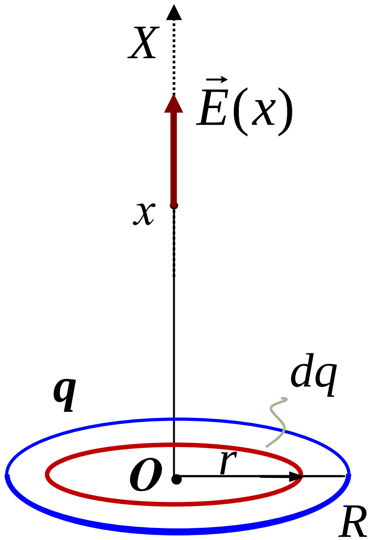


асимптотики ?

а) $x >> R \implies E \sim 1/x^2$

б) $x << R \implies E \sim x$

Пример – «диск» (Задача 6.4)



$$dE = \frac{x\,dq}{4\pi\varepsilon_0 (r^2 + x^2)^{3/2}}$$

Замечания:

1) Кольцо $\Delta q_i \xrightarrow{\dots}$ без интегралов

задача 6.4 (диск): $\rightarrow$ $E(x) = \int\limits_0^R \frac{2\pi r \sigma x}{4\pi\varepsilon_0 \left(r^2 + x^2\right)^{3/2}} dr$

$\Delta q_i \rightarrow dq, \; \Delta E_i \rightarrow dE$

2) **Поверхностная плотность заряда**

(Опр.)

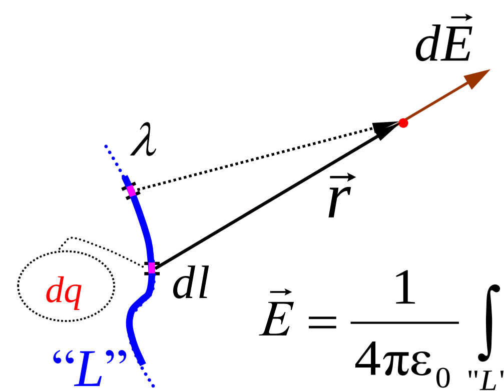
$$\boxed{\sigma = \frac{dq}{dS}}$$

3) **Линейная плотность заряда:**

(Опр.)

$$\boxed{\lambda = \frac{dq}{dl}}$$

Пример – «стержень/нить»



$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int\limits_{"L"} \frac{\lambda}{r^2} \frac{\vec{r}}{r} dl$$

(Опр.)

4) **Объёмная плотность заряда:**

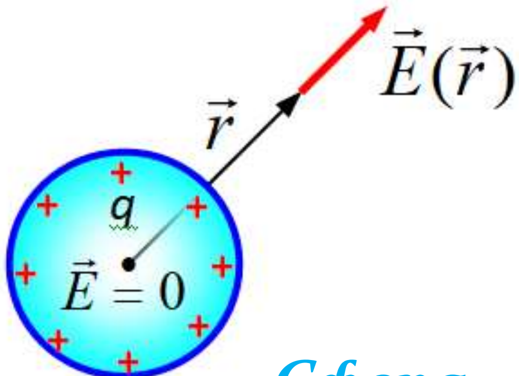
$$\boxed{\rho = \frac{dq}{dV}}$$

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int\limits_{"\Omega"} \frac{\rho}{r^2} \frac{\vec{r}}{r} dV$$

Пример – «шар» ??

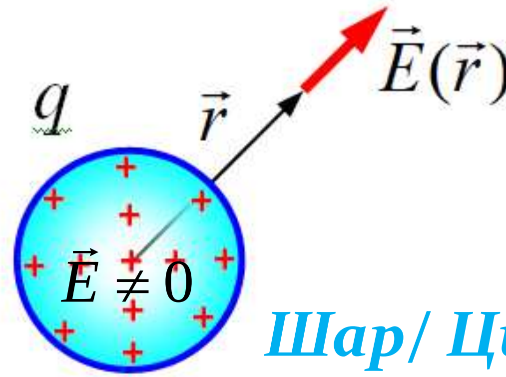
А такие тела?

“Задача Ньютона”



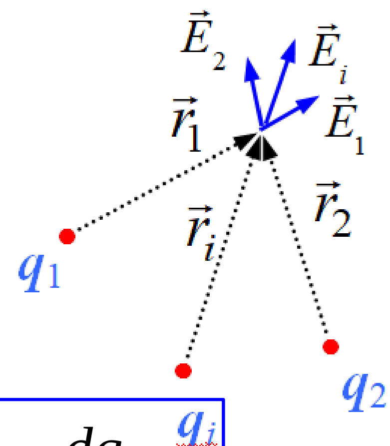
Сфера

или



Шар/ Цилиндр /...

Как искать $\vec{E}(\vec{r})$ *?*



???

Теорема Гаусса

(Опр.)

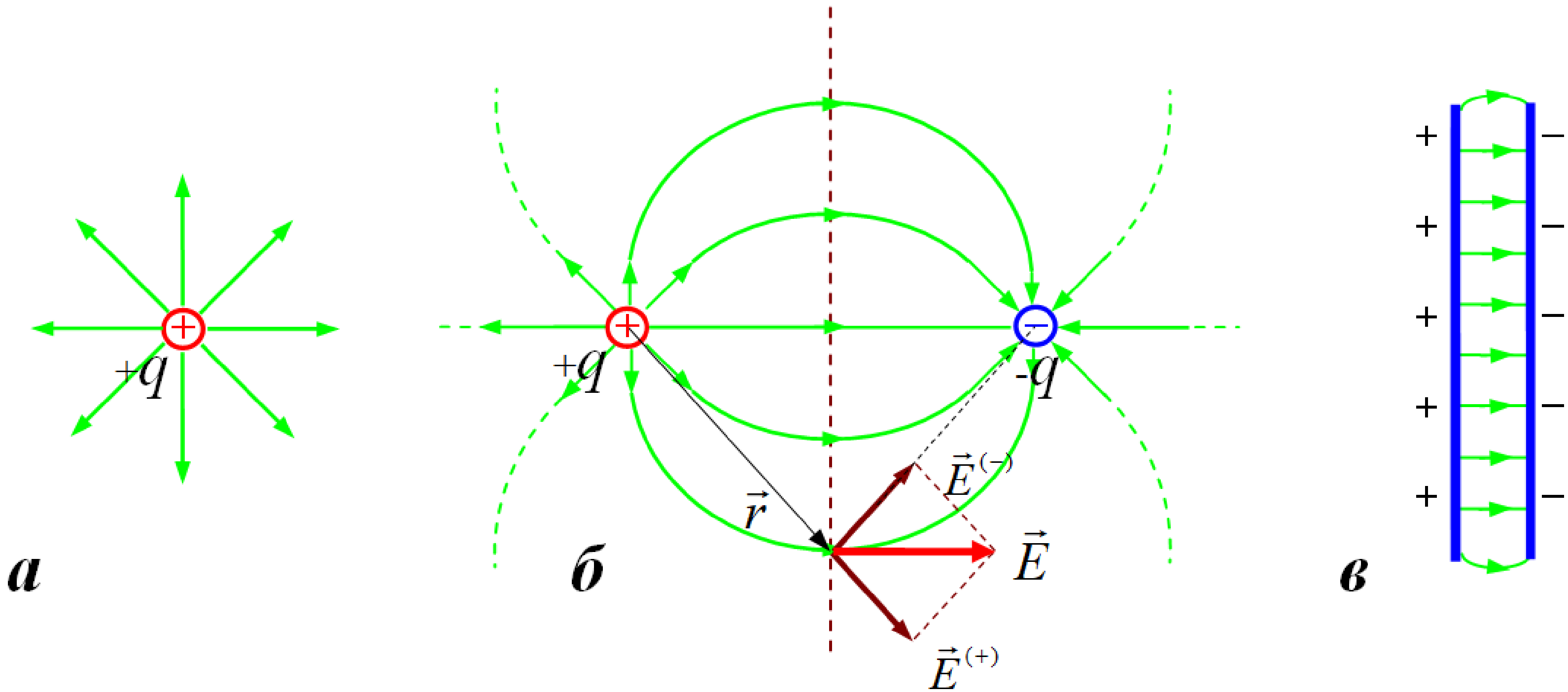
4) **Объёмная плотность заряда:**

$$\rho = \frac{dq}{dV}$$

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{"\Omega"} \frac{\rho}{r^2}\frac{\vec{r}}{r}dV$$

7.4. Линии напряжённости – “силовые линии”

(**Опр.**) *Линии, касательные к которым в каждой точке поля совпадают с направлением вектора напряжённости в данной точке, называются линиями напряжённости электрического поля*

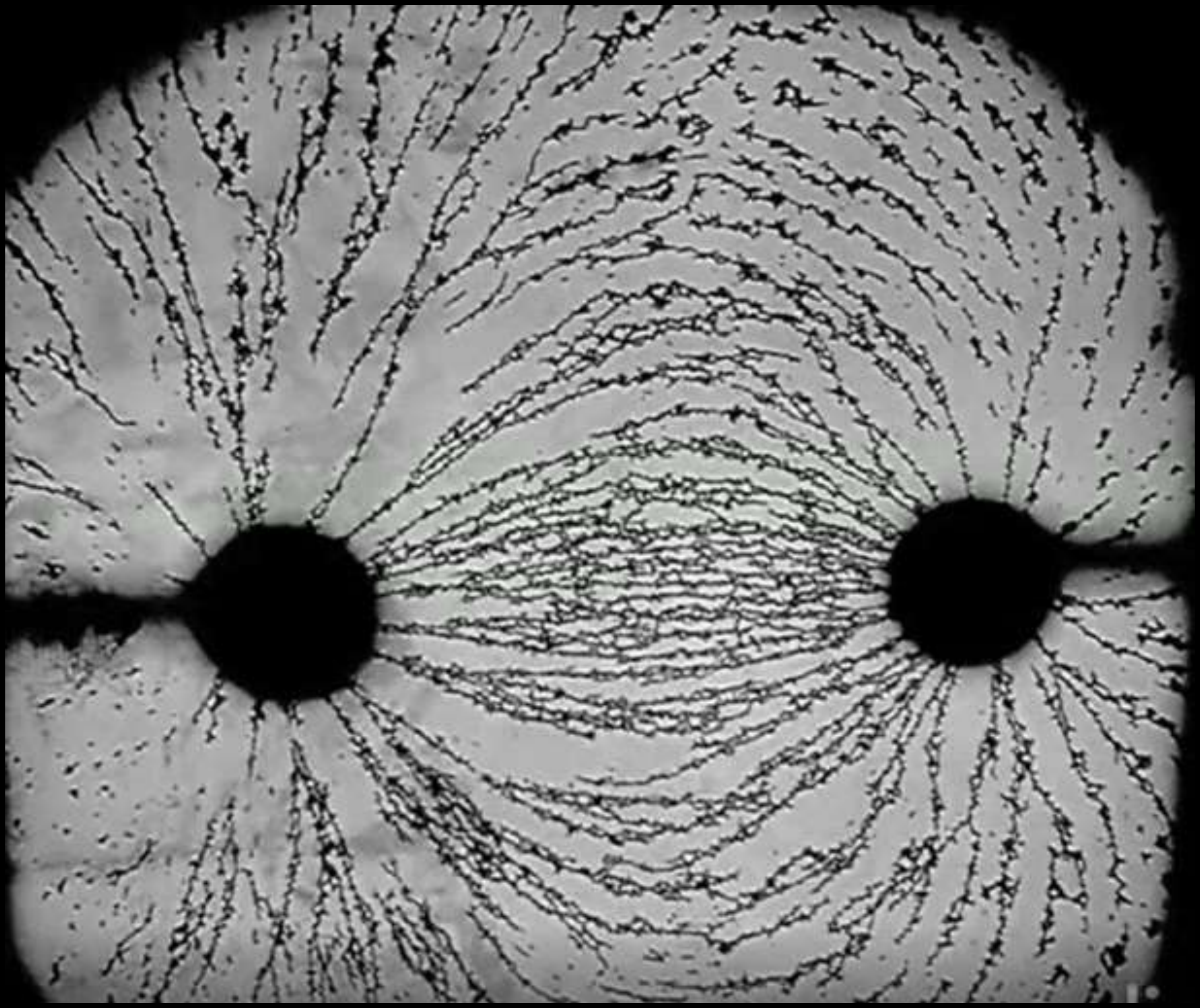


♣ ***Линии:***

1) Незамкнуты; 2) Не пересекаются;

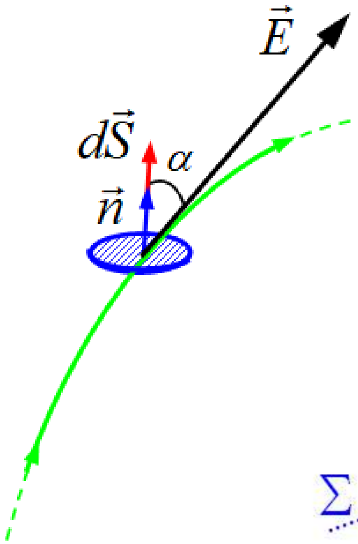
3) Густота пропорциональна E

Силовые линии



§ 8. Теорема Гаусса.

8.1. Поток вектора напряжённости

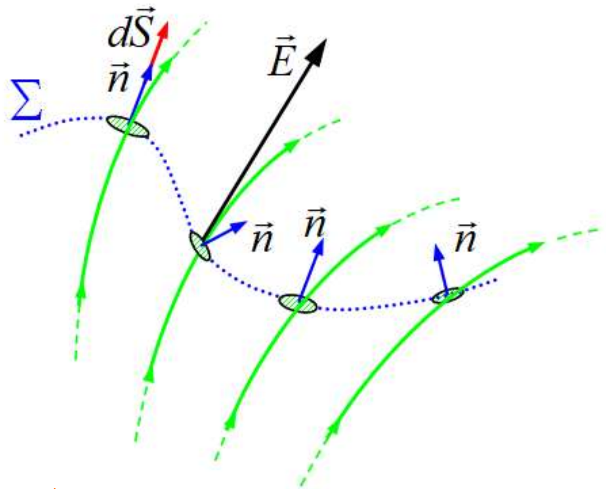


(**Опр.**) *Элементарный поток*: $d\Phi = (\vec{E}, d\vec{S})$

или: $E \cdot dS \cdot \cos\alpha = E_n \cdot dS$

… через "элемент поверхности"

А через всю поверхность ??



Сумма

Σ :

(**Опр.**) **Поток вектора напряжённости:** $\Phi = \int\limits_{"\Sigma"} (\vec{E}, d\vec{S})$

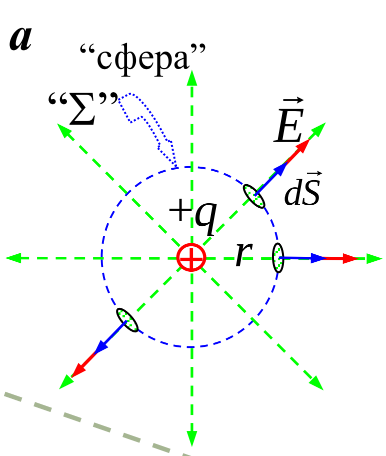
1) Скаляр; 2) имеет знак; ⟺ 3) выбор «+» нормали;

4) пропорциональна «числу силовых линий» ("+1"/"-1"); 5) $\Phi = \sum_i \Phi_i$

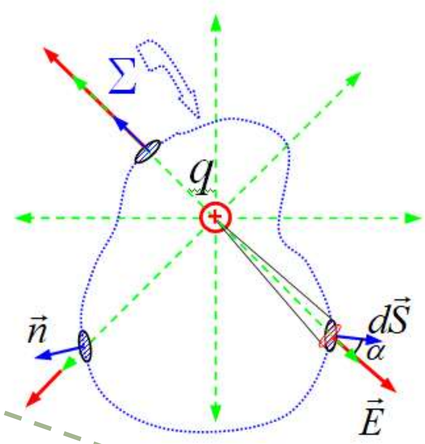
8.2. Теорема Гаусса (формулировка)

♣ *Поток вектора напряжённости электростатического поля в вакууме через любую замкнутую поверхность пропорционален суммарному заряду, расположенному внутри этой поверхности*:

$$\oint_{\Sigma}(\vec{E}, d\vec{S}) = \frac{1}{\varepsilon_0}\sum q$$



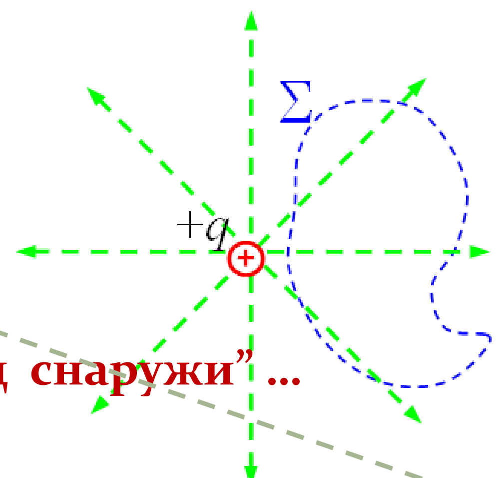
... “заряд в центре” ...



... “заряд внутри” ...

... заряженные тела ?

$$\int_{\Omega^*}\rho\, dV$$



... “заряд снаружи” ...

... “ много зарядов”

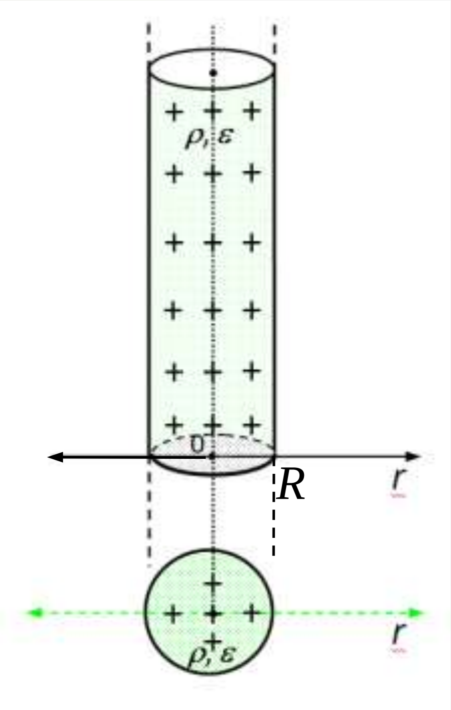
8.3. Применение теоремы для расчёта напряжённости электрического поля протяжённых заряженных тел

Пример. **(Задача 6.11)** Определить напряжённость электрического поля бесконечного цилиндрического стержня радиуса *R* *а*) снаружи и *б*) внутри этого стержня. Заряд распределён по стержню равномерно с объёмной плотностью ρ ; диэлектрическая проницаемость материала стержня равна ε.

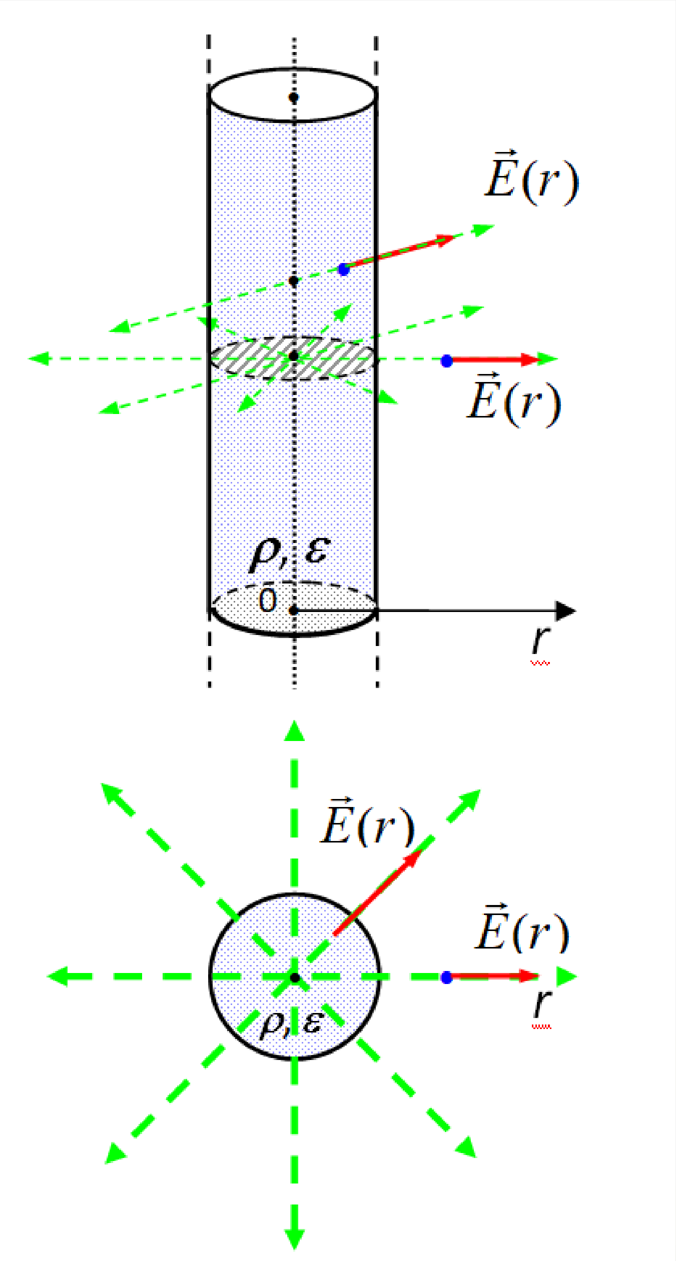
План

- 1. Сделать схематический рисунок
- 2. Проанализировать структуру поля
- 3. *выбрать замкнутую поверхность* Σ (поверхности) для применения теоремы Гаусса
- 4. *«рассчитать» поток вектора напряжённости через поверхность* Σ
- 5. *рассчитать заряд, оказавшийся охваченным замкнутой поверхностью* Σ
- 6. *записать равенство, соответствующее утверждению теоремы Гаусса*

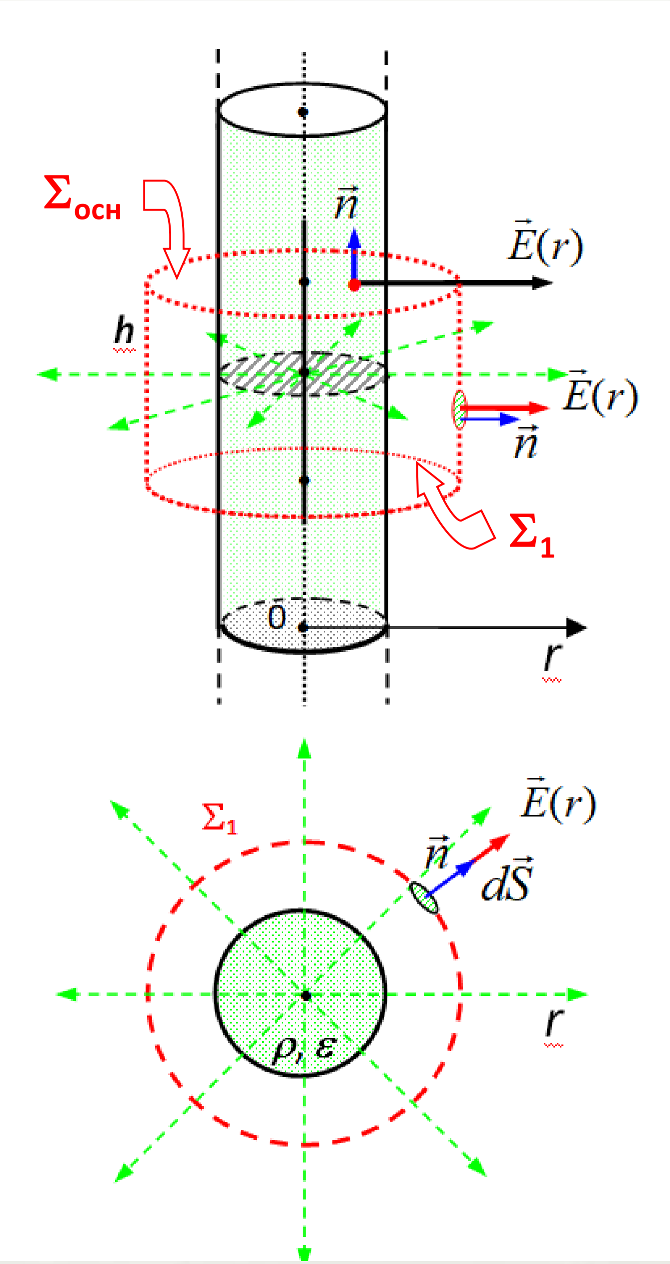
1. Рисунок !



2. “Структура поля”



3. Выбор поверхности



4. “Посчитать” поток:

$$\oint\limits_{\Sigma_{1,2}}(\vec{E},d\vec{S})=\int\limits_{\Sigma_{осн.}}(\vec{E},d\vec{S})+\int\limits_{\Sigma_{бок.}}(\vec{E},d\vec{S})=\int\limits_{\Sigma_{осн.}}\{E\cdot dS\cdot\cos(90^\circ)\}+$$

$$+\int\limits_{\Sigma_{бок.}}\{E(r)\cdot dS\cos(0^\circ)\}=E(r)\cdot\int\limits_{\Sigma_{бок.}}dS=E(r)\cdot S_{бок.}=\underline{\underline{E(r)\cdot 2\pi r\cdot h}}$$

5. “Посчитать” заряд внутри:

$$\sum q=\begin{cases}\rho\cdot\pi R^2\cdot h, & r>R, \quad \text{“вне”}\ (\Sigma_1)\\ \rho\cdot\pi r^2\cdot h, & r\le R \quad \text{“внутри”}\ (\Sigma_2)\end{cases}$$

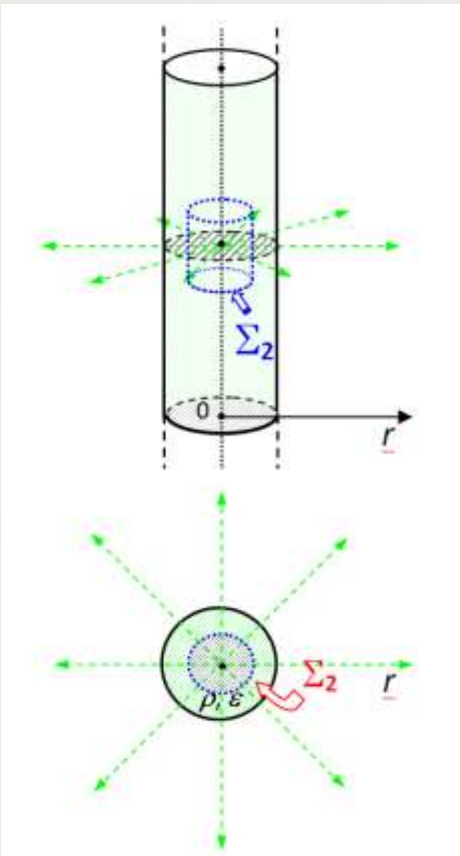
6. “Применить” … :

$$E^{(вне)}(r)\cdot\cancel{2\pi}r\cdot\cancel{h}=\frac{1}{\varepsilon_0}\cdot\rho\cdot\cancel{\pi}R^2\cdot\cancel{h}$$

1) Поле “вне”: $E^{(вне)}(r)=\dfrac{\rho R^2}{2\varepsilon_0}\cdot\dfrac{1}{r}$ ⇐ “вне” $(r>R)$

2) Поле "внутри": Σ_2 :

5. "Посчитать" заряд внутри:



$$\sum q = \begin{cases} \rho\cdot\pi R^2\cdot h, & r > R, \text{ "вне" } (\Sigma_1) \\ \rho\cdot\pi r^2\cdot h, & r \le R, \text{ "внутри" } (\Sigma_2) \end{cases}$$

6. "Применить" … :

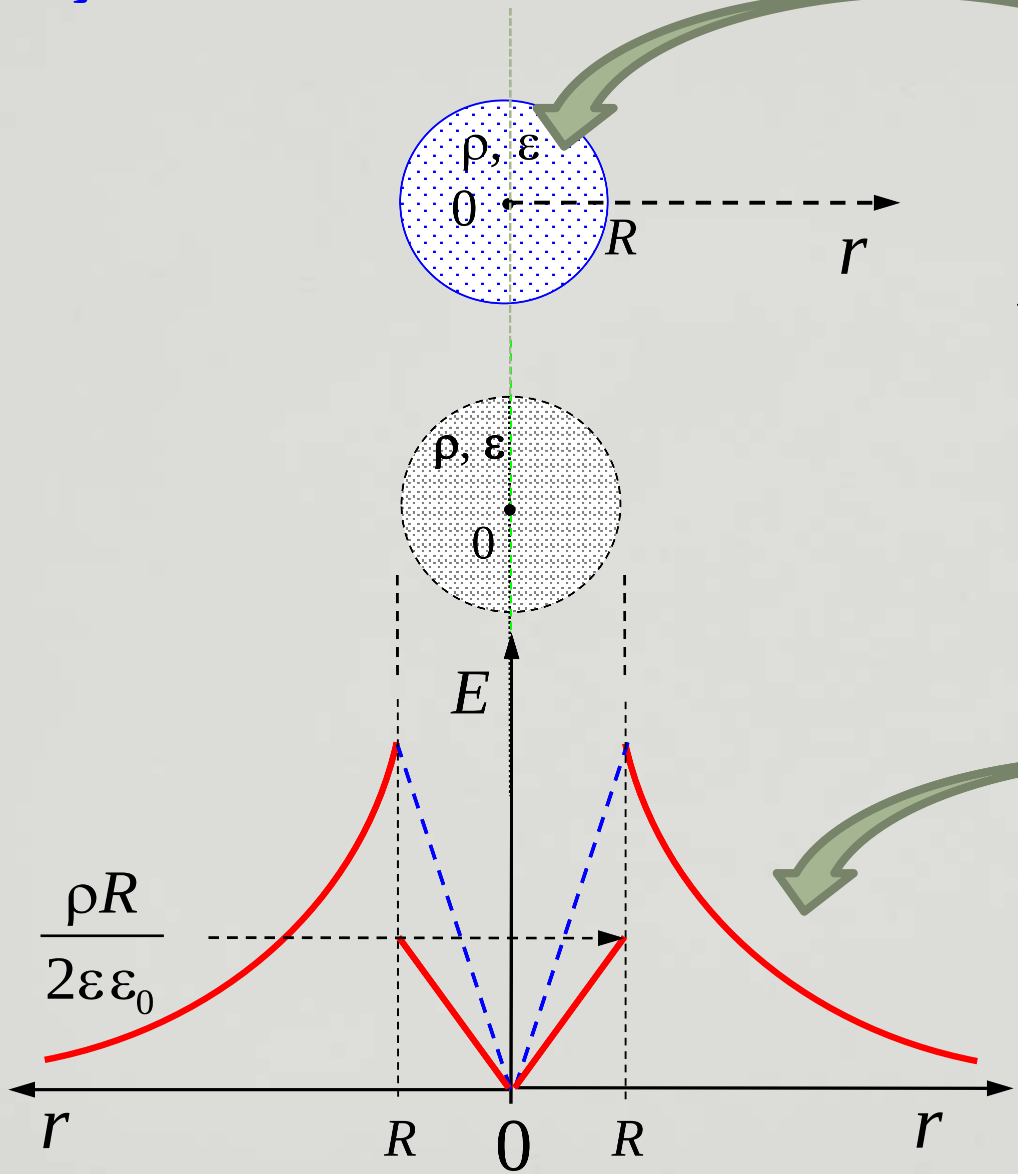
$$E^{(вне)}(r)\cdot 2\cancel{\pi} r\cdot\cancel{h} = \frac{1}{\varepsilon_0}\cdot\rho\cdot\cancel{\pi} r^2\cdot\cancel{h}$$

2) Поле "внутри":

$$E^{(внутри)}(r) = \frac{\rho}{2\,\varepsilon\,\varepsilon_0}\cdot r$$

"внутри" $(r \le R)$

Результаты :

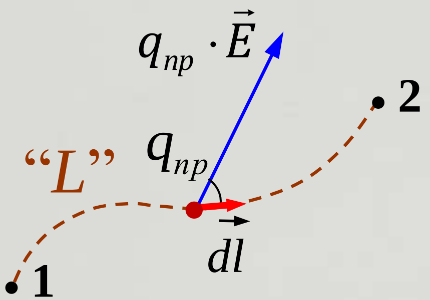


$$E^{(внутри)}(r) = \frac{\rho}{2\,\varepsilon\,\varepsilon_0}\cdot r$$

$$E^{(вне)}(r) = \frac{\rho R^2}{2\varepsilon_0}\cdot\frac{1}{r}$$

§ 9. Работа в электростатическом поле

9.1. Разность потенциалов. Потенциал



$$A_{12}^{поля} \leftarrow не\ зависит\ от\ "L"$$

!!

Характеристика поля

$$Но \quad A \sim q$$

(Опр.) Разность потенциалов:

$$\varphi_1-\varphi_2=\frac{A_{12}^{поля}}{q_{пр}}$$

$$1\frac{Дж}{Кл}=$$

"1 Вольт"

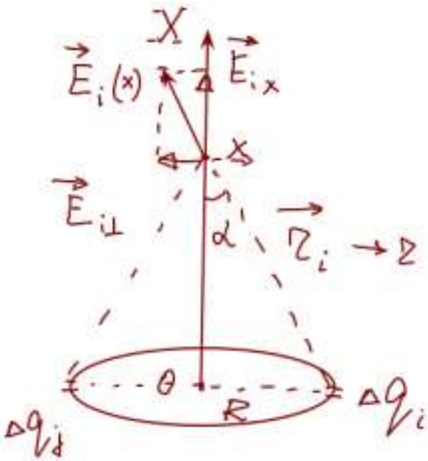
$$A_{12}^{поля}=\quad q\cdot(\varphi_1-\varphi_2)$$

Связь разности потенциалов и напряжённости:

$$A_{1\to 2}^{поля}=\underset{\substack{по\ любой\\траектории}}{\int\limits_{(1)}^{(2)}}(\vec{F},d\vec{l}\,)=q_{пр}\cdot\int\limits_{(1)}^{(2)}(\vec{E},d\vec{l}\,) \quad\Rightarrow\quad \varphi_1-\varphi_2=\frac{A_{1\to 2}^{поля}}{q_{пр}}=\int\limits_{(1)}^{(2)}E_l\,dl$$

$$\varphi_1-\varphi_2=\underset{\substack{по\ любой\\траектории}}{\int\limits_{(1)}^{(2)}}(\vec{E},d\vec{l}\,)$$

Доска 1

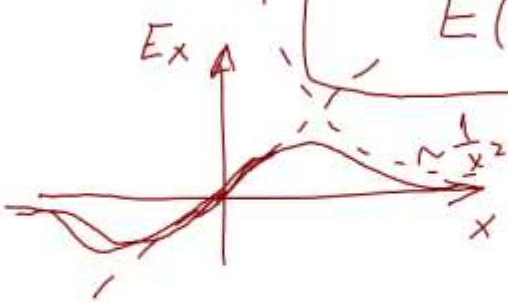


$$\vec E_i(x) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{\Delta q_i}{(R^2+x^2)}\cdot\frac{\vec r_i}{r}$$

$$\vec E = \sum_i \vec E_i = \underline{\underline{\sum_i \vec E_{ix}}} + \underbrace{\cancel{\sum_i \vec E_{i\perp}}}_{0} = \left(\sum_i E_i\cdot\cos\alpha\right)\cdot\vec e_x =$$

$$= \sum_i \left\{\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{\Delta q_i}{(R^2+x^2)}\cdot\frac{x}{\sqrt{R^2+x^2}}\right\}\vec e_x = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{x}{(R^2+x^2)^{3/2}}\cdot\overbrace{\sum_i \Delta q_i}^{q}\cdot\vec e_x$$

$$\boxed{\vec E(x) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{q\cdot x}{(R^2+x^2)^{3/2}}\cdot\vec e_x}$$



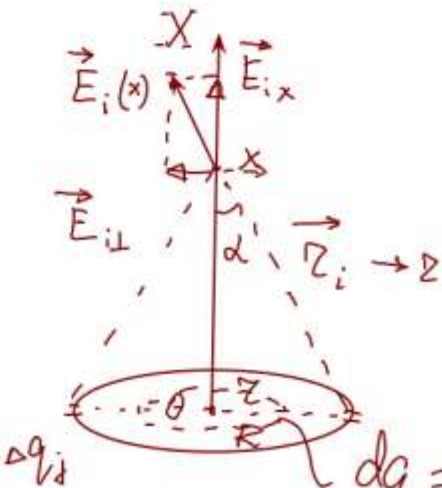
а). $\underline{x >> R}$

$$E_x(x) \sim \frac{x}{(R^2+x^2)^{3/2}} \quad \left(\sim \frac{1}{x^2}\right)$$

б). $x << R$

$$\sim x$$

Доска 2

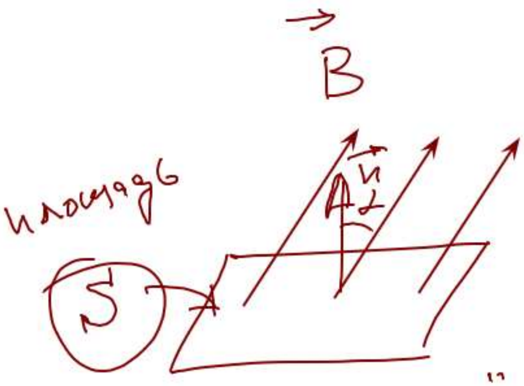


$$E(x) = \int \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{dq}{(r^2+x^2)^{3/2}} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int \frac{\sigma \cdot 2\pi r\, dr}{(r^2+x^2)} = \ldots$$

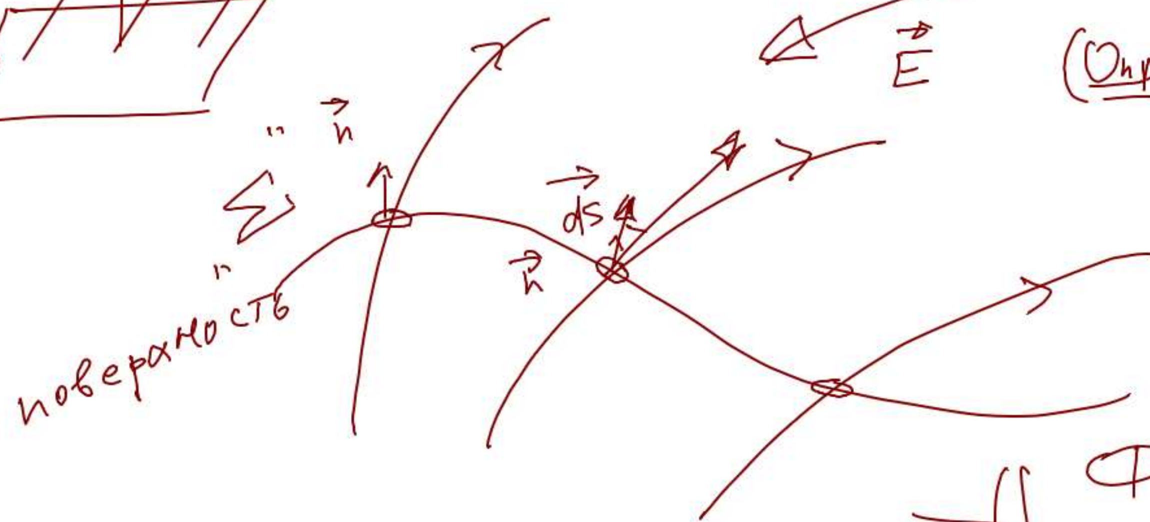
$$dq = \sigma \cdot \underline{\underline{ds}} = \sigma \cdot 2\pi r \cdot dr$$

$\underline{\underline{\text{Опр.}}}$ $\sigma = \dfrac{dq}{ds}$; $\dfrac{\text{Кл}}{\text{м}^2}$

Доска 3



„Опр." $\Phi = B \cdot S \cdot \cos\alpha$



(Опр)

$$d\Phi = E \cdot dS \cdot \cos\alpha$$

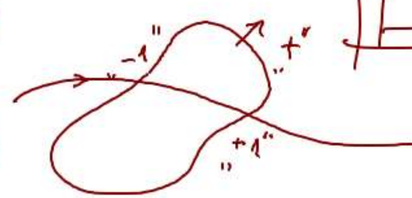
$$d\Phi = (\vec{E}, \vec{dS})$$

$$d\Phi = E_n \cdot dS$$

$$\Phi = \int\limits_{„\Sigma"} (\vec{E}, \vec{dS})$$

1). скалярная

2). $+ / -$;



3). $\Phi = \sum_i \Phi_i$