Лекция 7. Волны: упругие и электромагнитные



- (Опр.) ***Волновой поверхностью*** *называют такую поверхность, колебания во всех точках которой, происходят в одной и той же фазе*

Волновая поверхность, служащая «передней» границей «возмущённой» области пространства, называется волновым фронтом

- (Опр.) ***Длиной волны (λ) называется расстояние, на которое фронт волны (или любая волновая поверхность) смещается за один период колебаний***

♣ ***Замечания***

… 2) Эта волна …

а. *гармоническая;*

б. *“бегущая” («+»);*

в. *в среде без поглощения;*

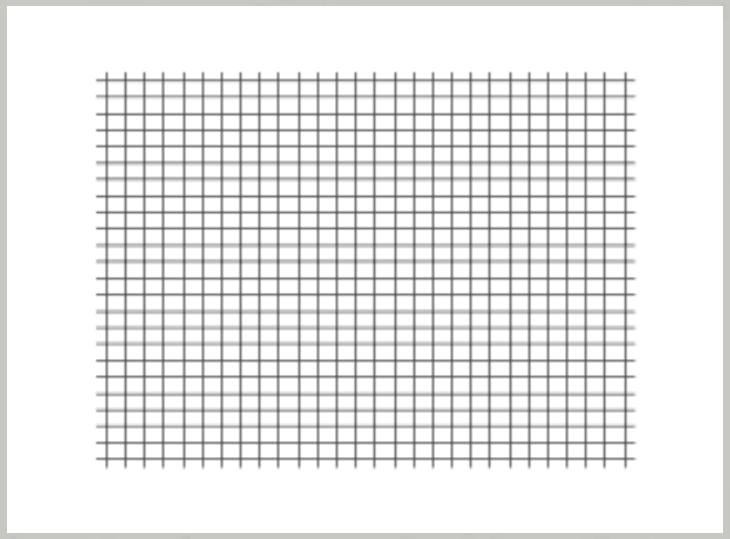
г. *“плоская”.*

$$\xi(x,t) = A \cdot \cos(\omega t - kx)$$

… ?

♣ … “плоская” … ?

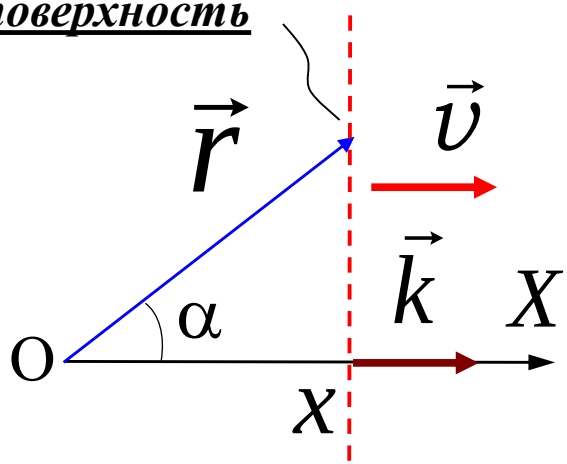
Если фронт волны и волновые поверхности – плоскости, то волну называют ***плоской***



$$x << D \qquad (D - \text{размер источника})$$

Плоская волна

волновая поверхность



$$\vec{k} = k\vec{v}$$

Волновая вектор

$$kx = k \cdot r \cdot \cos\alpha = \vec{k} \cdot \vec{r}$$

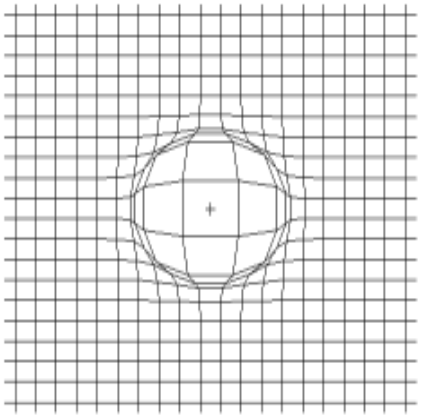
$$\xi(\vec{r}, t) = A \cdot \cos(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})$$

Сферическая волна

Если волновые поверхности имеют сферическую форму, волну называют сферической

$$D << x, r$$

$$\xi^{сф}(r,t) = \frac{A_0}{r} \cdot \cos(\omega t - kr)$$



♣ *Замечания*

*1) **нет** поглощения средой, но **энергия “разбегается”**;*

2) А если есть?

а. Плоская волна: $A(x) = A_0 \cdot e^{-\eta x}$

б.Сферическая волна: $A(r) = \frac{A_0}{r} \cdot e^{-\eta r}$

в. Цилиндрическая волна: $A(r) = \frac{A_0}{?} \cdot e^{-\eta r}$

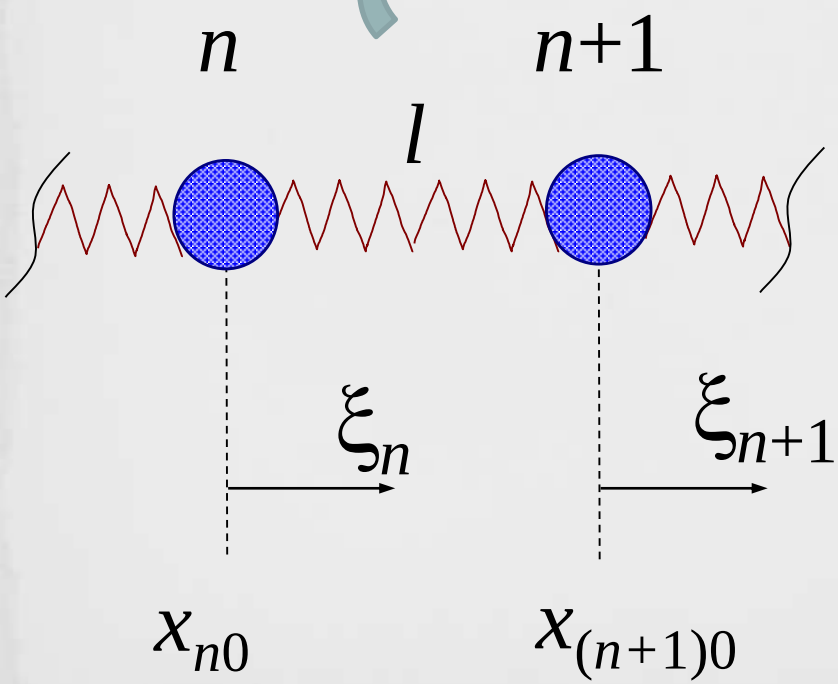
1.4. Энергия упругой волны

$$W = W_n + W_к ;$$

$$W_n = \frac{к \cdot (деформация)^2}{2}$$

$$деформация: \quad \xi(x+l,t) - \xi(x,t) \approx \frac{\partial \xi}{\partial x} \cdot l$$

(очень мало $\Rightarrow$ *дифференциал*)



$$W_n = \frac{к}{2}\left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \cdot l\right)^2 = \frac{к l^2}{2}\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)^2$$

$$\upsilon^2 = \frac{к l^2}{m}$$

$$W_n = \frac{m\upsilon^2}{2}\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)^2$$

υ — *фазовая скорость волны!!*

Энергия упругой волны (2)

$$\frac{dW}{dV} = w \quad (\textit{плотность энергии})$$

$$w_n = \frac{\rho \upsilon^2}{2}\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)^2;$$

$$\left\{W_к = \frac{m}{2}\left(\frac{\partial \xi}{\partial t}\right)^2\right\} \Rightarrow w_к = \frac{\rho}{2}\left(\frac{\partial \xi}{\partial t}\right)^2;$$

$$w = w_n + w_к$$

$$w = \frac{\rho}{2}\left[\left(\frac{\partial \xi}{\partial t}\right)^2 + \upsilon^2\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)^2\right]$$

Энергия упругой волны (3)

$$w_к = \frac{\rho}{2}\left(\frac{\partial \xi}{\partial t}\right)^2 = \frac{\rho}{2} A^2 \omega^2 \cdot \sin^2(\omega t - kx)$$

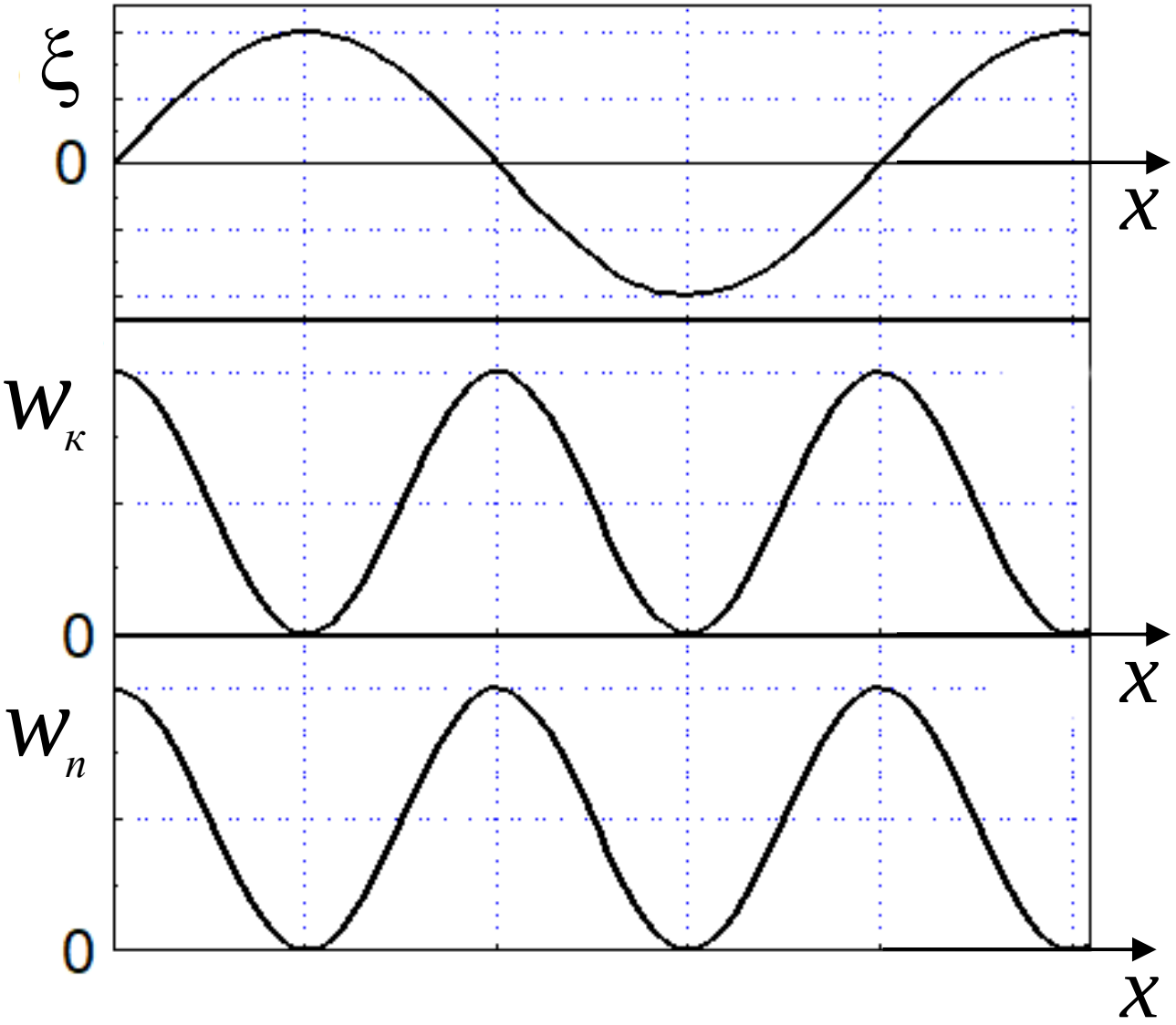
$$w_п = \frac{\rho \upsilon^2}{2}\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)^2 = \frac{\rho \upsilon^2}{2} A^2 k^2 \cdot \sin^2(\omega t - kx)$$

(*с учётом* $\upsilon = \omega / k$) $\quad w_п = \frac{\rho}{2} A^2 \omega^2 \cdot \sin^2(\omega t - kx)$

$$w = w_п + w_к \; ; \quad w = \rho A^2 \omega^2 \cdot \sin^2(\omega t - kx)$$

$t = t_0$ – *“мгновенная фотография”*

$(\omega t_0 = ??)$



Характеристики переноса энергии упругой волны

$$w = w(x,t)$$

$$S(t) = w(t) \cdot \upsilon$$

"Плотность потока энергии" *– энергия, переносимая волной в единицу времени через «единичную площадку», перпендикулярную направлению распространения волны*

"Интенсивностью волны" *называется среднее по времени значение плотности потока её энергии*

$$\langle w \rangle_t = \langle \rho A^2 \omega^2 \cdot \sin^2(\omega t - kx) \rangle_t = \frac{1}{2} \rho A^2 \omega^2$$

$$I = \langle S \rangle_t = \langle w \rangle_t \cdot \upsilon = \frac{1}{2} \rho A^2 \omega^2 \upsilon$$

***Вектор Умова*:** $\vec{S} = w(t) \cdot \vec{\upsilon}$

***«векторная интенсивность»*:**

$$\langle \vec{S} \rangle = \langle w \rangle \cdot \vec{\upsilon} = \frac{1}{2} \rho A^2 \omega^2 \cdot \vec{\upsilon}$$

***Средний поток энергии*:**

$$\langle \Phi \rangle = \int_{\Sigma} \langle \vec{S} \rangle \cdot d\vec{s} = \int_{\Sigma} \langle S_n \rangle ds$$

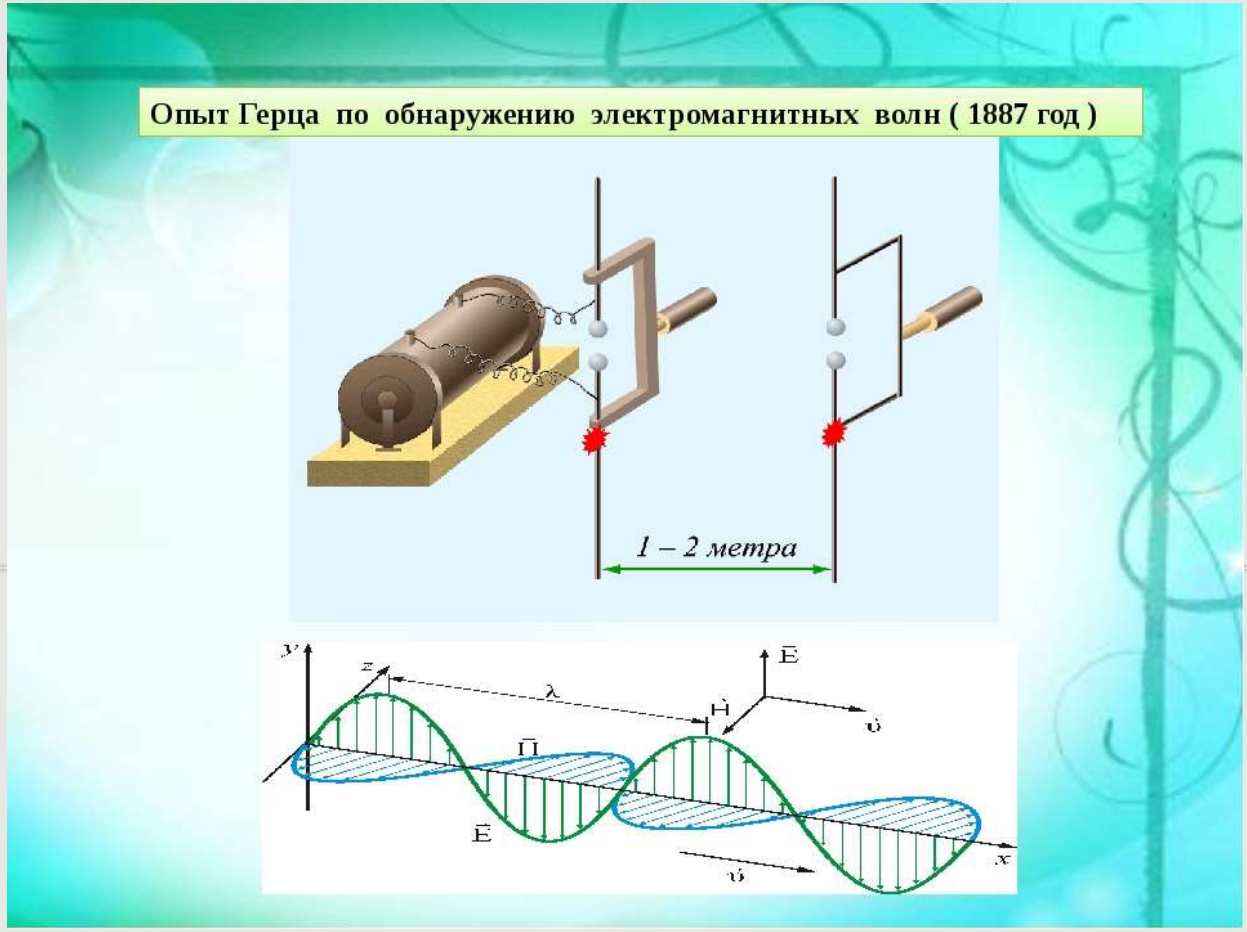
через поверхность “Σ” за время τ

скалярное произведение

***Перенос энергии*:**

$$W = \langle \Phi \rangle \cdot \tau$$

§ 2. Электромагнитные волны



Г. Герц о своём открытии электромагнитных волн :

“Это абсолютно бесполезно. Это только эксперимент, который доказывает, что маэстро Максвелл был прав” – (1888 г.) ☺

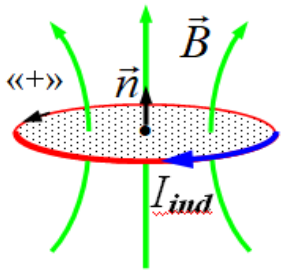
2.1. Два уравнения Максвелла (две гипотезы)

2.1.1. *Первая гипотеза Максвелла: “Вихревое электрическое поле”*

ЭМИ Rem:

Что «толкает электроны» ?

$$\mathcal{E}_{ind} = \oint_{"C"} \vec{E}^{*} \cdot d\vec{l}$$



ЭМИ “по Максвеллу”:

$$\oint_{C} \vec{E}^{*} \cdot d\vec{l} = -\int_{\Sigma} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S} \qquad \textbf{(I)}$$

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \Rightarrow \vec{E}$$

2.1.2. *Вторая гипотеза Максвелла: “Ток смещения”*

$$I_{см} = \varepsilon\varepsilon_0 \int_{\Sigma} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \cdot d\vec{S}$$

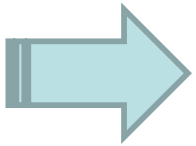
Теорема о циркуляции “по Максвеллу”:

$$\oint_{C} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu\mu_0 \cdot \left(\int_{\Sigma} \vec{j} \cdot d\vec{S} + \varepsilon\varepsilon_0 \int_{\Sigma} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \cdot d\vec{S} \right) \qquad \textbf{(II)}$$

$$\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \Rightarrow \vec{B}$$

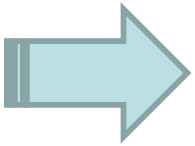
Модель:

1) Среда однородная и непроводящая. Следовательно, в ней не может быть токов проводимости;



$$\left(\int_{\Sigma} \vec{j} \cdot d\vec{S} = 0 \right)$$

2) $\vec{E}$ и $\vec{B}$ зависят только от одной пространственной координаты, например, x – т.е.



$$\vec{E} = \vec{E}(x,t) \quad \text{и} \quad \vec{B} = \vec{B}(x,t) \quad ;$$

($\Rightarrow$ волна плоская)

2.2. Вывод волнового уравнения

Скалярное произведение

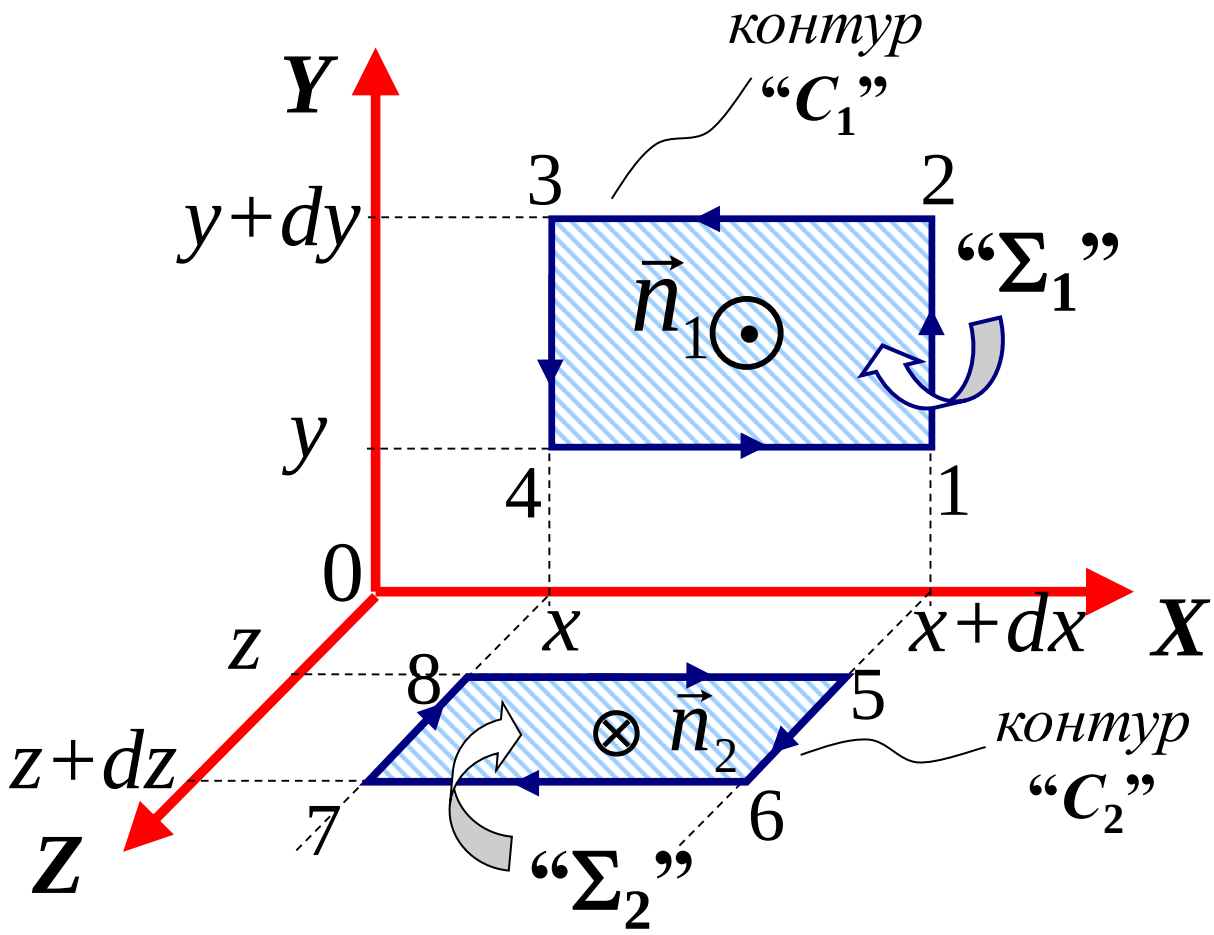
$$\begin{cases} \oint_{"C_1"} \vec{E}\cdot d\vec{l} = -\dfrac{\partial}{\partial t}\int_{"\Sigma_1"} \vec{B}\cdot d\vec{s}\ ; & \text{(I)} \\ \oint_{"C_2"} \vec{B}\cdot d\vec{l} = \varepsilon\varepsilon_0\mu\mu_0 \dfrac{\partial}{\partial t}\int_{"\Sigma_2"} \vec{E}\cdot d\vec{s} & \text{(II)} \end{cases}$$

ЭМИ "по Максвеллу"

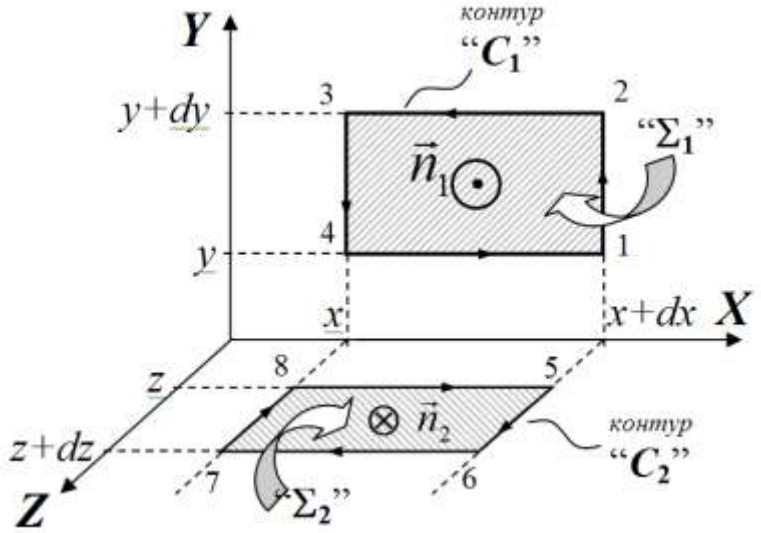
Теорема о циркуляции "по Максвеллу":

$$\left.\begin{array}{l} \vec{E} = \vec{E}(x,t) \\ \vec{B} = \vec{B}(x,t) \end{array}\right] \Leftrightarrow \ ? \ "плоская\ волна"$$

К выводу уравнения электромагнитной волны



dx и *dy* – *бесконечно малые* !!



$$\oint_{C_1}\vec{E}\cdot d\vec{l}=\oint_{C_1}E_l\cdot dl=\int_1^2+\int_2^3+\int_3^4+\int_4^1$$

$$\int_1^2 E_l\cdot dl=E_y(x+dx)\cdot dy;\qquad \int_3^4 E_l\cdot dl=-E_y(x)\cdot dy;$$

$$\int_2^3 E_x\cdot dl=-\int_4^1 E_x\cdot dl;\quad\Rightarrow\quad \int_2^3+\int_4^1=0$$

$$\oint_{C_1}\vec{E}\cdot d\vec{l}=\left[E_y(x+dx)-E_y(x)\right]\cdot dy=\frac{\partial E_y}{\partial x}\cdot dxdy$$

$$\oint_{C_1}\vec{E}\cdot d\vec{l}=\frac{\partial E_y}{\partial x}\cdot dxdy;$$

$$\int_{\Sigma_1}\vec{B}\cdot d\vec{s}=B_z\cdot dxdy;$$

(I) $\Rightarrow$

$$\frac{\partial E_y}{\partial x}=-\frac{\partial B_z}{\partial t}\qquad (1a)$$

$$\int_{C_2}\vec{B}\cdot d\vec{l}=\left[B_z(x+dx)-B_z(x)\right]\cdot dz=\frac{\partial B_z}{\partial x}\cdot dxdz,$$

$$\int_{\Sigma_2}\vec{E}\cdot d\vec{s}=-E_y\cdot dxdz.$$

$$\oint_{C_2}\vec{B}\cdot d\vec{l}=\mu\mu_0\varepsilon\varepsilon_0\frac{\partial}{\partial t}\int_{\Sigma}\vec{E}\cdot d\vec{s};$$

(II) $\Rightarrow$

$$\frac{\partial B_z}{\partial x}=-\mu\mu_0\varepsilon\varepsilon_0\frac{\partial E_y}{\partial t}\qquad (2a)$$

… а теперь дифференцируем эти равенства по координате: $\frac{\partial}{\partial x}(...)$

и, меняя последовательность дифференцирования в правой части, делаем подстановки

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} = -\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial B_z}{\partial x}\right) \qquad \frac{\partial^2 B_z}{\partial x^2} = -\varepsilon\varepsilon_0\mu\mu_0\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial E_y}{\partial x}\right)$$

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} = \varepsilon\varepsilon_0\mu\mu_0\frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2} \qquad \frac{\partial^2 B_z}{\partial x^2} = \varepsilon\varepsilon_0\mu\mu_0\frac{\partial^2 B_z}{\partial t^2}$$

Или:

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2} = v^2\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2}, \qquad \frac{\partial^2 B_z}{\partial t^2} = v^2\frac{\partial^2 B_z}{\partial x^2}$$

$$v = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\varepsilon_0\mu\mu_0}}$$

2.3. Важные выводы

1) ***Уравнения для*** $\vec{E} = \vec{E}(x,t)$ ***и*** $\vec{B} = \vec{B}(x,t)$ ***идентичны;***

2) Фазовая скорость $\upsilon = \dfrac{1}{\sqrt{\varepsilon\varepsilon_0\mu\mu_0}}$,

и даже БЕЗ СРЕДЫ (ε = 1, μ = 1) получаем ⇒ $c = \dfrac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}} \approx 3\cdot 10^8\ м/с$!

Свет – электромагнитная волна! $n = \sqrt{\varepsilon\mu}\,;\quad \upsilon = c/n$

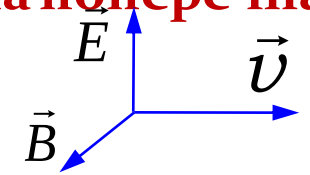
3) Решения ?? Например:

$$\vec{E}(x,t) = \vec{E}_0 \cdot \cos(\omega t - kx)$$

$$\vec{B}(x,t) = \vec{B}_0 \cdot \cos(\omega t - kx)$$

Продольная или поперечная ?

Волна поперечная ! ⇐ **только** E_y **и** B_z **в уравнениях!**



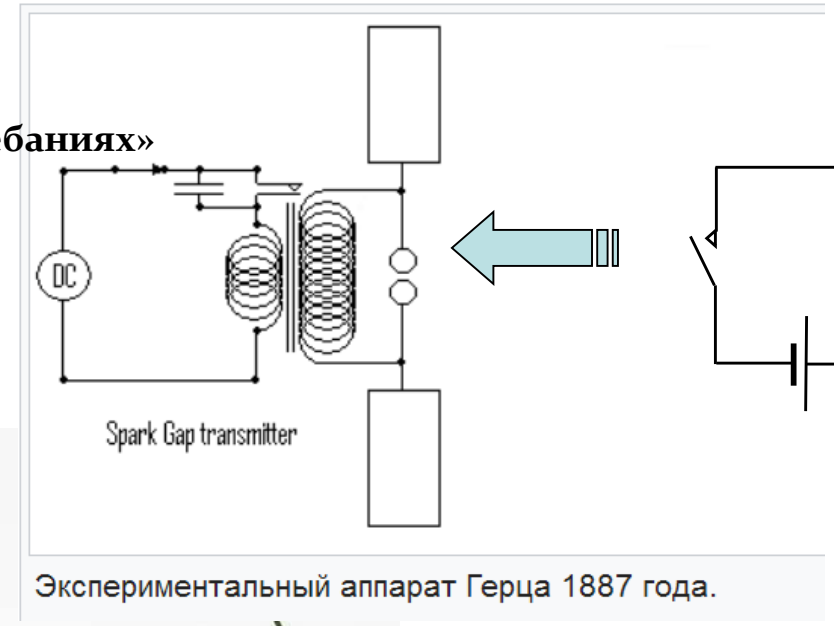
А ещё … ??? ⇒ **п. 2.4.**

Вибратор Герца

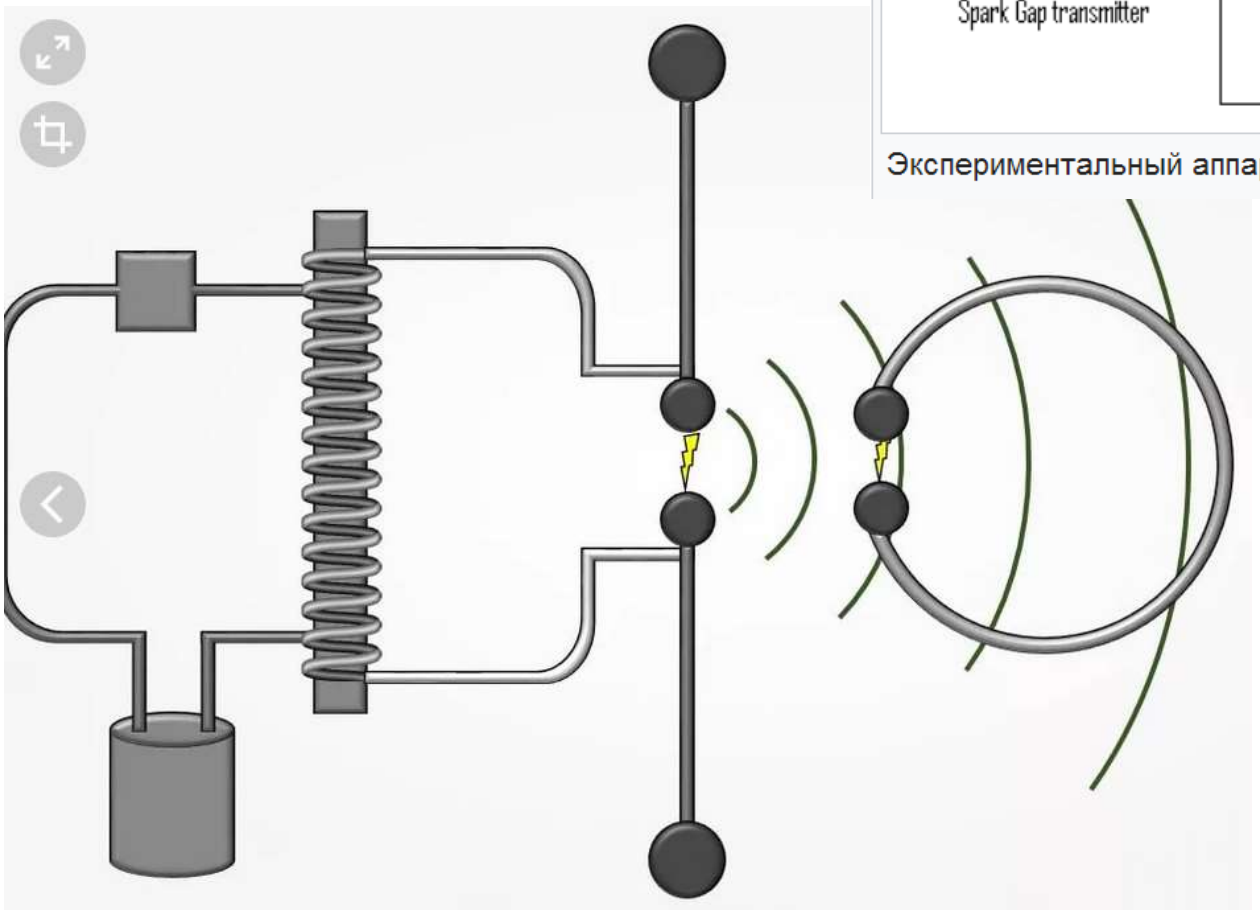
1887: «Об очень быстрых электрических колебаниях»

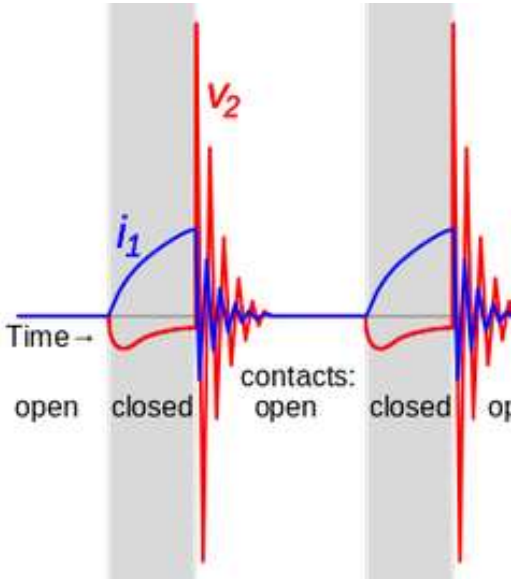
1888: «О лучах электрической силы»

1888: «Об электродинамических волнах в воздухе и их отражении»



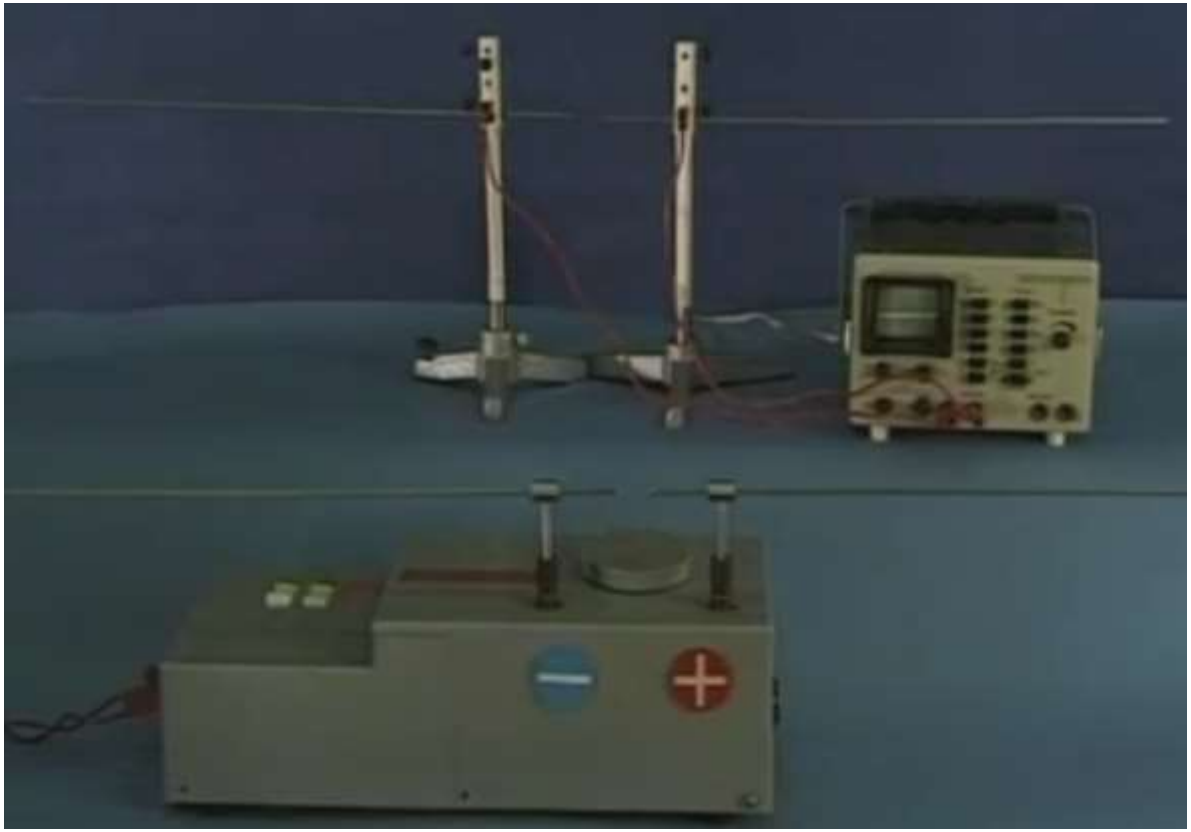
Экспериментальный аппарат Герца 1887 года.





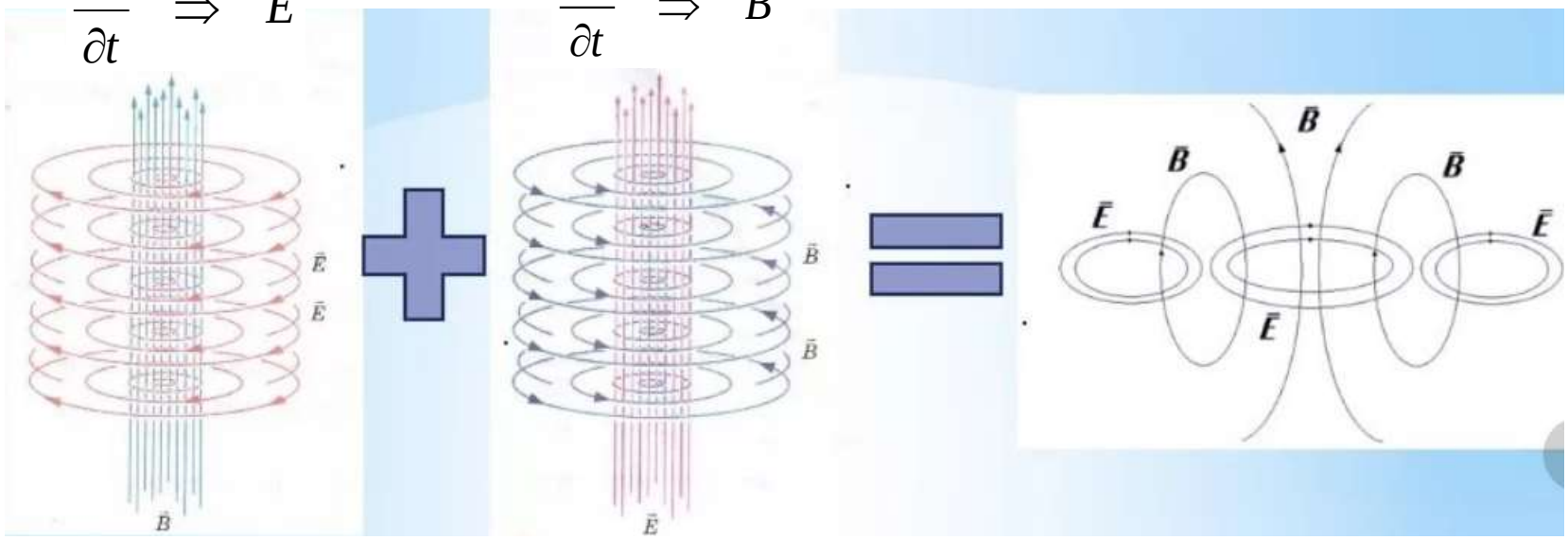
$\approx 30 - 500$ *МГц*

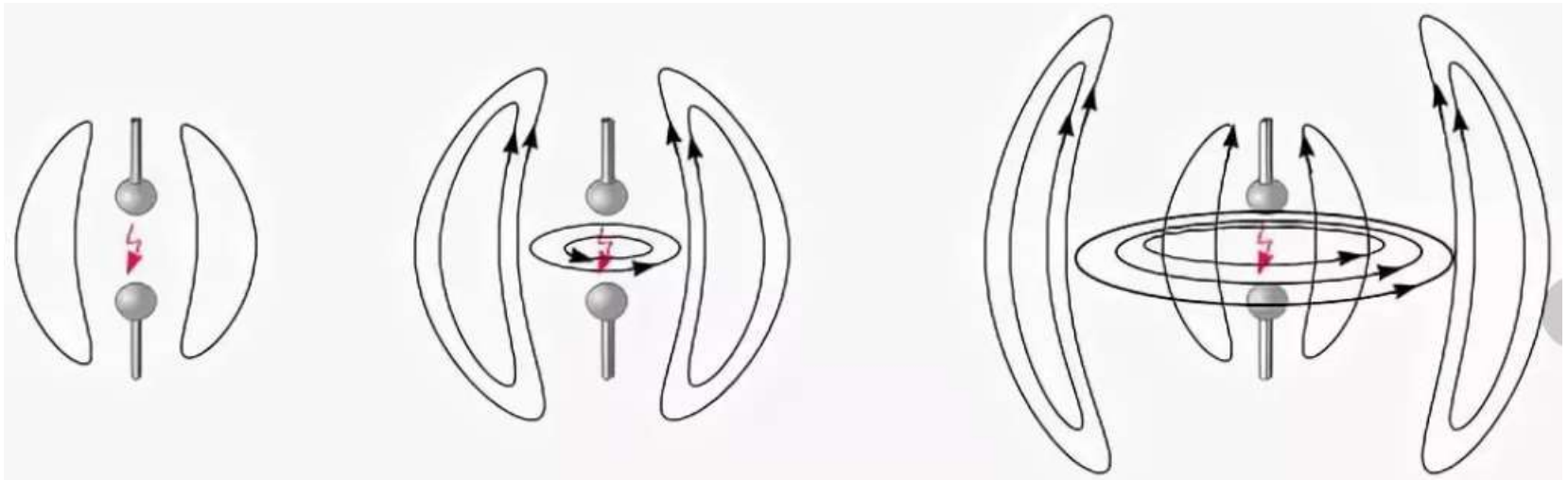
Вибратор Герца, 1887 г.



Связанные электро-магнитные поля

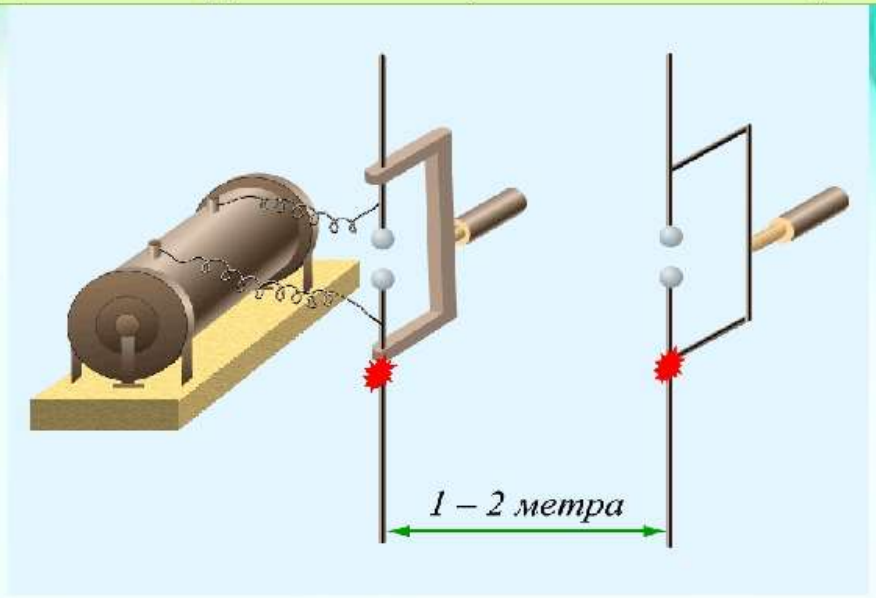
$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \Rightarrow \vec{E} \qquad \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \Rightarrow \vec{B}$$

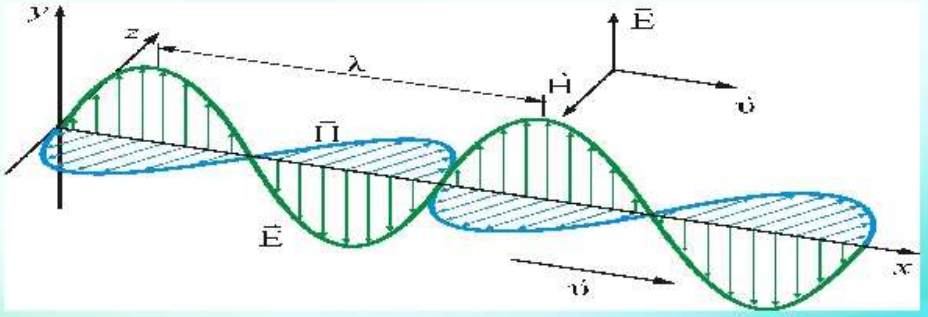




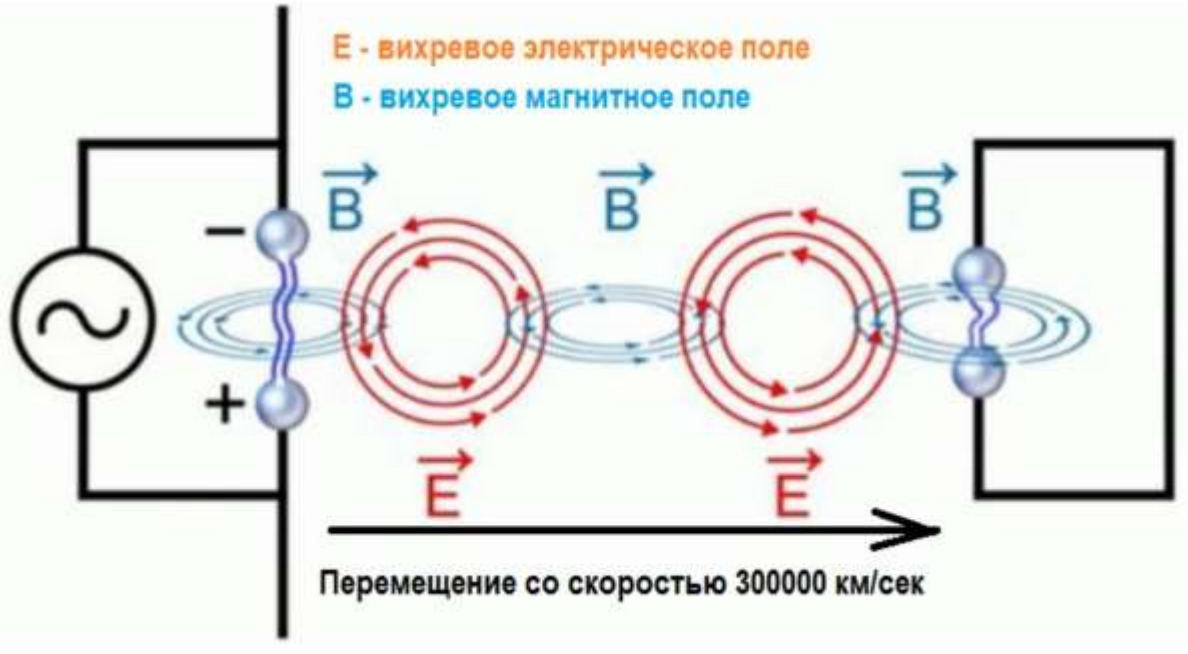
Открытие Герца

Опыт Герца по обнаружению электромагнитных волн (1887 год)





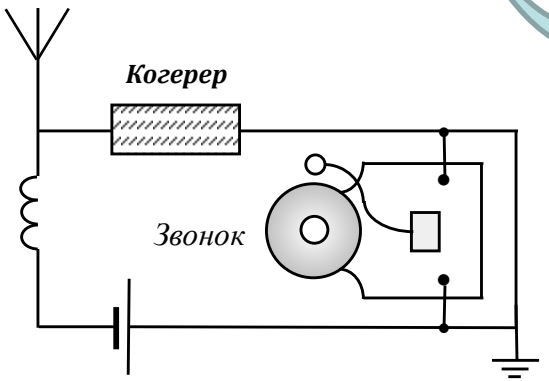
1888: “*Это абсолютно бесполезно. Это только эксперимент, который доказывает, что маэстро Максвелл был прав*” – Г. Герц



Уравнения Максвелла
1862

Открытие Герца
1887

Приёмник Попова
1895

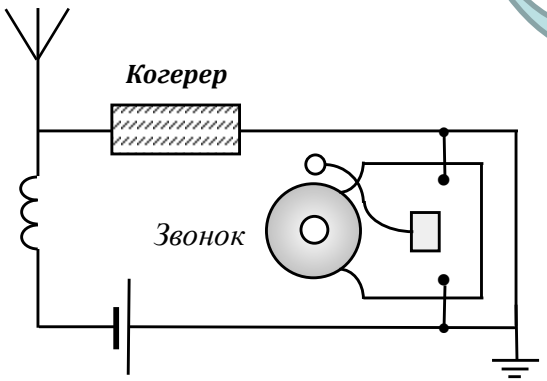








Приёмник Попова 1895







2.4. Фазовые и амплитудные соотношения для электромагнитной волны

$E(x,t) = E_0 \cdot \cos(\omega t - kx)$; $B(x,t) = B_0 \cdot \cos(\omega t - kx + \varphi)$

$\varphi = 0$

$$\frac{\partial E_y}{\partial x} = -\frac{\partial B_z}{\partial t} \quad (1a) \Rightarrow kE_0 \sin(\omega t - kx) = \omega B_0 \sin(\omega t - kx + \varphi)$$

$$\frac{\omega}{k} = v \Rightarrow E_0 = v \cdot B_0$$

но и $E(t) = v \cdot B(t)$

