Лекция 6. Резонансные явления в цепях переменного тока. Упругие волны



2.7. Общий случай. Участок с элементами *R, L, C*

$$P(t) = U_0\cos(\Omega t)\cdot I_0\cos(\Omega t - \psi) \Rightarrow P(t) = \frac{1}{2}U_0 \cdot I_0 \cdot [\cos\psi + \cos(2\Omega t - \psi)]$$

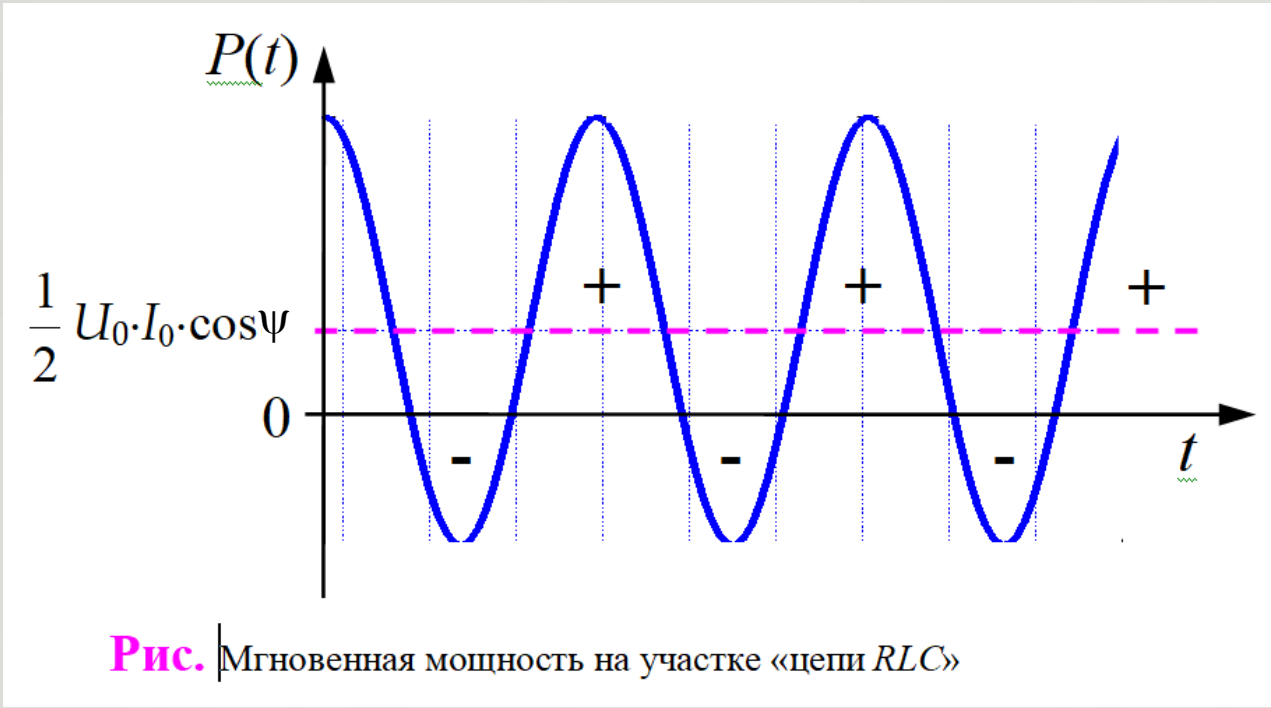


Рис. Мгновенная мощность на участке «цепи *RLC*»

$$\langle P\rangle = \frac{1}{2}U_0 \cdot I_0 \cdot \cos\psi$$

$$\langle P\rangle = I_\partial \cdot U_\partial \cdot \cos\psi$$

♣ Замечания

$\cos\psi$ – «***коэффициент мощности***»

1) $\psi = \pm\frac{\pi}{2}, \quad \langle P\rangle = 0$

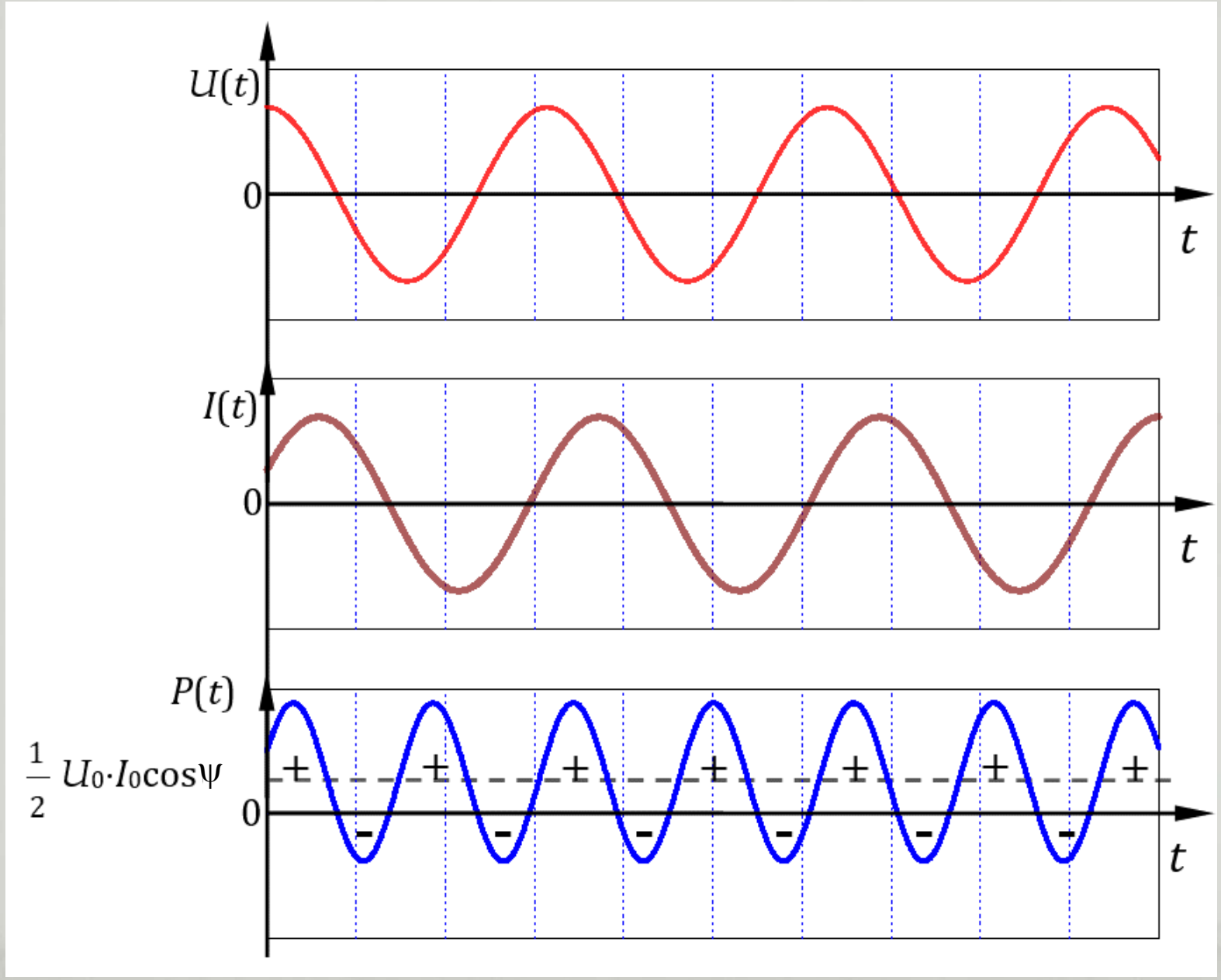
2) $\psi \neq \pm\frac{\pi}{2}, \quad \langle P\rangle = I_\partial \cdot U_\partial \cdot \cos\psi$

(***Опр.***) ***Активное сопротивление:***

$$\langle P\rangle = I_\partial^2 \cdot R_a \Rightarrow R_a = \frac{\langle P\rangle}{I_\partial^2}$$

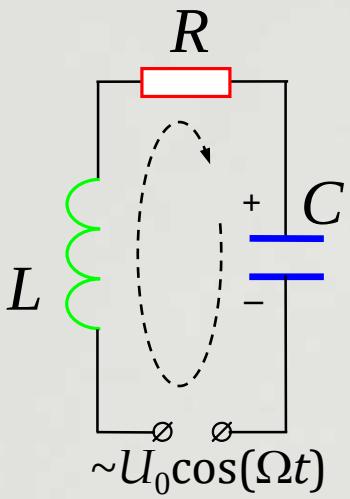
$$(R_a = Z\cdot\cos\psi)$$

$$P(t) = \frac{1}{2} U_0 \cdot I_0 \cdot [\cos\psi + \cos(2\Omega t - \psi)]$$



§ 3. *Резонансные явления в цепях переменного тока*

3.1. Последовательный “*RLC* “- контур



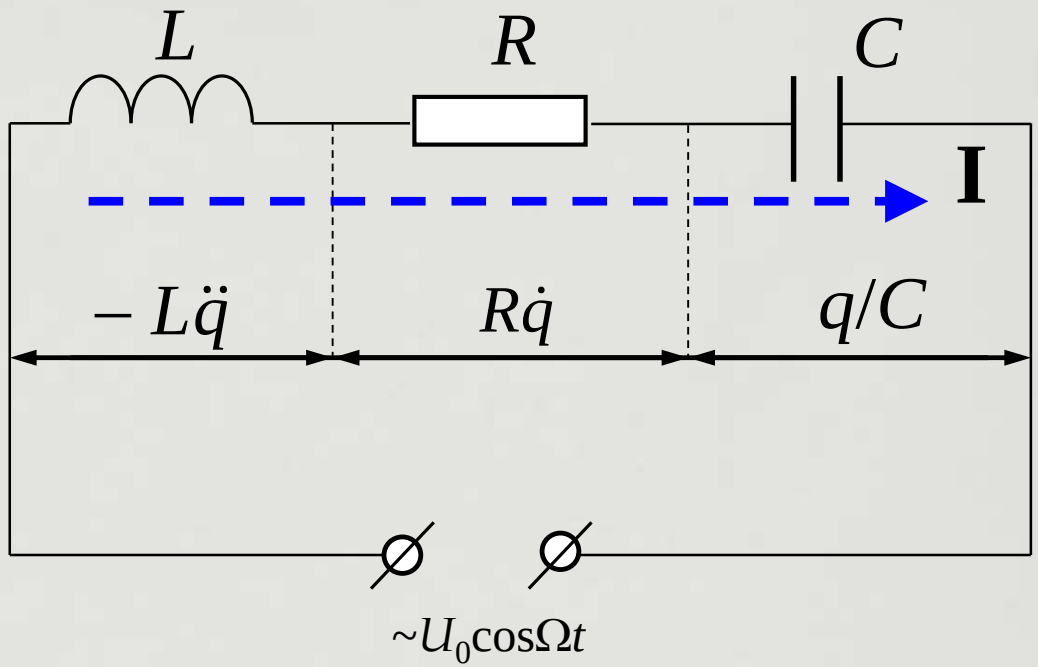


Рис. Контур “*RLC*” с генератором ЭДС

$$\ddot{q} + \frac{R}{L}\dot{q} + \frac{1}{LC}q = u_0 \cdot \cos\Omega t$$

… и дальше “§ 1” …

… вместо этого …

$q(t) = \ldots \quad ; \quad I(t) = dq/dt = \dot{q} \quad \ldots$

Векторная диаграмма

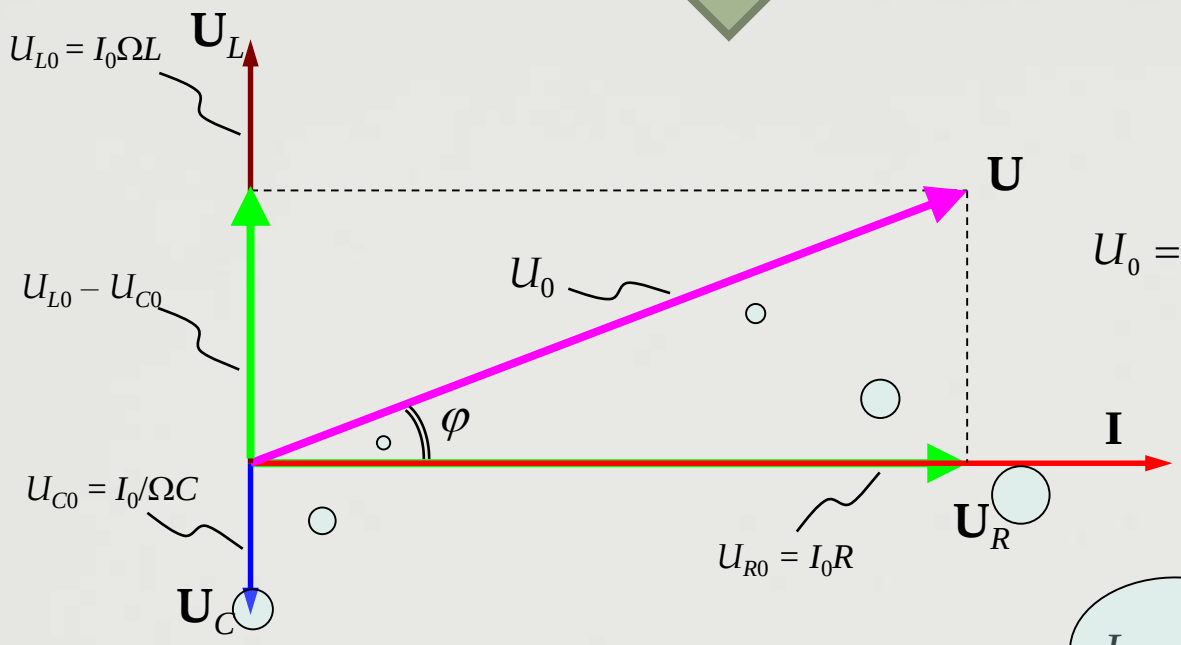


Рис. Векторная диаграмма "*RLC*-контура"

$$U_0 = I_0 \sqrt{R^2 + \left(\Omega L - \frac{1}{\Omega C}\right)^2}$$

$$I_0 = \frac{U_0}{\sqrt{R^2 + \left(\Omega L - \frac{1}{\Omega C}\right)^2}}$$

$$\mathrm{tg}\varphi = \frac{\Omega L - 1/\Omega C}{R}$$

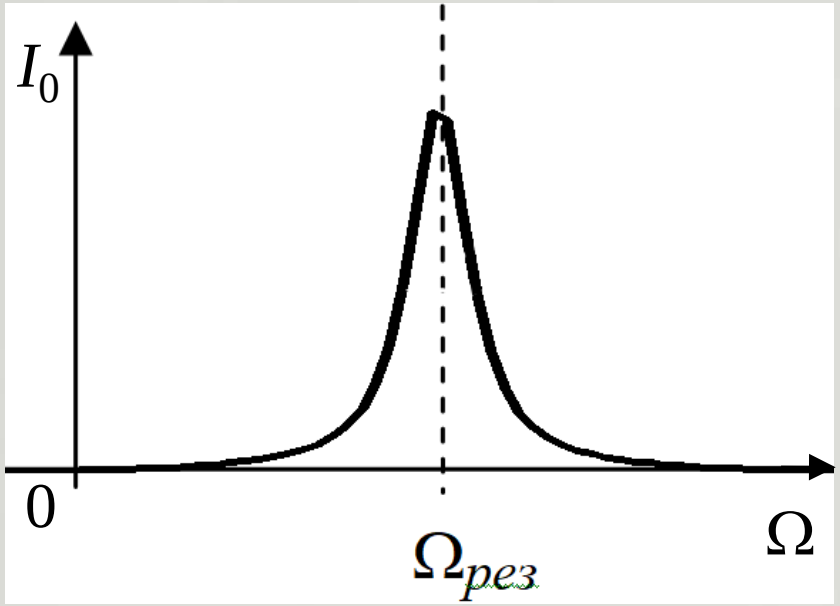
$$Z = \sqrt{R^2 + \left(\Omega L - \frac{1}{\Omega C}\right)^2}$$

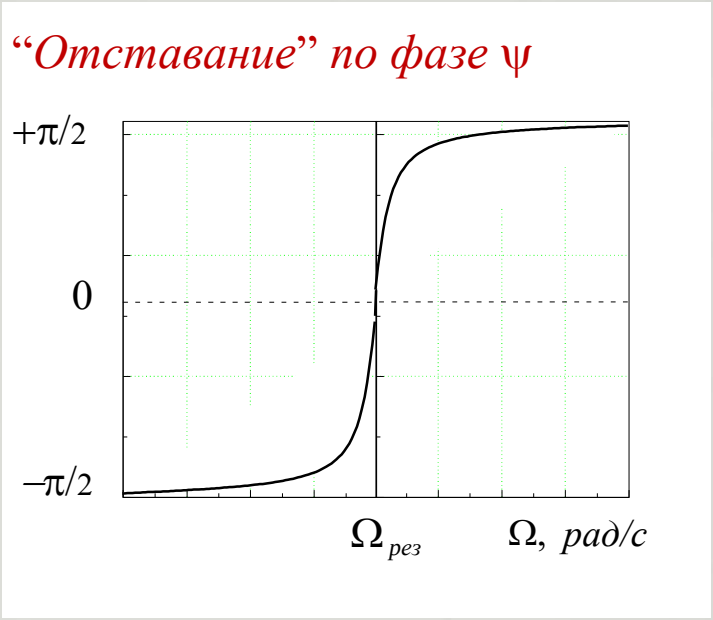
♣ *Замечания*

1) Частный случай !

2) "Резонанс напряжений" ??

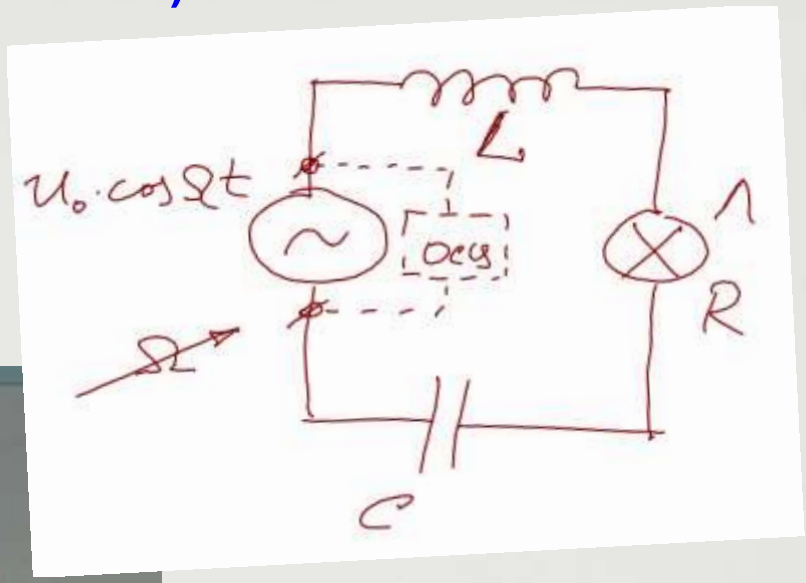
Амплитудно-частотная и фазо-частотная зависимости при резонансе в последовательном контуре

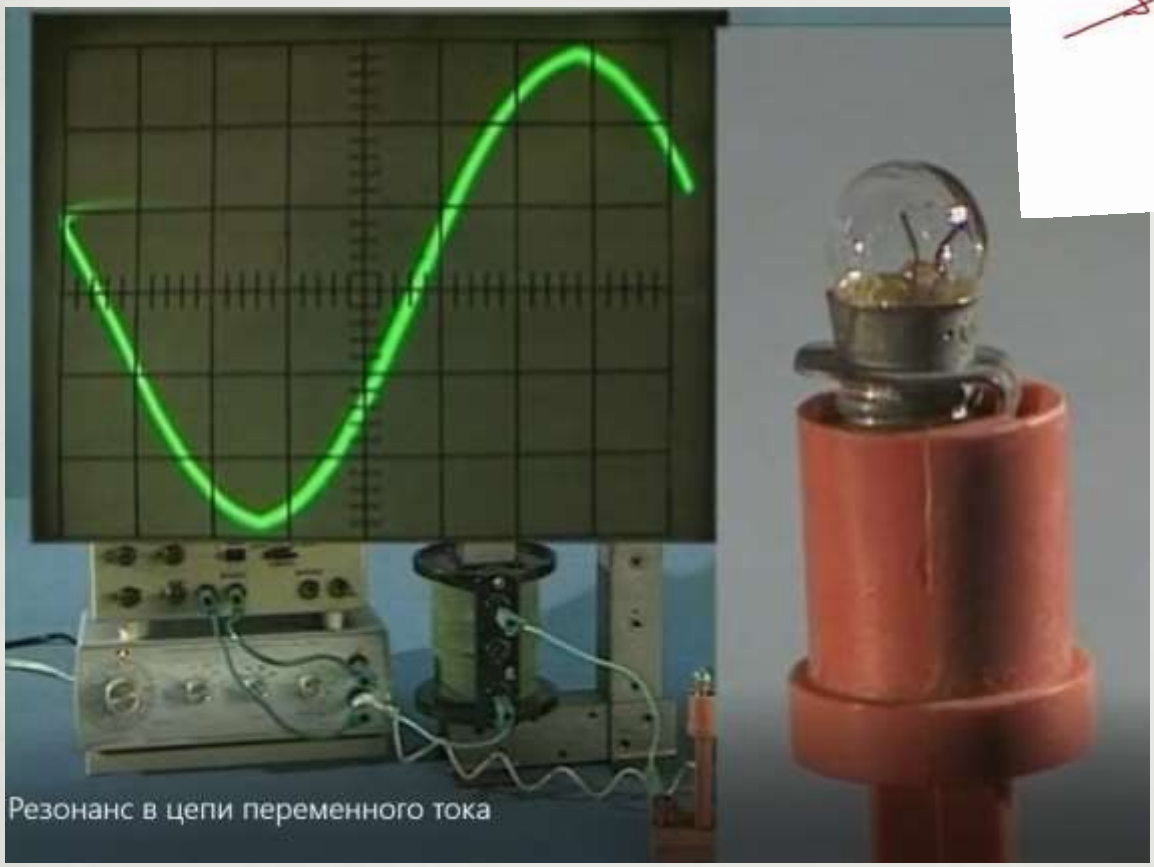




3.2. Понятие о резонансе в параллельном контуре

Демонстрация резонанса в последовательном контуре (“*резонанс напряжений*”)





3.2. Понятие о резонансе в параллельном контуре

(«баланс токов»)

3.2.1. Идеализация

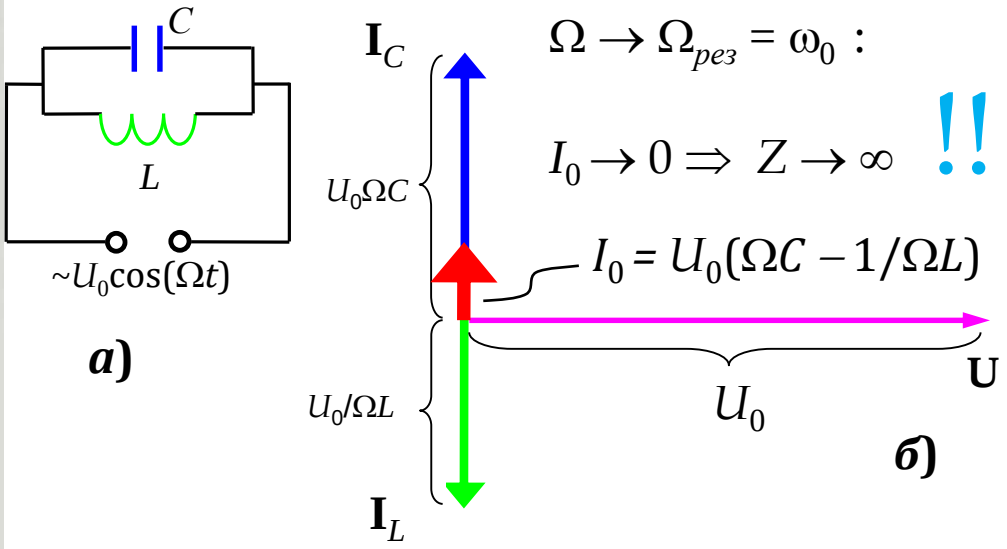
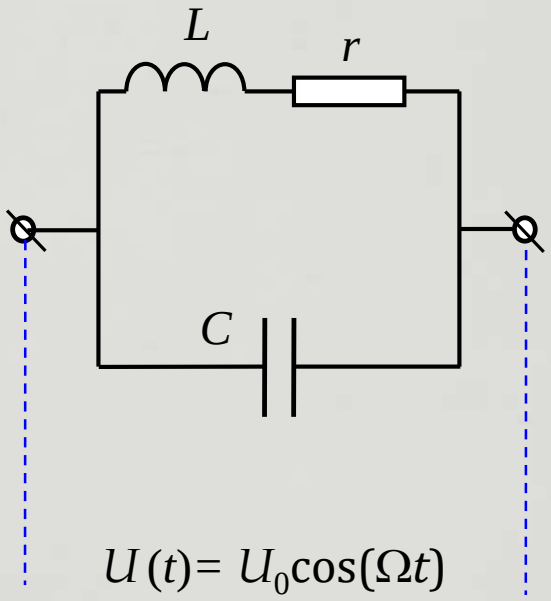
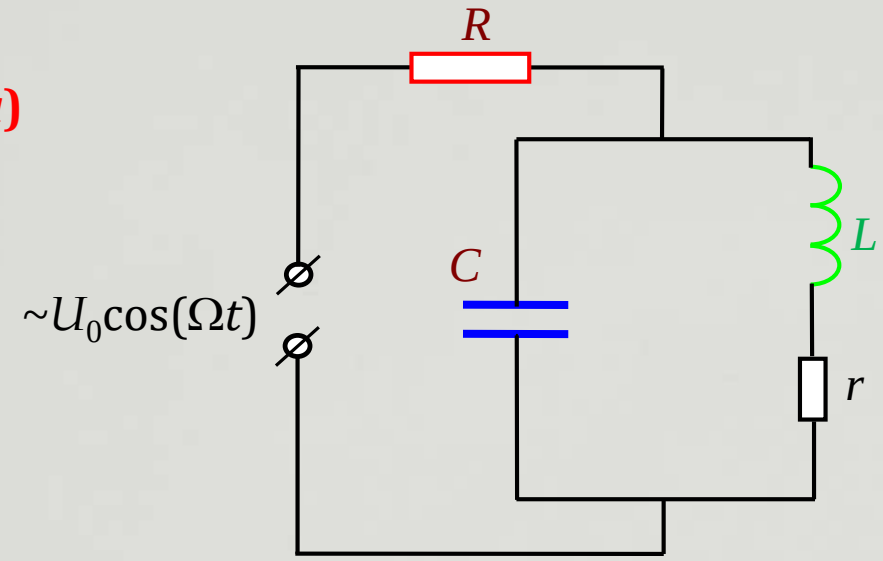


Рис. Параллельный контур: схема (*а*) и векторная диаграмма (*б*)

3.2.2. Реальность



3.2.2. Реальность



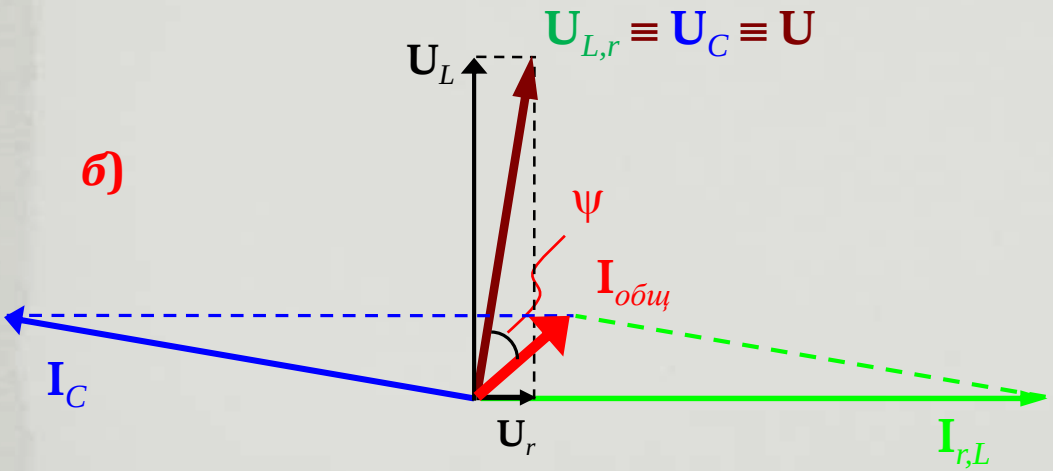


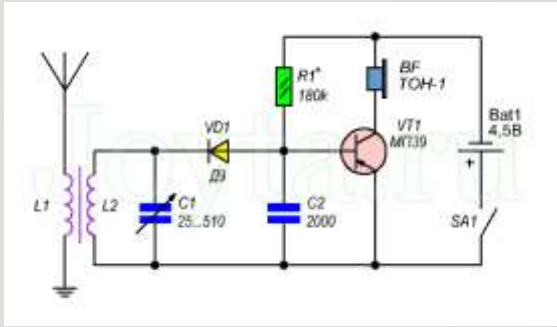
Рис. 3.5. Схема и векторная диаграмма для реального параллельного контура.

$$\Omega \to \Omega_{рез} \approx \omega_0 :$$

$$I_0 \to 0 \Rightarrow Z \to \infty \quad !!$$

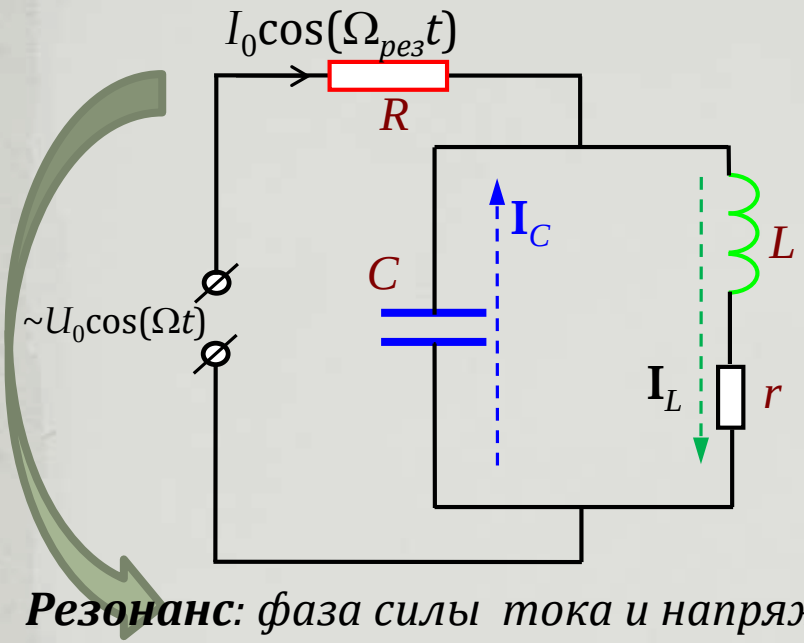
♣ *Замечания*

1) Селекторы теле-радиоприёмников → Селективность ~ ***Q***

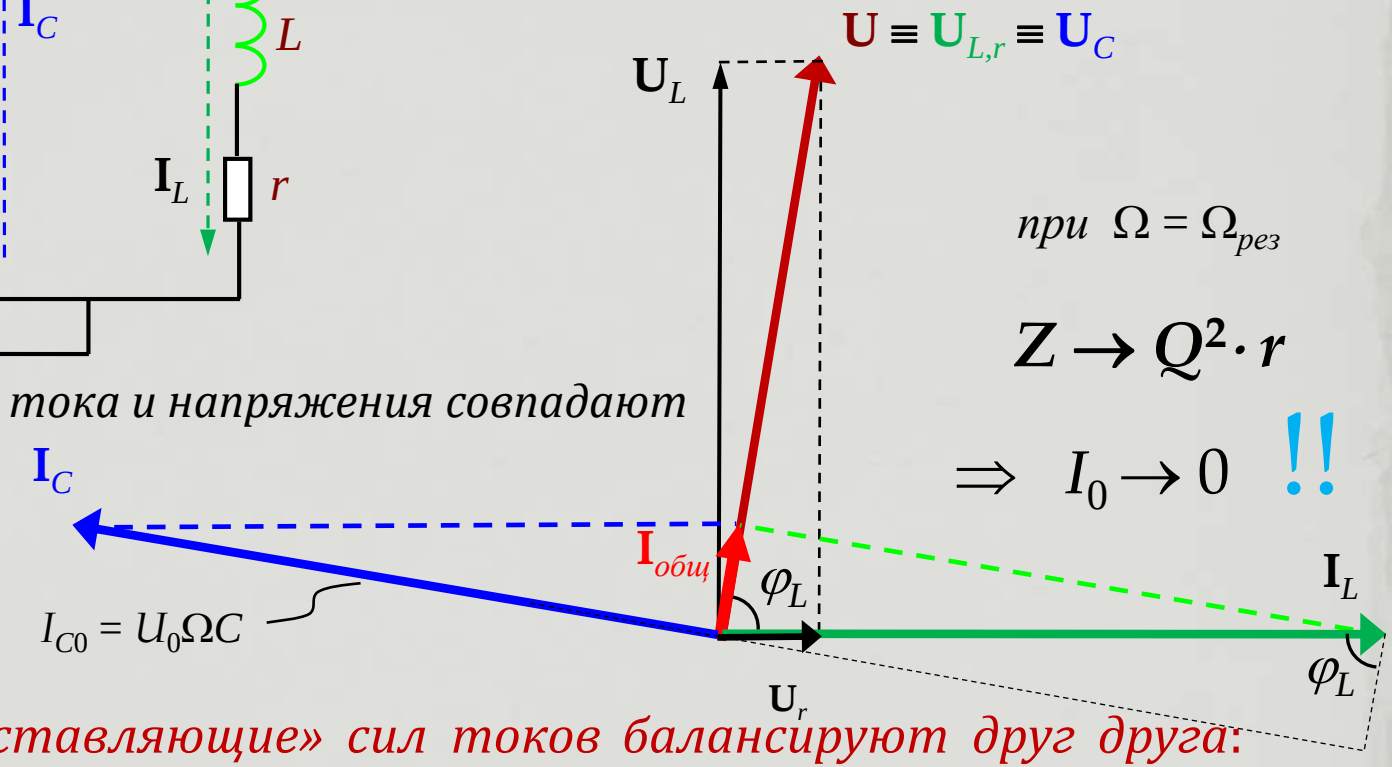


2) ***И ещё:*** резонансные фильтры, резонансные усилители, индукционные печи, …,
Резонансный трансформатор «Тесла»

*** Векторная диаграмма при резонансе в параллельном контуре – «балансе токов»



$$I_0 = I_{L0}/Q = I_{C0}/Q \quad !!$$



***Резонанс**: фаза силы тока и напряжения совпадают*

«Реактивные составляющие» сил токов балансируют друг друга:

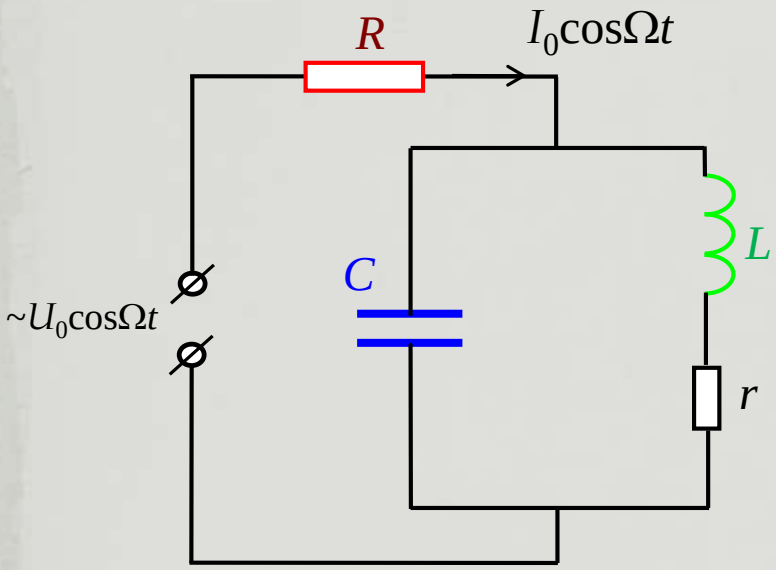
$$I_{C0} = I_{L0}\cdot\sin\varphi_L \Rightarrow \Omega_{рез} \approx \omega_0 \ ^{*)}$$

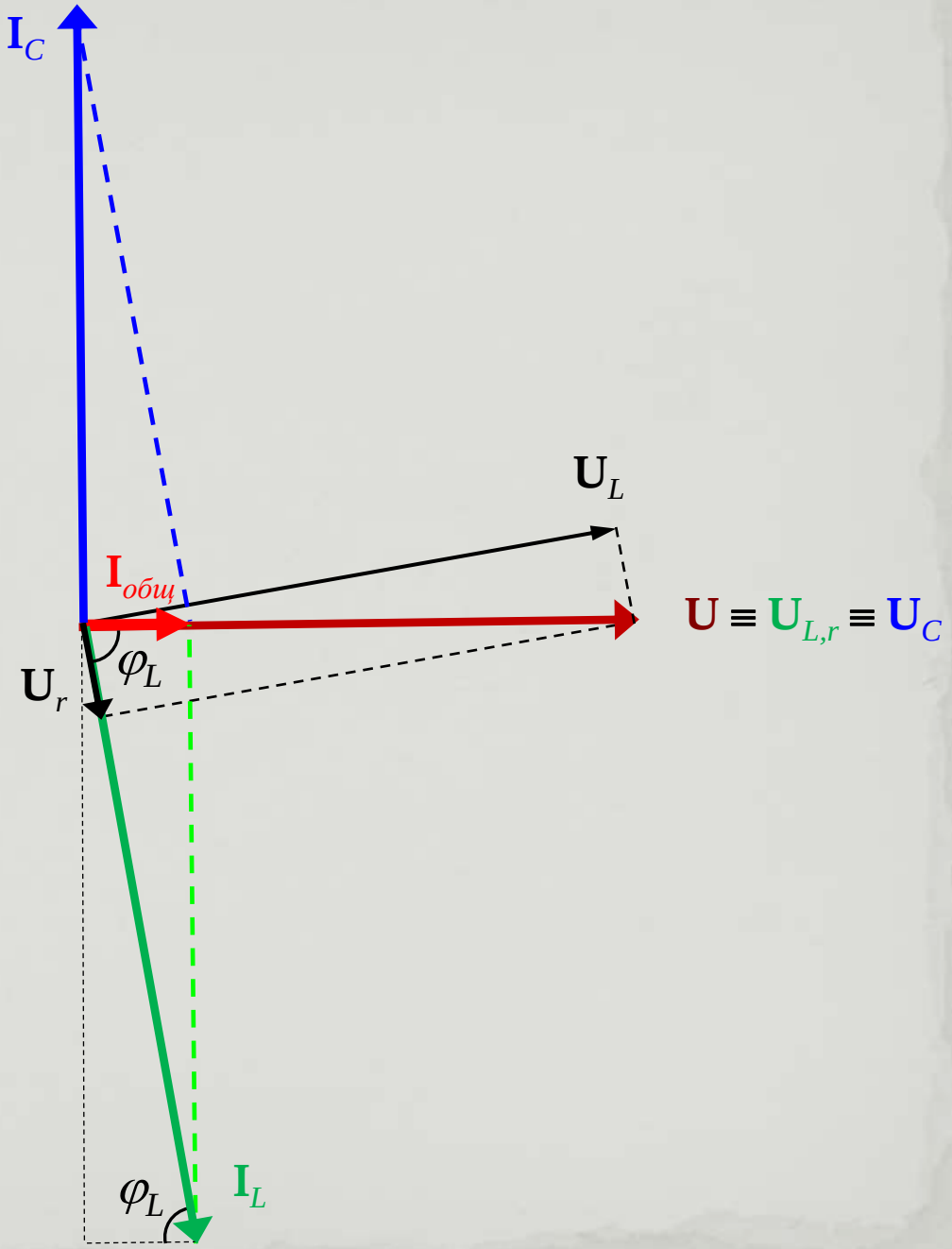
$$\left\{ \sin\varphi_L = \frac{\Omega L}{\sqrt{r^2 + (\Omega L)^2}} \right\}$$

*) Более точно:

$$\underbrace{\frac{U_0}{1/(\Omega_{рез}C)}}_{I_{C0}} = \underbrace{\frac{U_0}{\sqrt{r^2 + (\Omega_{рез}L)^2}}}_{I_{L0}} \cdot \underbrace{\frac{\Omega L}{\sqrt{r^2 + (\Omega_{рез}L)^2}}}_{\sin\varphi_L} \Rightarrow \Omega_{рез} = \sqrt{\omega_0^2 - 4\beta^2}$$

*** *резонанс в параллельном контуре*
– другой вариант процедуры построения векторной диаграммы





Глава III. *Волны*

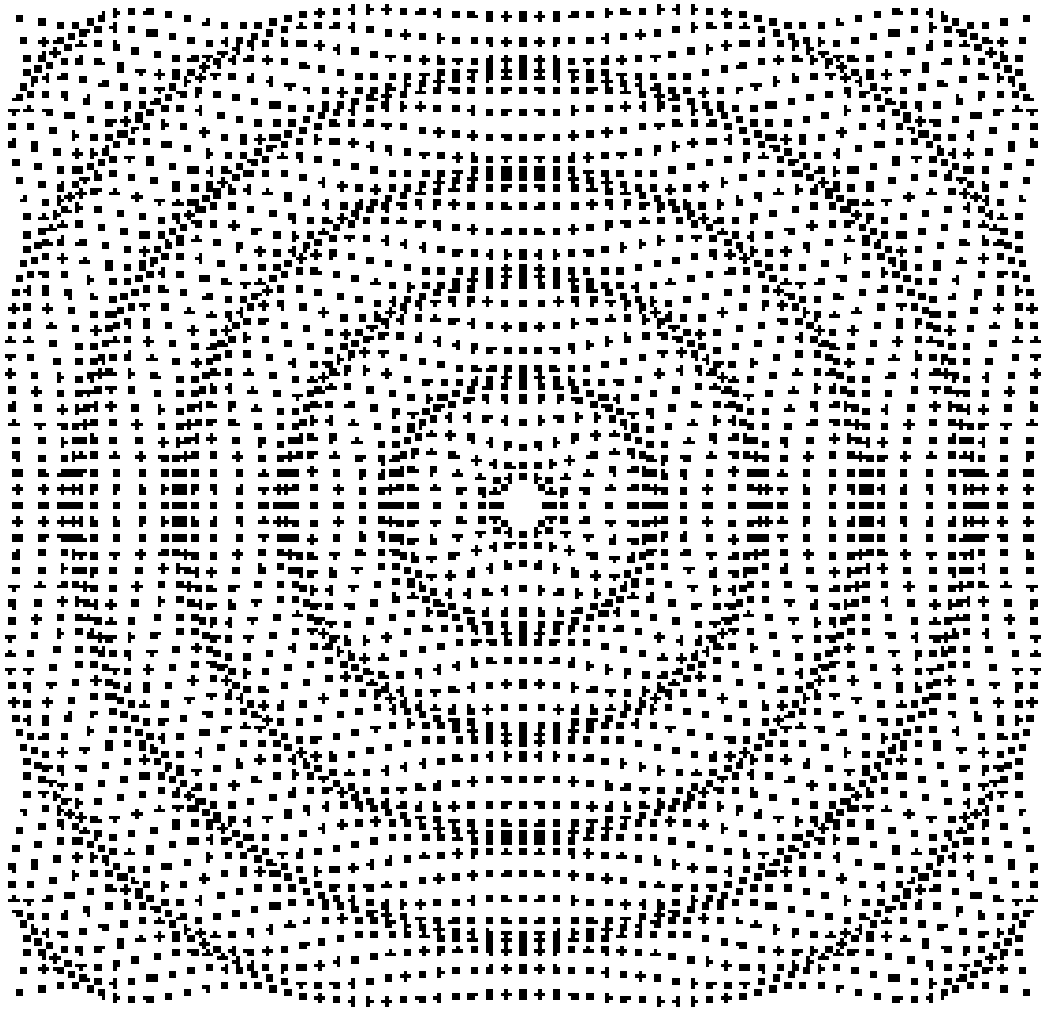
“Путешественнику на корабле кажется, что океан состоит из волн, а не из воды”

А. Эддингтон, 1929

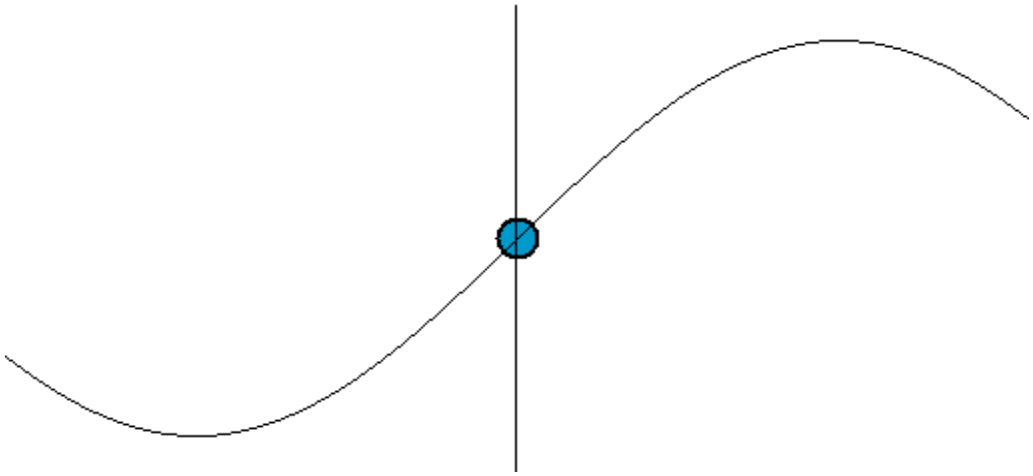
- (*Опр.*) *Волна – процесс распространения колебаний в пространстве*

… ?

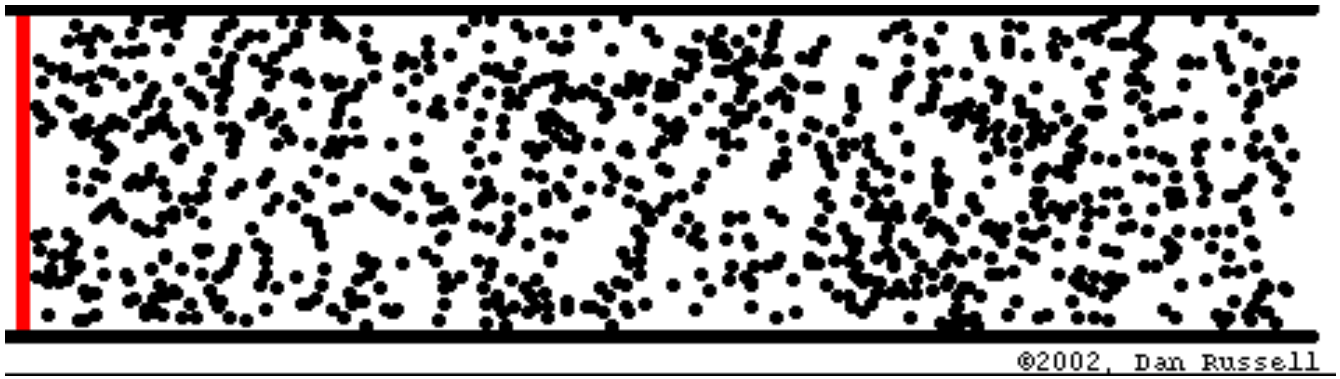
Волны



Волны



Волны

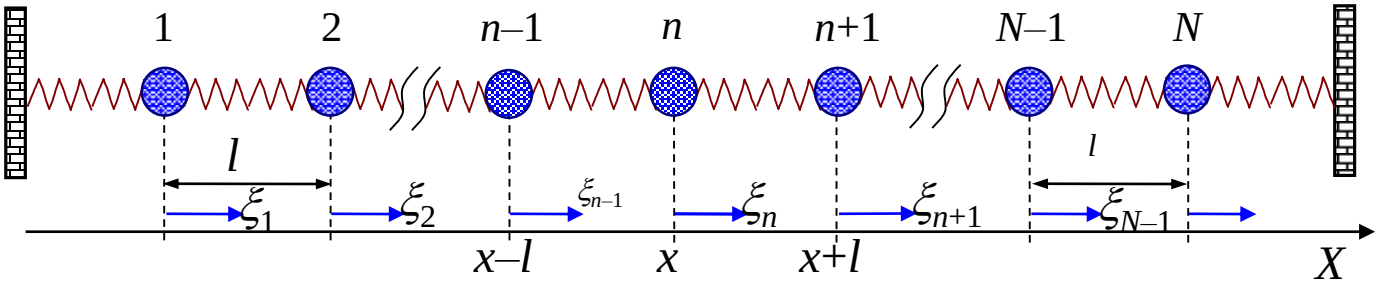



Волны


Волны
Dota}ru

§ 1. *Упругие волны*

1.1. Дифференциальное волновое уравнение



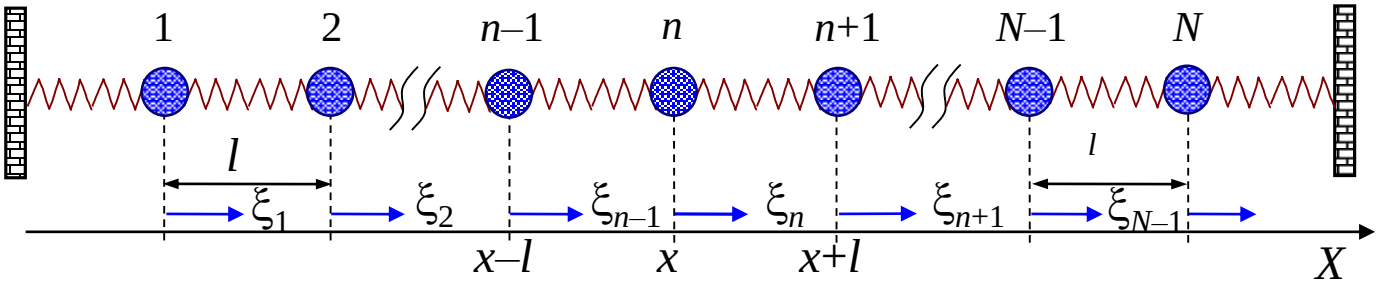
Атом с номером *"n"*:
("химическая" аналогия)

$$m\ddot{\xi}_n = -\kappa(\xi_n - \xi_{n-1}) + \kappa(\xi_{n+1} - \xi_n)$$

Модель:

1) система состоит из длинной цепочки большого количества одинаковых связанных атомов массы m;
2) система консервативна;
3) амплитуды колебаний малы, силы квазиупруги и моделируются пружинами жёсткости κ *);
4) расстояние l между соседними осцилляторами очень мало;
5) соседние шарики-атомы движутся почти одинаково (исключаем из рассмотрения наиболее высокочастотные моды колебаний).

К выводу дифференциального волнового уравнения



$$m\ddot{\xi}_n = -\kappa(\xi_n - \xi_{n-1}) + \kappa(\xi_{n+1} - \xi_n)$$

$l \to 0$: $\quad \xi_n \to \xi(x,t)$

$$\xi_{n+1} = \xi(x+l,t) \approx \xi(x,t) + \frac{\partial \xi}{\partial x} \cdot l + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} \cdot l^2$$

$$\xi_{n-1} = \xi(x-l,t) \approx \xi(x,t) - \frac{\partial \xi}{\partial x} \cdot l + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} \cdot l^2$$

$$m\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2} = \kappa l^2 \frac{\partial^2\xi}{\partial x^2}$$

Обозначим

$$\frac{\kappa l^2}{m} = \upsilon^2$$

$$\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2} = \upsilon^2 \frac{\partial^2\xi}{\partial x^2}$$

Это одномерное "Классическое дифференциальное волновое уравнение"

$$\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2} = \upsilon^2 \cdot \Delta\xi$$

"Трёхмерный" случай

$$\left(\text{"оператор Лапласа"}: \quad \Delta\xi = \frac{\partial^2\xi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\xi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\xi}{\partial z^2} \right)$$

Волны

©2002, Dan Russell

♣ *Замечания*

(Опр.)

1) *Волна называется продольной (поперечной), если колебания происходят вдоль (перпендикулярно) направления распространения возмущений*

2) *Для поперечной вместо* $\upsilon^2 = \frac{\kappa l^2}{m}$: $\kappa \rightarrow \frac{T}{l}$ *тогда:* $\upsilon^2 = \frac{Tl}{m}$

1.2. Уравнение волны

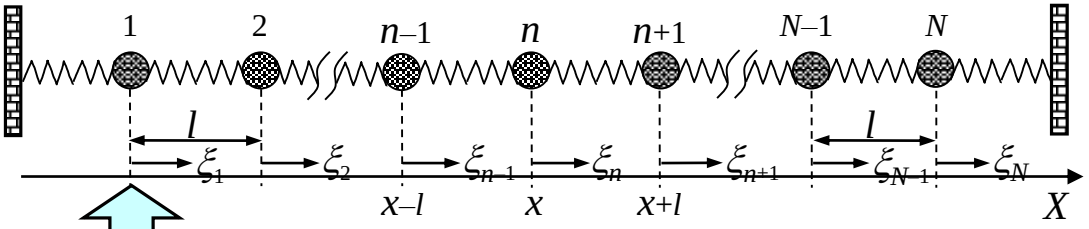
(Опр.) *Уравнением упругой волны называется функция, описывающая зависимость смещения колеблющихся частиц* $\xi(x,t)$ *от координат и времени в явной форме:*

$$\xi = \xi(x,t) \quad \text{или} \quad \xi = \xi(x,y,z,t)$$

Уравнение волны – функция, являющаяся решением ***волнового уравнения***

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = \upsilon^2 \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}$$

Уравнение волны (2)



$$\xi(0,t) = A\cos\omega t$$

запаздывание *на* $\tau = x/\upsilon$

$$\xi(x,t) = A\cdot\cos\left[\omega(t-\tau)\right];$$

$$\xi(x,t) = A\cdot\cos\left[\omega t - \omega\cdot x/\upsilon\right];$$

$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

"Длина волны": $\lambda = \upsilon\cdot T$

$$\frac{\omega\cdot x}{\upsilon} = \frac{2\pi\cdot x}{T\cdot\upsilon} = \frac{2\pi}{\lambda}\cdot x$$

"Волновое число": $k = \frac{2\pi}{\lambda}$

$$\xi(x,t) = A\cdot\cos(\omega t - kx);$$

или $\xi(x,t) = A\cos\left(\frac{2\pi}{T}\cdot t - \frac{2\pi}{\lambda}\cdot x\right)$

(Опр.) ***Уравнением гармонической бегущей волны называется функция координат и времени вида:***

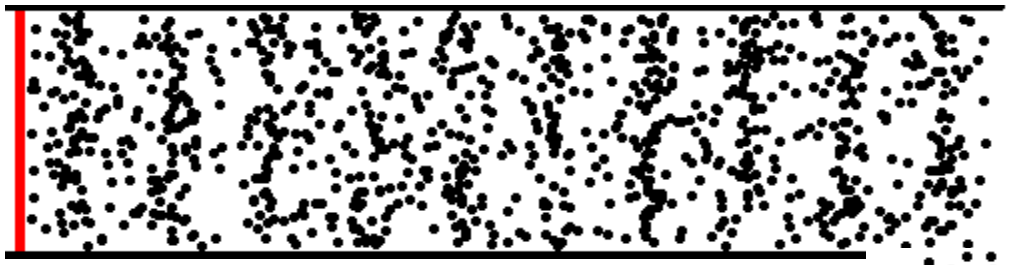
$$\xi(x,t) = A\cdot\cos(\omega t - kx)$$

♣ ***Замечания***

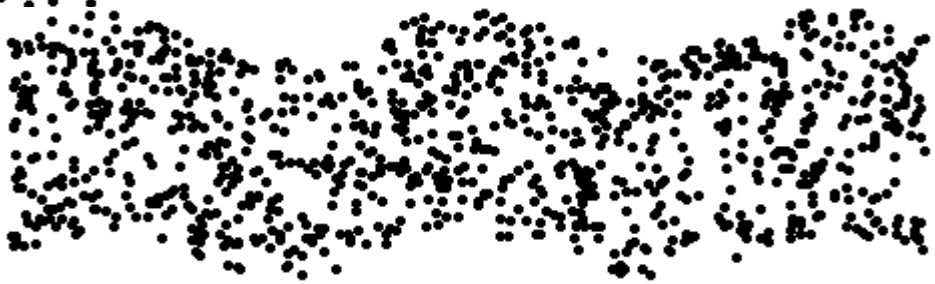
1) Только ли "cos" ?? ***... любая f***$(t - x/\upsilon)$ – НЕ гармоническая;

2) гармоническая; "бегущая" ("+"); "плоская" (?); в среде без поглощения.

Продольные волны



Поперечные волны



- (Опр.) ***Волновой поверхностью*** ***называют такую поверхность, колебания во всех точках которой, происходят в одной и той же фазе***

Волновая поверхность, служащая «передней» границей «возмущённой» области пространства, называется волновым фронтом

- (Опр.) *Длиной волны (λ) называется расстояние, на которое фронт волны (или любая волновая поверхность) смещается за один период колебаний*

♣ ***Замечания***

... 2) Эта волна ...

а. ***гармоническая;***

б. ***“бегущая” («+»);***

в. ***в среде без поглощения;***

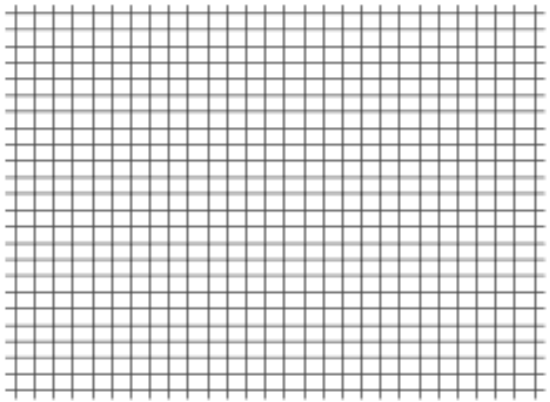
г. ***“плоская”.***

$$\xi(x,t) = A \cdot \cos(\omega t - kx)$$

... ?

♣ … *“плоская”* … ?

Если фронт волны и волновые поверхности – плоскости, то волну называют ***плоской***



$$x << D \qquad (D - \textit{размер источника})$$

Доска 1

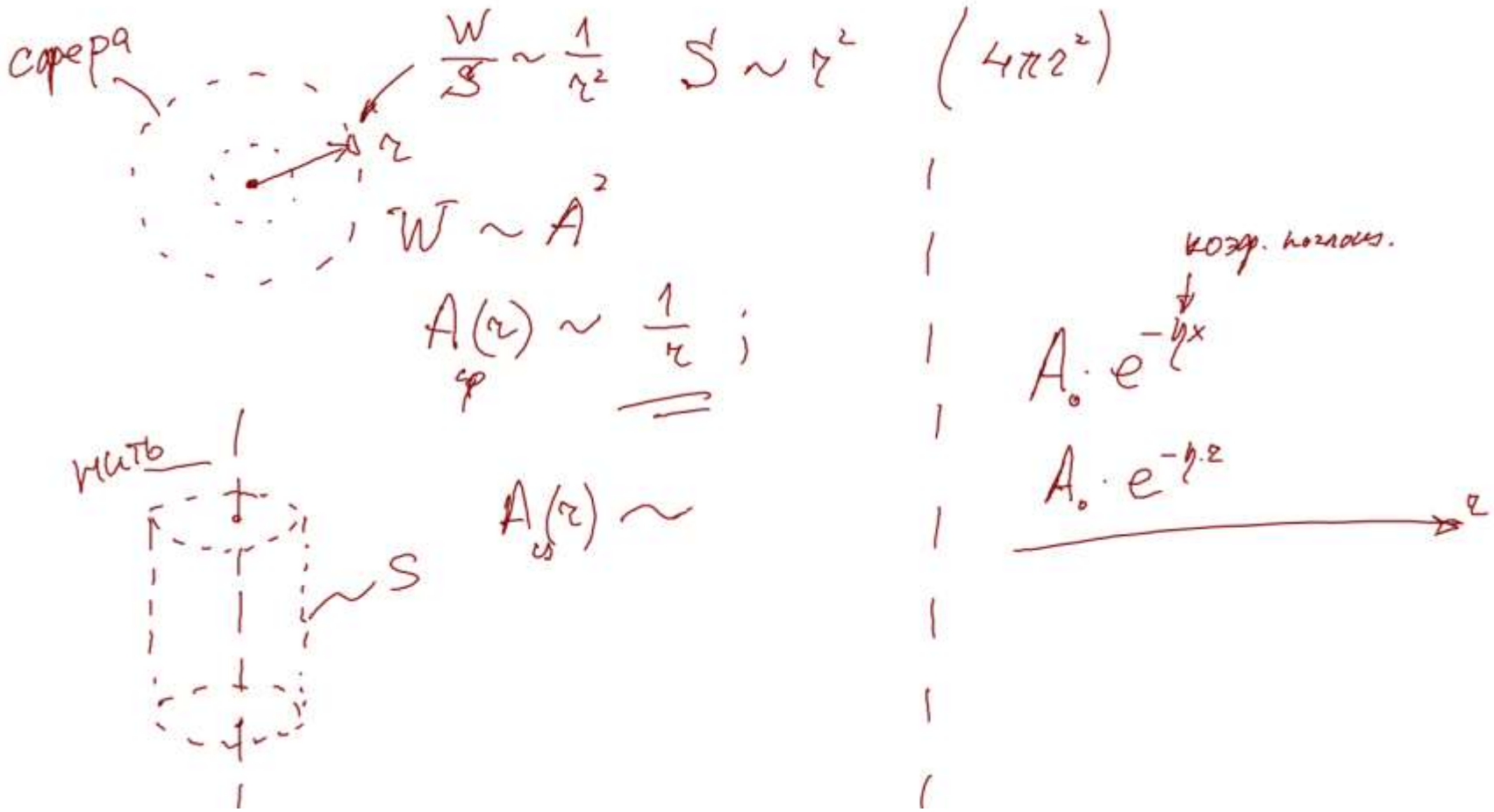
$$U_0 = I_0 \cdot \sqrt{R^2 + \left(\Omega L - \frac{1}{\Omega C}\right)^2}$$

$$I_0 = \frac{U_0}{\sqrt{R^2 + \left(\Omega L - \frac{1}{\Omega C}\right)^2}};$$

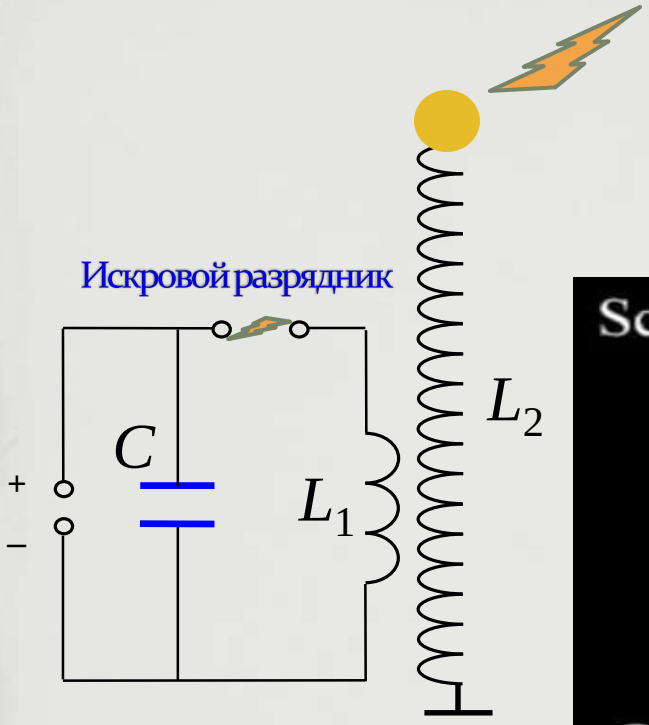
$$Z = \sqrt{R^2 + \left(\Omega L - \frac{1}{\Omega C}\right)^2};$$

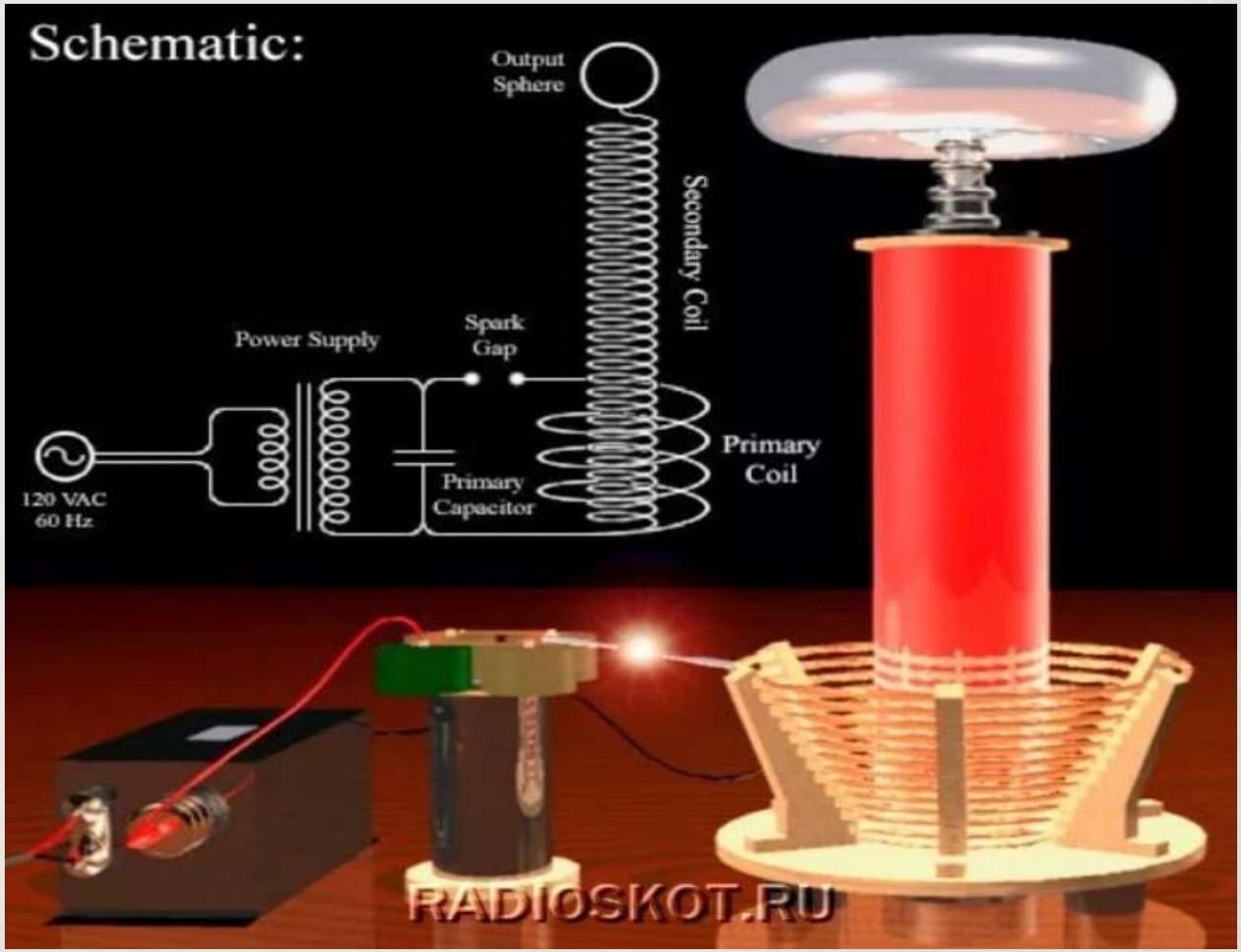
$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{\Omega L - \frac{1}{\Omega C}}{R};$$

Доска 2


сфера
$\frac{W}{S} \sim \frac{1}{r^2}$
$S \sim r^2$
$(4\pi r^2)$
r
$W \sim A^2$
$A_{\varphi}(r) \sim \frac{1}{r}$;
коэф. поглощ.
$A_0 \cdot e^{-\gamma x}$
$A_0 \cdot e^{-\gamma \cdot r}$
r
нить
$A_S(r) \sim$
S

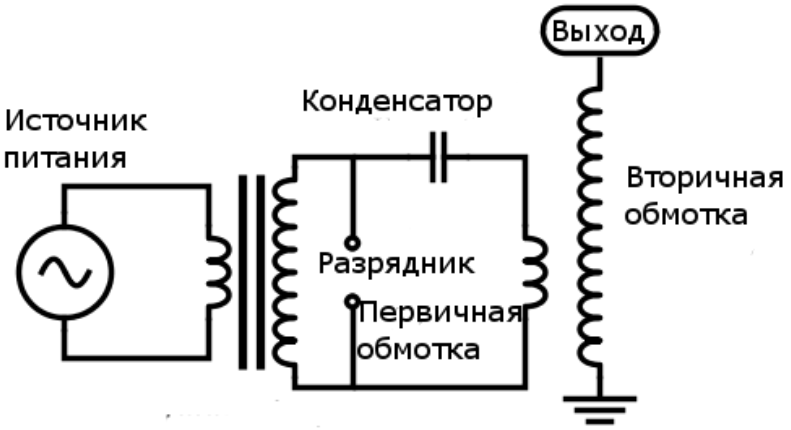
Ещё про резонанс: резонансный трансформатор Тесла





Резонансный трансформатор Тесла





Лаборатория Никола Тесла, Колорадо Спрингс, 1899 г.

