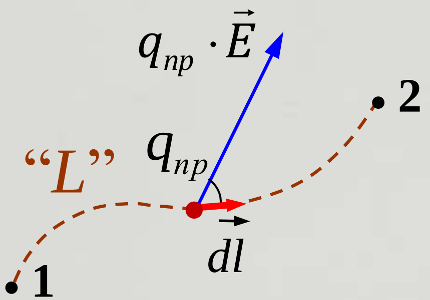
Лекция 9. *Работа в электрическом поле. Потенциал и напряжённость*

§ 9. Работа в электростатическом поле

9.1. Разность потенциалов. Потенциал



$$A_{12}^{поля} \leftarrow \textit{не зависит от "L"}$$

!!

Характеристика поля

$$Но \quad A \sim q$$

➧ (**<u>Опр</u>.**) **Разность потенциалов:**

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \frac{A_{12}^{поля}}{q_{пр}} \qquad \frac{Дж}{Кл} =$$

"Вольт"

$$A_{12}^{поля} = q \cdot (\varphi_1 - \varphi_2)$$

Связь разности потенциалов и напряжённости:

$$A_{1\to2}^{поля} = \underset{\substack{(1)\\ \textit{по любой}\\ \textit{траектории}}}{\int^{(2)}} (\vec{F}, d\vec{l}\,) = q_{пр} \cdot \int_{(1)}^{(2)} (\vec{E}, d\vec{l}\,) \quad \Rightarrow \quad \varphi_1 - \varphi_2 = \frac{A_{1\to2}^{поля}}{q_{пр}} = \int_{(1)}^{(2)} E_l \, dl$$

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \underset{\substack{(1)\\ \textit{по любой}\\ \textit{траектории}}}{\int^{(2)}} (\vec{E}, d\vec{l}\,)$$

*) *Rem (Механика)*: **5.9. Потенциальная энергия**

"Запас работы" за счёт взаимодействия тел системы

Только для консервативных сил !!!

$$U = f(x, y, z); \quad (x, y, z) \equiv \{x_1, y_1, z_1, \dots, x_i, y_i, z_i, \dots, x_n, y_n, z_n\}$$

"конфигурация"

$$U(x, y, z): \qquad A_{12}^{(\kappa)} = U_1 - U_2 = -\Delta U$$

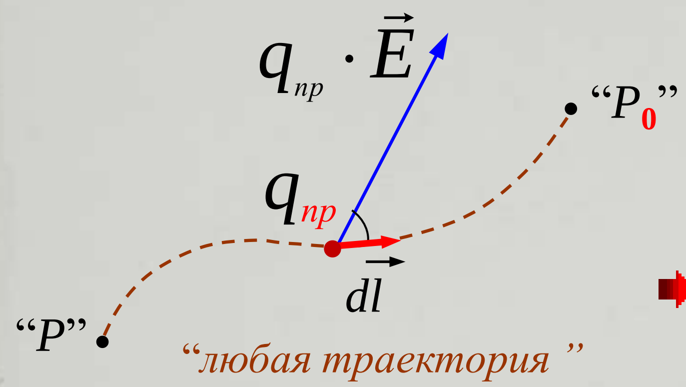
$$A_{12}^{(сист.)} > 0, \quad \text{если} \quad U \quad \text{убывает!}$$

А как узнать $U(x, y, z)$: **?**

1) «Нормировка» - договор: $U(''P_0'') = 0$

2) Как искать: $U(''P'') = A_{P \to P_0}^{(сист.)};$

Потенциал



1) $\varphi(P_0) = 0\,;$

2)

(**Опр.**) **Потенциал:**

$$\boxed{\varphi(P) = \frac{A^{поля}_{P \to P_0}}{q_{пр}}}$$

А как же потенциальная энергия **?**

$$\varphi(x, y, z) = \frac{U(x, y, z)}{q_{пр}}$$

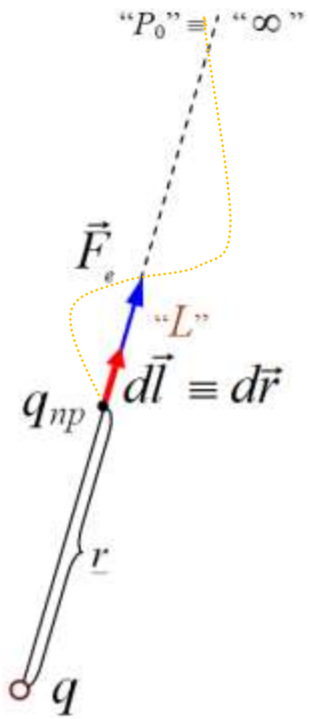
$$U(x, y, z) = q \cdot \varphi(x, y, z)$$

Потенциальная энергия точечного заряда в данной точке поля

9.2. Потенциал поля точечного заряда

1) Нормировка: $\varphi(\infty) = 0\,;$

2) Выбор траектории



3) Расчёт: $\varphi_P = \int\limits_{(P)}^{(P_0)} E_l\, dl = \int\limits_{r}^{\infty} E_r\, dr =$

по любой траектории

$$= \int\limits_{r}^{\infty} \underbrace{\left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}\right)}_{E_r} dr = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\int\limits_{r}^{\infty}\left(\frac{1}{r^2}\right)dr = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(-\frac{1}{r}\right)\Bigg|_r^{\infty} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \varphi_{\text{т.з.}}(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r}$$

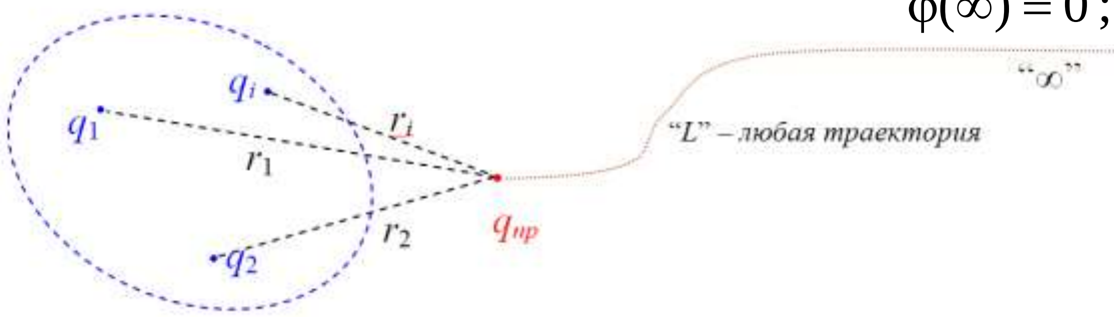
Принцип суперпозиции для потенциалов **??**

9.3. Расчёт потенциала в поле системы зарядов – принцип суперпозиции для потенциалов

Много зарядов

Нормировка

$$\varphi(\infty) = 0\,;$$



$$A^{поля}_{P \to P_0} = \sum_{i=1}^{N} A_i$$

$$\begin{cases} \varphi_1 = \dfrac{\left(A_{P \to P_0}\right)_1}{q_{пр}}\,; \\ \ldots \\ \varphi_i = \dfrac{\left(A_{P \to P_0}\right)_i}{q_{пр}}\,; \\ \ldots \\ \varphi_N = \dfrac{\left(A_{P \to P_0}\right)_N}{q_{пр}} \end{cases}$$

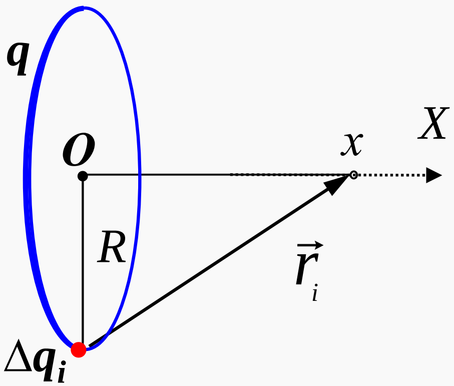
$$\varphi = \frac{A^{поля}_{P \to P_0}}{q_{пр}} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{N} A_i}{q_{пр}} = \frac{q_{пр} \cdot \sum\limits_{i=1}^{N} \varphi_i}{q_{пр}} = \sum_{i=1}^{N} \varphi_i$$

$$\varphi = \sum_{i=1}^{N} \varphi_i$$

Как считать на практике ?

Применение принципа суперпозиции для расчёта потенциала электрического поля протяжённых заряженных тел

Пример: «Кольцо» (Задача 7.2) Определить потенциал электрического поля, созданного равномерно заряженным тонким кольцом на оси, проходящей через центр кольца перпендикулярно плоскости, в которой лежит кольцо. Радиус кольца R, его заряд q.



$$\varphi = \sum_{i=1}^{N} \varphi_i = \sum_{i=1}^{N} \left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{\Delta q_i}{r_i} \right) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \sum_{i=1}^{N} \left(\frac{\Delta q_i}{\sqrt{R^2 + x^2}} \right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \varphi(x) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q}{\sqrt{R^2 + x^2}}$$

А можно ли, зная φ(*x*,*y*,*z*), найти $\vec{E}(x, y, z)$ **??**

Ещё вернёмся к этому вопросу ! (“Обратная задача”)

9.4. Связь напряжённости и потенциала
(прямая и обратная задачи)

а) $\vec{E}(x,y,z) \Rightarrow \varphi(x,y,z)$; *("Прямая задача")*

б) $\varphi(x,y,z) \Rightarrow \vec{E}(x,y,z)$ *("Обратная задача")*

9.4.1. "обратная":

Можно ли, зная *φ(x,y,z)*, найти $\vec{E}(x,y,z)$ **??**

$$\begin{cases} dA = q_{пр} \cdot E_l \cdot dl; \\ dA = -q_{пр} \cdot d\varphi. \end{cases} \Leftarrow$$

(Определение элементарной работы)

(Определение разности потенциалов)

$$E_l = -\frac{d\varphi}{dl}$$

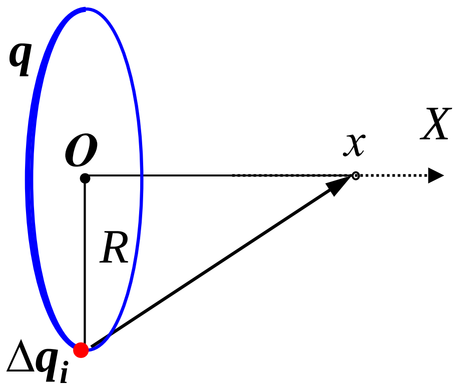
Например, $E_x = -\dfrac{d\varphi}{dx}$

$$\vec{E} = -\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\vec{e}_x + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\vec{e}_y + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\vec{e}_z\right)$$

или

$$\vec{E} = -\operatorname{grad}\varphi$$

Пример: «Кольцо»

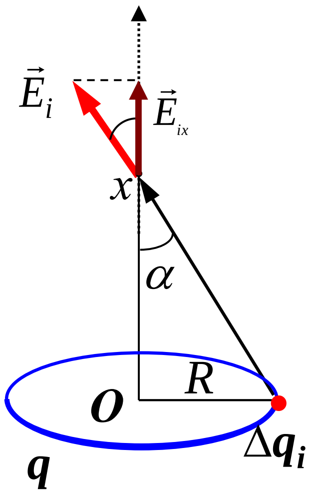


Уже “посчитали” φ(x):

$$\varphi(x) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{\sqrt{R^2 + x^2}}$$

$$E_x = -\frac{\partial\varphi}{\partial x} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q\cdot x}{\left(R^2 + x^2\right)^{3/2}};$$

Вместо:



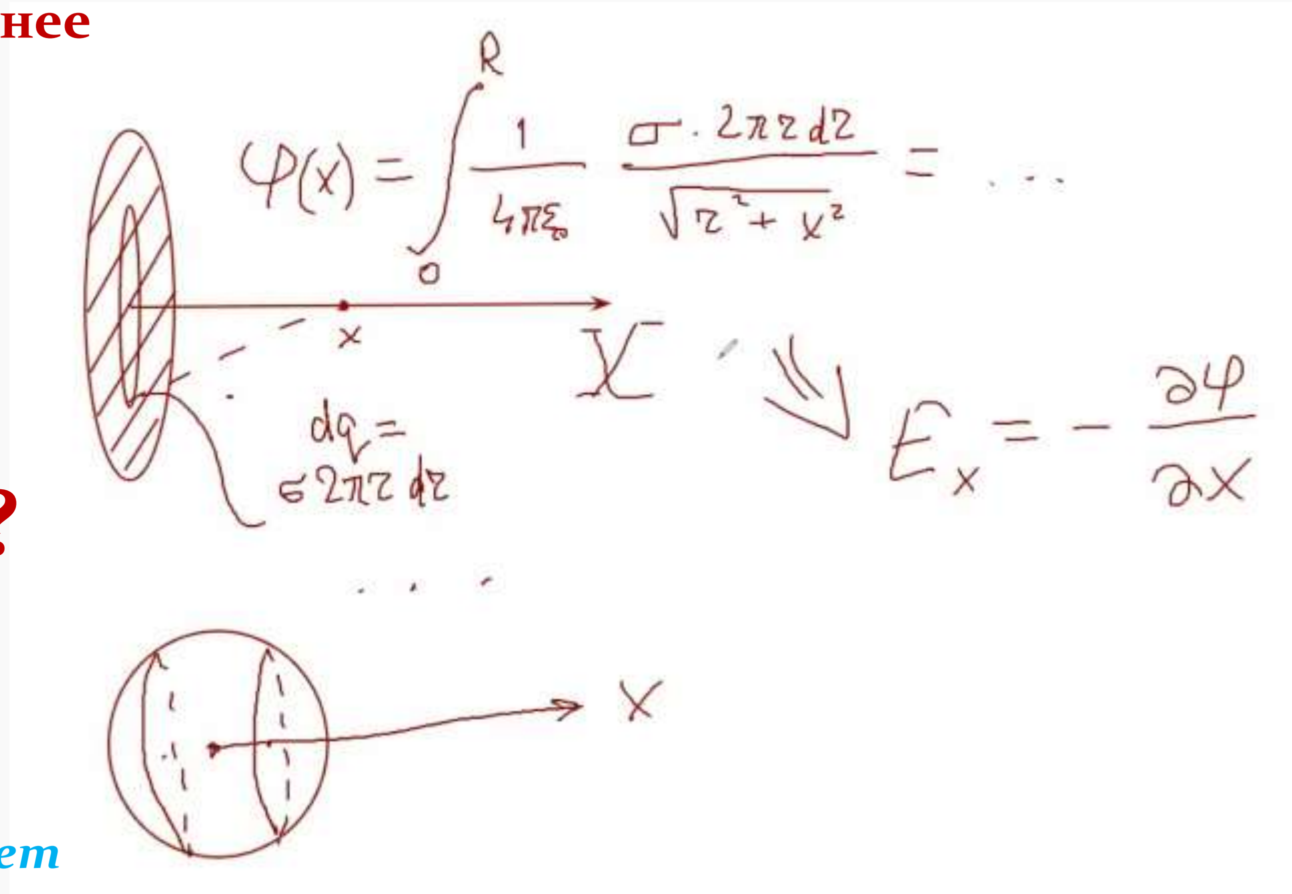
$$\vec{E}(x) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q\cdot x}{\left(R^2 + x^2\right)^{3/2}}\cdot\vec{e}_x$$

Уже знаем. Но … !

Применение принципа суперпозиции для расчёта потенциала электрического поля протяжённых заряженных тел

А можно посложнее

??



А ещё сложнее ?

Можно-то можно

… ,

да не всегда имеет смысл ☺

Проще, решив “прямую задачу”):

$$\vec{E}(x, y, z) \Rightarrow \varphi(x, y, z);$$

а) Вернёмся к "прямой задаче":

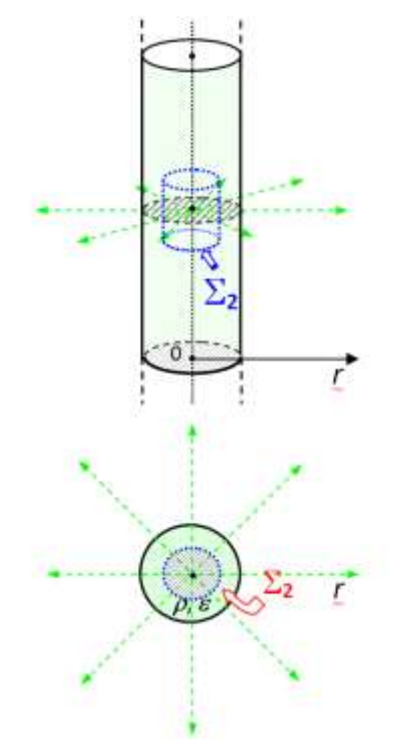
Как, зная, $\vec{E}(x,y,z)$ **найти** $\varphi(x,y,z)$ **??**

«Рецепт» есть: 1) Нормировка + 2) расчёт $\varphi_P = \int_{(P)}^{(P_0)} (\vec{E}, d\vec{l})$

по любой траектории!

Пока только для т.з. мы её решили: $\varphi_{\text{т.з.}}(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r}$

А посложнее ??



Пример «Стержень»:

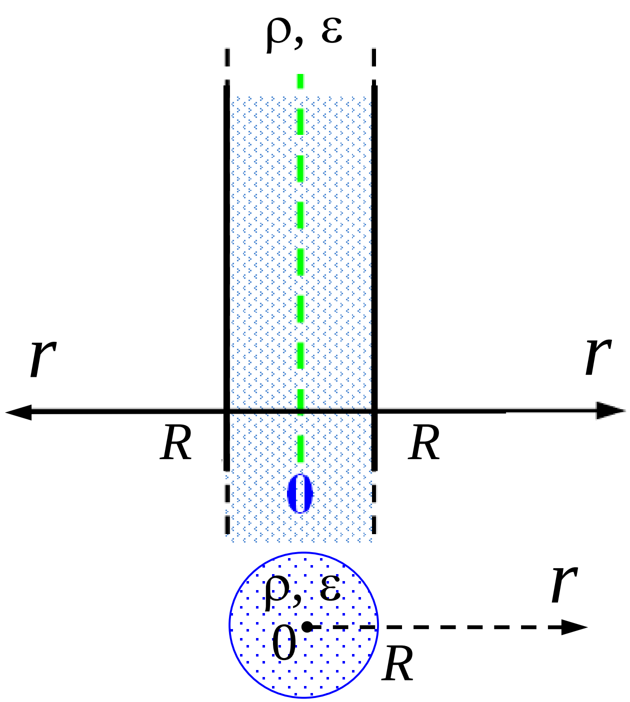
1) Поле "вне": $E^{(\text{вне})}(r) = \frac{\rho R^2}{2\varepsilon_0}\cdot\frac{1}{r}$, $(r > R)$

2) Поле "внутри": $E^{(\text{внутри})}(r) = \frac{\rho}{2\varepsilon\varepsilon_0}\cdot r$, $(r \le R)$

С него и начнём …

Пример. Бесконечный цилиндрический стержень радиуса R заряжен равномерно с объёмной плотностью ρ; диэлектрическая проницаемость материала стержня равна ε. Найти $\varphi(r)$: *а*) внутри и *б*) вне этого стержня. * ("ключ" к задачам: 7.4; 7.10 – 7.12; 7.14,б; 7.17)

1. Рисунок !

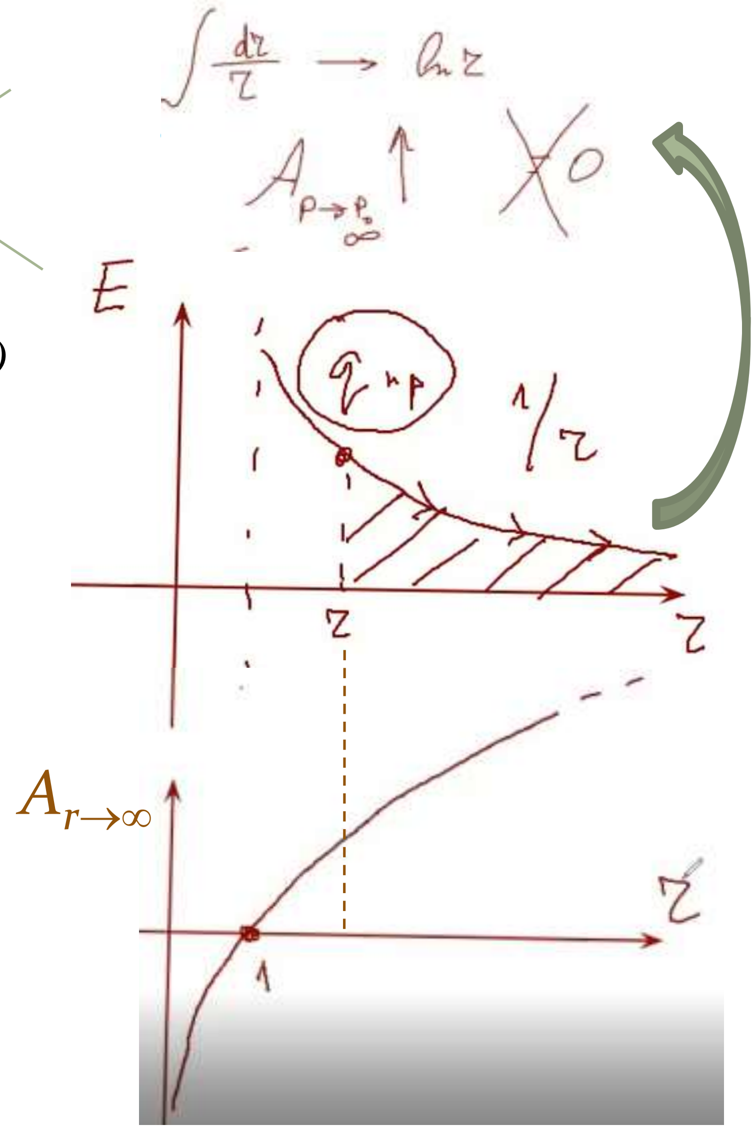


2. Нормировка !

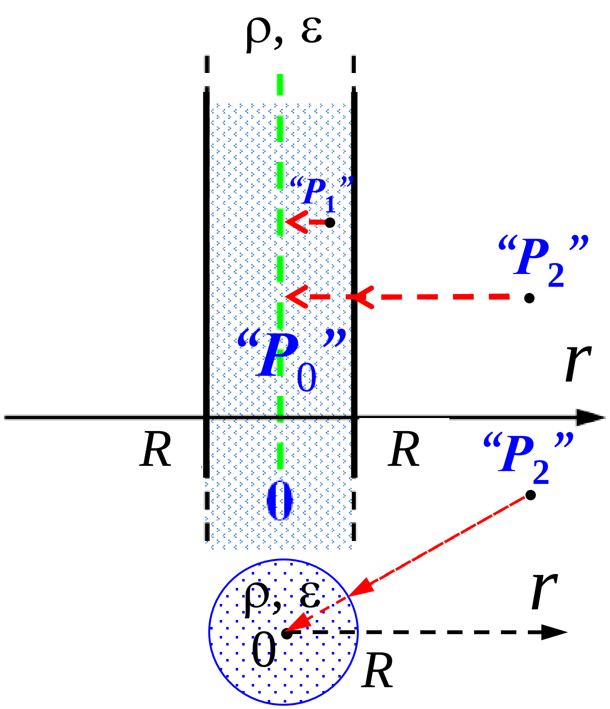
$$\cancel{\varphi(\infty) = 0}$$

? Нет! ***(графики)***

$$E^{(вне)}(r) = \frac{\rho R^2}{2\varepsilon_0}\cdot\frac{1}{r},$$



3. Выбор траектории



$$\varphi_P = \int_{(P)}^{(P_0)} (\vec{E}, d\vec{l})$$

траектория – любая **??**

а) “P_1” – внутри $(\,r \le R\,)$:

$$\varphi_P = \int_{(P_1)}^{(P_0)} (\vec{E}, d\vec{l}) = \int_r^0 E(r)dr = \int_r^0 \frac{\rho \cdot r}{2\varepsilon\varepsilon_0} dr = \left.\frac{\rho \cdot r^2}{4\varepsilon\varepsilon_0}\right|_r^0 \Rightarrow$$

$(r \le R)$

$$\varphi(r)^{(\text{внутри})} = -\frac{\rho}{4\varepsilon\varepsilon_0} r^2$$

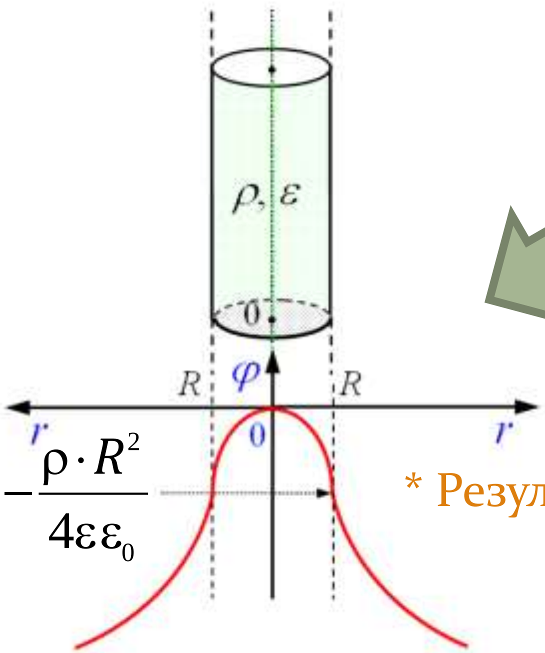
б) “P_2” вне ($r > R$) :

*(вот тут посложнее будет ☺)

$$\varphi_P = \int_{(P_2)}^{(P_0)} (\vec{E}, d\vec{l}\,) = \int_r^R \frac{\rho \cdot R^2}{2\varepsilon_0 r} dr + \int_R^0 \frac{\rho \cdot r}{2\varepsilon\varepsilon_0} dr = \frac{\rho R^2}{2\varepsilon_0} \ln r \Big|_r^R + \frac{\rho \cdot r^2}{4\varepsilon\varepsilon_0}\Big|_R^0 \Rightarrow$$

($r > R$)

$$\varphi(r) = -\frac{\rho R^2}{2\varepsilon_0} \ln\frac{r}{R} - \frac{\rho \cdot R^2}{4\varepsilon\varepsilon_0}$$



$$\varphi(R) = -\frac{\rho \cdot R^2}{4\varepsilon\varepsilon_0}$$

Вот, “как это работает”, и вот, что мы получили!

* Результаты “сшиваются”: нет «скачков» потенциала!

9.5. Энергия взаимодействия системы зарядов

Мы знаем:

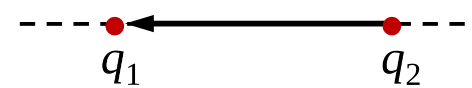
$$\varphi(x,y,z)=\frac{U(x,y,z)}{q_{пр}}$$

"Источник поля"

Энергия т.з. в электрическом поле: $U=q\cdot\varphi(x,y,z)$

а) Два заряда:

$$U_{21}=q_2\cdot\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{q_1}{r}$$



А можно наоборот? Вот так:

$$(U_{21}\equiv W_{21})$$

$$U_{12}=q_1\cdot\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{q_2}{r}$$

"Источник поля"

Результат один:

$$W_{12}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{q_1q_2}{r}$$

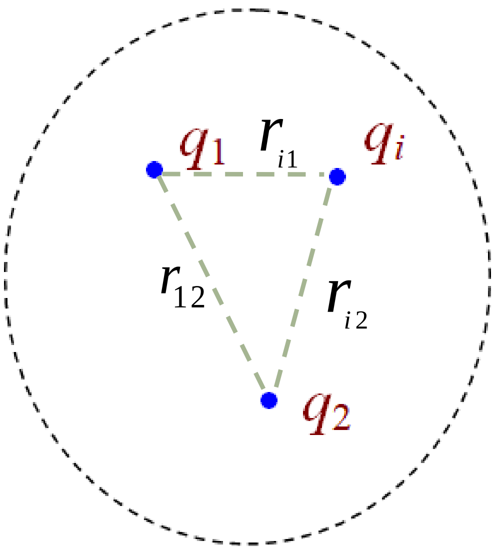
или

$$W_{12}=\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{q_1q_2}{r}+\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{q_2q_1}{r}\right\}$$

А зачем так сложно ??

Вот зачем :
(а если "зарядов много"?)

б) Система состоит из N зарядов:



$$W_э = \frac{1}{2}\sum_{i\neq j}^{N}\left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{q_i q_j}{r_{ij}}\right)$$

Это энергия электрического взаимодействия **системы** заряженных частиц и тел

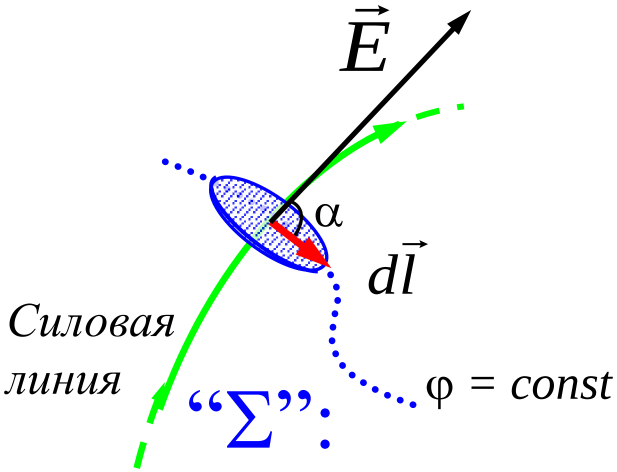
!!

энергия эклектического поля

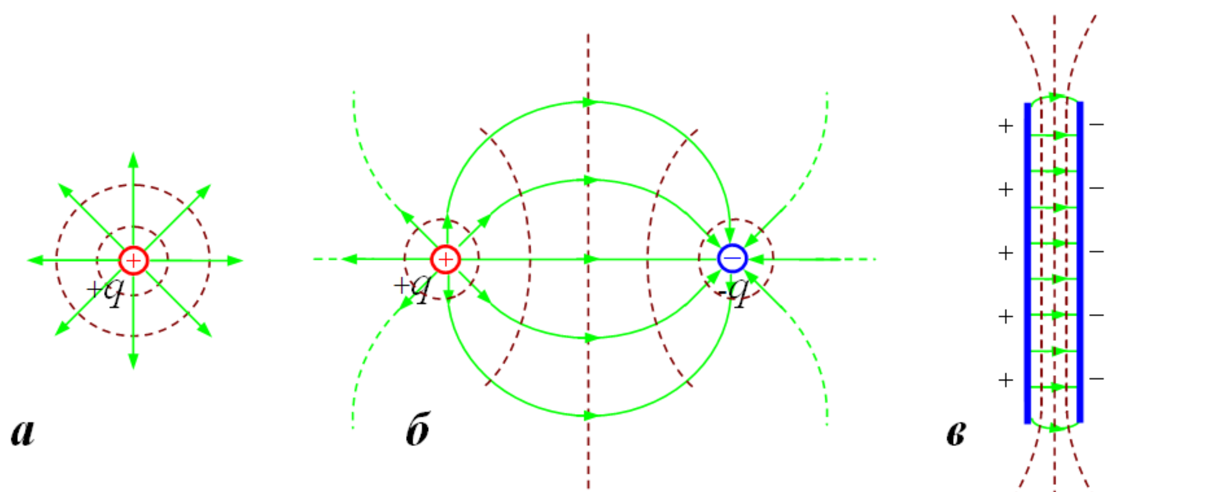
9.6. Заключительные замечания к §9

φ - *зачем?*

1. *скалярная!;*
2. *легко измерять;*
3. *Эквипотенциальные поверхности – поверхности* $\varphi = const$:



Примеры:



“Аванс про Электроёмкость”

?? **– характеризует способность копить заряд:**

(**Опр.**) Электроёмкостью конденсатора называется отношение модуля заряда каждой из его обкладок к разности потенциалов между ними

V, л?

$$C = \frac{q}{\varphi_1 - \varphi_2}$$

$$\frac{\ldots Кл}{1\,B} = \ldots Ф$$

“Фарада”

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \int_{(1)}^{(2)} (\vec{E}, d\vec{l})$$

Нет зависимости от окружающих тел **!!**

$$\int_{(1)}^{(2)} (\vec{E}, d\vec{l}) \sim$$ **заряд на обкладках (q)**

$$\frac{1}{C}$$

- 1. *Размеры;*
- 2. *форма;*
- 3. *расстояние между обкладками;*

А ещё ??

- 4. *диэлектрическая проницаемость (ε)*