

6. Закон Кулона. Напряженность электрического поля. Теорема Гаусса.

• Согласно закону Кулона *сила взаимодействия двух точечных зарядов в вакууме пропорциональна их величинам q_1 и q_2 и обратно пропорциональна квадрату расстояния между ними r* . Она направлена вдоль прямой, соединяющей эти заряды. Заряды одного знака отталкиваются, а противоположных знаков – притягиваются. Если заряды помещены в однородную жидкую или газообразную диэлектрическую среду, то сила взаимодействия между ними ослабляется в ε раз, где ε – относительная диэлектрическая проницаемость среды. С учётом этого закон Кулона для силы, действующей на второй заряд со стороны первого, может быть записан в виде (в системе единиц СИ):

$$\mathbf{F}_{21} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{q_1 \cdot q_2}{\varepsilon r^2} \cdot \frac{\mathbf{r}}{r}, \quad (6.1)$$

где \mathbf{r} – радиус-вектор, проведенный от первого заряда ко второму, $\varepsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \text{ Ф/м}$ – электрическая постоянная.

• Взаимодействие неподвижных зарядов осуществляется посредством *электрического поля*. Его основной количественной характеристикой является **вектор напряжённости**, который определяется для данной точки поля (\mathbf{r}) как *отношение силы, действующей на пробный точечный заряд, помещенный в эту точку, к величине заряда $q_{пр}$* :

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{\mathbf{F}(\mathbf{r})}{q_{пр}}. \quad (6.2)$$

Отсюда, очевидно, можно найти силу, действующую со стороны поля на любой точечный заряд q , оказавшийся в данной точке поля:

6. Закон Кулона ...

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = q \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}). \quad (6.3)$$

• В вакууме для электрических полей выполняется **принцип суперпозиции**, согласно которому напряженность электрического поля, создаваемого группой N зарядов в данной точке равна векторной сумме напряженностей электрических полей, созданных каждым из зарядов в этой точке по отдельности:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \sum_{i=1}^N \mathbf{E}_i. \quad (6.4)$$

Для *системы N точечных зарядов* напряженность результирующего поля в вакууме равна:

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^N \frac{q_i}{r_i^2} \frac{\mathbf{r}_i}{r_i}, \quad (6.5)$$

где \mathbf{r}_i - радиус-вектор, проведенный от заряда с номером i в точку наблюдения поля.

Для нахождения напряженности электрического поля, созданного протяженными заряженными телами, необходимо разбить их на малые элементы, являющиеся точечными зарядами. В этом случае заряд распределен непрерывно, и в выражении (6.5) сумма переходит в интеграл. Для одномерных заряженных тел (стержни, нити) удобно использовать понятия линейной плотности заряда:

$$\lambda = \frac{dq}{dl}. \quad (6.6)$$

Напряженность в интересующей нас точке равна в этом случае:

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_L \frac{\lambda}{r^2} \frac{\mathbf{r}}{r} dl. \quad (6.7)$$

Интегрирование ведется по всем элементам dl вдоль заряженной нити (L). При распределении заряда по поверхности или объему

тела вводятся соответственно поверхностная и объемная плотности заряда

$$\sigma = \frac{dq}{dS} \quad \text{и} \quad \rho = \frac{dq}{dV}, \quad (6.8)$$

смысл которых очевиден.

• Решение задач о нахождении вектора \mathbf{E} для электрических полей, созданных протяженными заряженными телами с плоской, цилиндрической и сферической симметрией, существенно упрощается при использовании вытекающей из закона Кулона **теоремы Гаусса:**

Поток вектора напряженности электрического поля Φ_E в вакууме через любую замкнутую поверхность Σ пропорционален алгебраической сумме зарядов, расположенных в области пространства Ω , ограниченной этой поверхностью. Коэффициент пропорциональности в системе СИ равен $\frac{1}{\epsilon_0}$:

$$\Phi_E = \frac{1}{\epsilon_0} \sum_{i=1}^N q_i. \quad (6.9)$$

Напомним, что потоком $d\Phi$ вектора \mathbf{E} через элемент поверхности dS является величина: $d\Phi = E_n dS$, где E_n – проекция вектора \mathbf{E} на нормаль \mathbf{n} к элементу поверхности dS .

С учетом этого, утверждение теоремы Гаусса (6.9) можно переписать окончательно в виде:

$$\oint_{\Sigma} E_n dS = \frac{1}{\epsilon_0} \sum_{i=1}^N q_i, \quad (6.10)$$

где N – число частиц или тел с зарядами q_i в области пространства Ω , охваченной поверхностью Σ .

6. Закон Кулона ...

Или, если заряд распределён в этой области пространства непрерывно с объемной плотностью $\rho(\mathbf{r})$, то

$$\oint_{\Sigma} E_n dS = \frac{1}{\epsilon_0} \int_{\Omega} \rho(\mathbf{r}) dV . \quad (6.11)$$

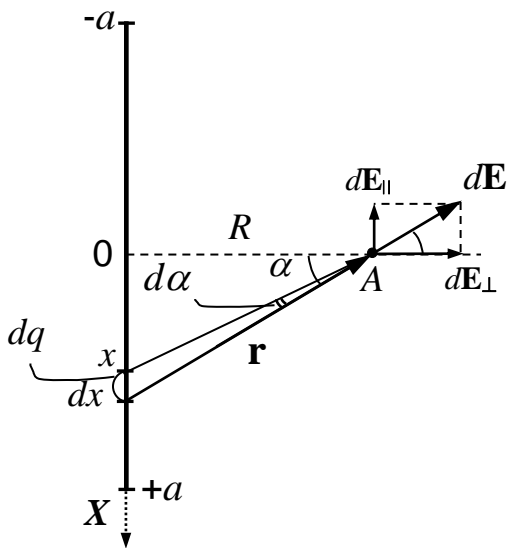
• Задачи этого раздела, как правило, связаны с нахождением напряжённости электрического поля от группы точечных зарядов или от протяженных заряженных тел. Подход, использующий принцип суперпозиции (соотношения 6.5), применим для любых задач, хотя решение в аналитическом виде возможно лишь для задач, обладающих определённой симметрией. *При использовании теоремы Гаусса наличие симметрии является принципиальным моментом*, ибо решение всегда построено на расчёте поверхностного интеграла в 6.11, сводящегося к произведению модуля вектора \mathbf{E} на площадь части поверхности Σ , для которой рассчитывается поток вектора напряжённости Φ_E .

Примеры решения задач

6.1. Найти напряженность электрического поля, создаваемого равномерно заряженным тонким стержнем длиной $2a$, в точке A , находящейся на перпендикуляре к стержню на расстоянии R от его середины. Линейная плотность заряда на стержне $\lambda > 0$.

Решение.

В этом примере воспользуемся принципом суперпозиции электрических полей и разобьём стержень на малые элементы dx ($dx \ll R$). Из точки A они представляются точечными зарядами величиной $dq = \lambda dx$.



Напряженность электрического поля, создаваемого в точке A всеми элементами стержня определяется соотношением (6.7). При интегрировании вдоль стержня (L), очевидно, будут складываться векторы $d\mathbf{E}$ различного направления.

Разобьем эти векторы на две компоненты $d\mathbf{E}_\perp$ и $d\mathbf{E}_\parallel$. Тогда

$$\mathbf{E} = \int_L d\mathbf{E} = \int_L d\mathbf{E}_\perp + \int_L d\mathbf{E}_\parallel.$$

В силу симметрии задачи сумма векторов $d\mathbf{E}_\parallel$ от всех участков стержня равна нулю, и задача существенно упрощается:

$$\mathbf{E} = \int_L d\mathbf{E}_\perp.$$

Так как теперь складываются только сонаправленные векторы $d\mathbf{E}_\perp$, то можно перейти к суммированию их модулей:

$$E = \int_L dE_\perp = \int_L (dE \cos \alpha) = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \int_L \frac{\cos \alpha dx}{r^2}. \quad (*)$$

Для интегрирования удобно перейти к одной переменной – углу α . Выразим для этого координату элемента стержня:

$$x = R \operatorname{tg} \alpha.$$

Отсюда:
$$dx = \frac{R}{\cos^2 \alpha} d\alpha.$$

Подставляя в равенство (*) $r^2 = R^2 / \cos^2 \alpha$, получаем:

$$E = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 R} \int_{-\alpha_0}^{+\alpha_0} \cos \alpha d\alpha = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 R} \sin \alpha_0,$$

где $\sin \alpha_0 = \frac{a}{\sqrt{a^2 + R^2}}$. Отсюда окончательно:

$$\mathbf{E} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 R} \cdot \frac{a}{\sqrt{a^2 + R^2}} \mathbf{e}_\perp.$$

Если стержень очень длинный (“бесконечный”, $a \rightarrow \infty$), то:

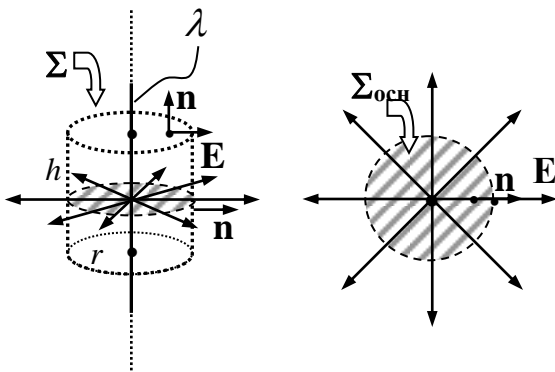
$$E = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 R}. \quad (6.12)$$

Задача

6.2. Решить ту же задачу для бесконечного стержня, используя теорему Гаусса.

Решение.

Задача обладает цилиндрической симметрией, в соответствие с которой линии электрического поля могут представлять собой либо окружности в плоскости перпендикулярной стержню и с центрами на нём, либо иметь радиальное направление в указанной плоскости. С учётом свойств электростатического поля силовые линии не могут быть замкнутыми, следовательно,



остаётся вариант с радиальным расположением (см. рис.).

Далее, нужно выбрать замкнутую поверхность интегрирования Σ в (6.9), чтобы на её отдельных участках вектор \mathbf{E}

был перпендикулярен нормали к поверхности, а на других параллелен ей и постоянен по модулю. Таким свойством обладает цилиндр, коаксиальный с рассматриваемым стержнем, который сверху и снизу закрыт круговыми основаниями ($\Sigma_{\text{очн}}$).

Поток вектора \mathbf{E} через такую замкнутую поверхность:

$$\Phi_E = \oint_{\Sigma} \mathbf{E}_n dS = \int_{\Sigma_{бок}} \mathbf{E}_n dS + \int_{\Sigma_{осн}} \mathbf{E}_n dS. \quad (1)$$

На боковой поверхности цилиндра $\mathbf{E} \parallel \mathbf{n}$ и $\mathbf{E}_n \cdot dS = E \cdot dS$. Кроме того, из соображений цилиндрической симметрии модуль E постоянен на боковой поверхности. Следовательно

$$\oint_{\Sigma_{бок}} \mathbf{E}_n dS = E(r) \int_{\Sigma_{бок}} dS = E(r) \cdot S_{бок} = E(r) \cdot 2\pi r h.$$

На основаниях цилиндра $\mathbf{E} \perp \mathbf{n}$ и $\mathbf{E}_n \cdot dS = 0$.

Таким образом, поверхностный интеграл удалось представить в виде произведения скалярных величин:

$$\Phi_E = E(r) \cdot 2\pi r h. \quad (2)$$

Согласно теореме Гаусса: $\Phi_E = \frac{1}{\varepsilon_0} \lambda h$.

Отсюда: $E(r) = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}$,

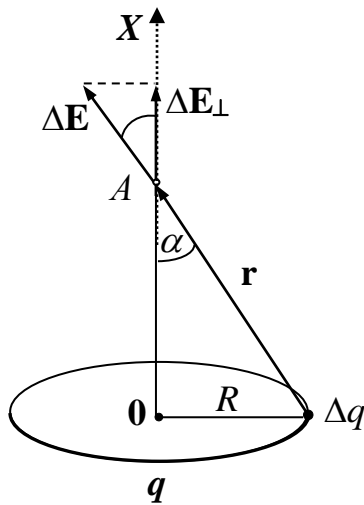
что совпадает с результатом, полученным в задаче 6.1*).

Отметим, что *ключевым моментом* в проведенном решении является переход от интеграла (1) к произведению (2), основанный *на анализе симметрии задачи и невозможный при произвольной форме заряженного тела.*

Задача

6.3. Определить напряженность электрического поля $E(x)$ на оси равномерно заряженного кольца радиуса R . Заряд кольца q , x – расстояние от центра кольца.

*) С той только разницей, что в задаче 6.1 расстояние от стержня было обозначено буквой R , т.к. буква r использовалась, как обычно, для обозначения радиус-вектора.



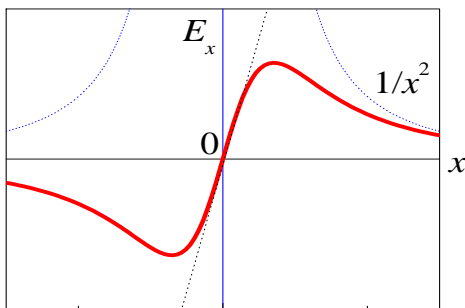
Решение:

При решении задачи воспользуемся принципом суперпозиции. Для этого разобьём кольцо на элементы – точечные заряды Δq , каждый из которых создает в точке A напряженность

$$\Delta \mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\Delta q}{r^2} \cdot \frac{\mathbf{r}}{r} = \frac{\Delta q}{4\pi\epsilon_0 (R^2 + x^2)} \cdot \frac{\mathbf{r}}{r}.$$

Вследствие симметрии задачи вклад в общую напряженность дадут лишь составляющие напряженности $\Delta \mathbf{E}_\perp$ (сравните со случаем задачи 6.1). Поэтому напряженность в точке A будет определяться только суммой этих составляющих $\Delta \mathbf{E}_\perp$ по всем элементам кольца:

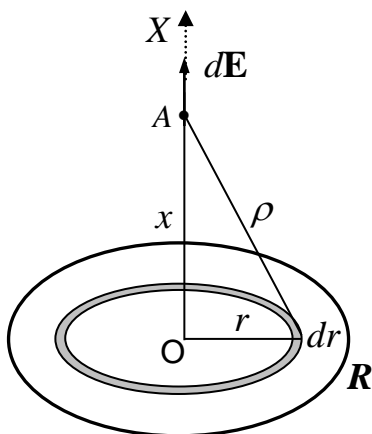
$$E(x) = \sum (\Delta E \cos \alpha) = \sum \frac{\Delta q x}{4\pi\epsilon_0 (R^2 + x^2)^{3/2}} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{x}{(R^2 + x^2)^{3/2}}.$$



Зависимость проекции на ось X вектора напряжённости E_x представлена на графике. Видно, что на малых расстояниях от центра кольца эта зависимость *линейная*, на больших – обратно пропорциональна квадрату расстояния (кольцо “становится” точечным зарядом). Направлен вектор \mathbf{E} вдоль оси X .

Задача

6.4. Определить напряженность электрического поля \mathbf{E} на оси тонкого равномерно заряженного диска радиуса R . Поверхностная плотность заряда диска равна σ .



Решение:

При решении этой задачи воспользуемся также принципом суперпозиции. Для этого диск разбивается на кольца радиуса r и шириной dr . Тогда для напряженности поля такого кольца $dE(x)$ можно записать (см. задачу 6.3):

$$dE = \frac{x dq}{4\pi\epsilon_0 (r^2 + x^2)^{3/2}},$$

где $dq = \sigma dS = \sigma 2\pi r dr$. Выражение для напряженности поля диска получается интегрированием dE по всем значениям r от 0 до R :

$$E(x) = \int_0^R \frac{2\pi r \sigma x}{4\pi\epsilon_0 (r^2 + x^2)^{3/2}} dr = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left(1 - \frac{x}{\sqrt{R^2 + x^2}} \right).$$

Нетрудно видеть, что при $R \rightarrow \infty$ получается выражение для напряженности поля бесконечной плоскости: $E = \sigma/2\epsilon_0$.

Задача

6.5. Определить напряженность поля $E(r)$ **внутри** шара радиуса R , объемная плотность заряда которого $\rho(r) = \alpha r^{1/2}$, где α – коэффициент пропорциональности, r – расстояние от центра шара. Диэлектрическая проницаемость материала шара равна ϵ .

Решение:

Исходя из радиальной симметрии электрического поля, выберем замкнутую поверхность Σ – сферу с центром, совпадающим с центром шара и с радиусом $r < R$. Для такой поверхности поток вектора напряженности можно представить в виде

$$\Phi_E = \oint_{\Sigma} E_n dS = E(r) \oint_{\Sigma} dS = E(r) \cdot 4\pi r^2.$$

6. Закон Кулона ...

Сумма зарядов, оказавшихся внутри поверхности Σ , равна

$$\int_{\Omega} \rho dV = 4\pi\alpha \int_0^r r^2 \sqrt{r} dr = \frac{8\pi\alpha}{7} r^{7/2}.$$

Согласно теореме Гаусса, можно записать:

$$E(r) \cdot 4\pi r^2 = \frac{1}{\varepsilon_0 \varepsilon} \frac{8\pi\alpha}{7} r^{7/2} \quad \text{откуда} \quad E(r) = \frac{2\alpha}{7\varepsilon\varepsilon_0} r^{3/2}.$$

Задачи для самостоятельного решения.

6.6. Найти силу, действующую на точечный заряд $q = 3 \cdot 10^{-7}$ Кл, расположенный в центре равномерно заряженного полукольца радиуса $R = 0,2$ м и имеющего заряд $Q = 10^{-5}$ Кл.

6.7. Определить напряженность электрического поля E вдоль оси однородно заряженного тонкого прямого стержня длиной $l = 0,5$ м с зарядом $q = 10^{-6}$ Кл на расстоянии $x = 0,5$ м от конца стержня.

6.8. * Определить силу взаимодействия точечного заряда q с заземленной металлической пластинкой, находящейся на расстоянии a от заряда. Найти поверхностную плотность заряда $\sigma(r)$ на пластинке и полную величину индуцированного заряда Q на пластинке. r – расстояние от заряда до соответствующей точки поверхности пластинки. Размеры пластинки много больше расстояния a .

6.9. Полусфера заряжена равномерно с поверхностной плотностью заряда σ . Определить напряженность электрического поля $E(0)$ в центре полусферы.

6.10. Определить, используя теорему Гаусса, напряженность

электрического поля E бесконечной плоскости. Заряд по плоскости распределен равномерно с поверхностной плотностью σ .

6.11. Определить напряженность электрического поля $E(r)$ бесконечного цилиндра *a)* внутри и *б)* вне цилиндра. Заряд распределен внутри цилиндра равномерно с объемной плотностью ρ , r – расстояние от оси цилиндра, диэлектрическая проницаемость материала цилиндра ε .

6.12. Определить напряженность электрического поля $E(r)$ внутри и вне равномерно заряженного шара с объемной плотностью заряда ρ . r – расстояние от центра шара, диэлектрическая проницаемость материала шара ε .

6.13. * Бесконечная плоскость равномерно заряжена с плотностью заряда σ . В плоскости имеется круглое отверстие радиуса R . Найти напряженность электрического поля $E(h)$ в точке, лежащей на перпендикуляре к плоскости, проходящем через центр отверстия на расстоянии h от плоскости.

6.14. * Найти напряженность электрического поля E в сферической полости, однородно заряженного шара с объемной плотностью заряда ρ . Расстояние между центром полости и центром шара равно b .

6.15. С какой силой F (на единицу длины) отталкиваются две одноименно заряженные бесконечно длинные параллельные нити с одинаковой плотностью заряда $\lambda = 3 \text{ мкКл/м}$, находящиеся

6. Закон Кулона ...

на расстоянии $b = 2$ см друг от друга?

6.16. Определить напряженность электрического поля $E(x)$ внутри и вне однородно заряженного плоского слоя толщиной d с плотностью заряда ρ . x – расстояние от плоскости симметрии этого слоя. Диэлектрическая проницаемость материала слоя ε .

6.17. * Пластину, равномерно заряженную с поверхностной плотностью заряда σ , пронизывает поток вектора напряженности электрического поля Φ . Найти составляющую силы F_n , перпендикулярную плоскости пластины, действующую на пластину в этом поле.

6.18. Определить силу притяжения F между двумя разноименно заряженными пластинами с поверхностной плотностью заряда σ . Площадь пластин S . Размеры пластин много больше расстояния между ними.

7. Потенциал. Электроёмкость.

• Поле сил неподвижного точечного заряда q является центральным. Ранее (п.4) было доказано, что любое центральное поле сил потенциально. Потенциальная энергия пробного заряда q_{np} в поле заряда q задается выражением:

$$U_{np}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q}{r} \cdot q_{np}. \quad (7.1)$$

Величина $\varphi(\mathbf{r})$, определяемая как *отношение потенциальной энергии пробного заряда, помещенного в данную точку электрического поля, к значению этого заряда, называется потенциалом*:

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{U_{np}(\mathbf{r})}{q_{np}}. \quad (7.2)$$

Для точечного заряда в вакууме, газообразном или жидком диэлектрике:

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q}{\epsilon r}. \quad (7.3)$$

Очевидно, что потенциал, как и потенциальная энергия, определён с точностью до произвольной постоянной. В (7.3) мы нормировали выражение для потенциала так, что $\varphi \rightarrow 0$, когда $r \rightarrow \infty$. Это можно сделать при условии конечного распределения зарядов. Для гипотетических задач типа бесконечной заряженной нити или плоскости $\varphi \rightarrow \pm \infty$ при $r \rightarrow \infty$, и необходима иная нормировка.

Если пробный заряд перемещается из положения 1 в положение 2, то силы электростатического поля совершают работу:

$$A_{12} = U_{np}(\mathbf{r}_1) - U_{np}(\mathbf{r}_2) = q_{np}[\varphi(\mathbf{r}_1) - \varphi(\mathbf{r}_2)] \equiv q_{np}(\varphi_1 - \varphi_2). \quad (7.4)$$

7. Потенциал. Емкость.

Выражение $\varphi_1 - \varphi_2$ называется разностью потенциалов точек 1 и 2 электростатического поля. Из сравнения формул (4.2) и (7.4) следует, что:

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \int_1^2 (\mathbf{E}, d\mathbf{l}), \quad (7.5)$$

В разделе 4 была установлена связь между силой и потенциальной энергией (формула 4.8: $\mathbf{F} = -\text{grad } U$). Отсюда непосредственно вытекает следующее соотношение:

$$\mathbf{E} = -\text{grad } \varphi, \quad (7.6)$$

которое позволяет найти вектор \mathbf{E} в каждой точке пространства, если задана скалярная функция $\varphi(x, y, z)$.

Пусть имеется система точечных зарядов q_1, \dots, q_N , и соблюдены условия выполнения принципа суперпозиции для напряженностей электрических полей, создаваемых этими зарядами. Тогда можно записать принцип суперпозиции для потенциалов:

$$\varphi(\mathbf{r}) = \sum_{i=1}^N \varphi_i(\mathbf{r}), \quad (7.7)$$

где $\varphi_i(\mathbf{r})$ – потенциал поля i -го заряда, создаваемого им в отсутствие остальных зарядов.

Для системы точечных зарядов

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^N \frac{q_i}{|\mathbf{r}_i|}, \quad (7.8)$$

где \mathbf{r}_i – радиус-вектор, проведенный от заряда с номером i до точки наблюдения.

Для протяженных тел, также как и в случае расчета напряженности электрического поля, тело разбивается на малые

участки, которые представляются из точки наблюдения точечными зарядами. Затем находится потенциал, создаваемый каждым из участков, и эти вклады суммируются. Таким образом, при линейном распределении заряда потенциал в точке наблюдения будет равен соответственно:

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_L \frac{\lambda dl}{|\mathbf{r}|}; \quad (7.9)$$

- **Электроёмкость.**

Если два проводника, несущие заряды q и $-q$ разделены вакуумом, жидким или газообразным диэлектриком, напряженность электрического поля \mathbf{E} этих проводников в любой точке пропорциональна заряду q . Следовательно, (*в отсутствие иных зарядов*) и разность потенциалов между проводниками:

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \int_1^2 (\mathbf{E}, d\mathbf{l}) = \frac{1}{C} \cdot q. \quad (7.10)$$

Коэффициент пропорциональности $1/C$ *зависит только от формы, размеров проводников и от диэлектрических свойств среды.*

Параметр C называют *электроёмкостью* или просто *ёмкостью* такой системы проводников.

Очевидно, необходимым условием однозначности электроёмкости системы проводников-обкладок является близость расположения обкладок по сравнению с их размерами. Этим достигается *независимость электрического поля между проводниками от внешних полей.* Именно это обстоятельство учтено в определении:

Конденсатором называется система двух проводников, образующих изолированное от других тел электрическое поле при зарядении их равными и противоположными по знаку зарядами.

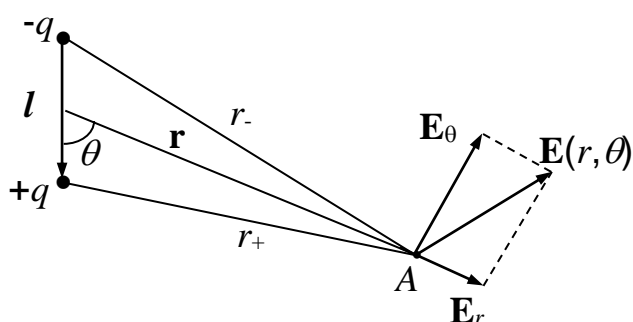
7. Потенциал. Емкость.

Аналитически ёмкость можно вычислить, используя соотношения (7.10), для ограниченного числа систем, обладающих плоской, цилиндрической или сферической симметрией.

- При решении задач о нахождении потенциала электрического поля или разности потенциалов возможны два подхода. Первый основан на использовании принципа суперпозиции для потенциалов (формулы 7.8 и 7.9). Вторым, использующий соотношение (7.5), применим, когда известно явное выражение для вектора напряженности \mathbf{E} как функции координат. При расчёте электроёмкости всегда реализуется второй подход, причём напряжённость электрического поля между электродами определяется с помощью теоремы Гаусса.

Примеры решения задач

7.1. Найти потенциал φ и модуль E напряженности поля диполя как функции r и θ (r – расстояние от центра диполя, θ – угол между осью диполя и направлением от центра диполя к данной точке). Дипольный момент равен $p = ql$, l – “плечо диполя”. Считать $r \gg l$.



Решение:

Потенциал в точке A определяется суммой потенциалов поля каждого из зарядов ($+q$ и $-q$):

$$\begin{aligned}\varphi(r, \theta) &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_+} - \frac{1}{r_-} \right) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r - l/2 \cos \theta} - \frac{1}{r + l/2 \cos \theta} \right) \approx \\ &\approx \{ \text{при условии } r \gg l \} \approx \frac{ql \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{p \cdot \cos \theta}{r^2}.\end{aligned}$$

Полученное выражение для потенциала справедливо при $r \gg l$.

Проекции напряженности электрического поля E_r и E_θ могут быть представлены как составляющие вектора $\mathbf{grad} \varphi$ в полярных координатах:

$$E_r = -\frac{\partial \varphi}{\partial r} = \frac{p \cos \theta}{2\pi\epsilon_0 r^3}; \quad E_\theta = -\frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} = \frac{p \sin \theta}{4\pi\epsilon_0 r^3}.$$

Модуль напряженности

$$E(r, \theta) = \sqrt{E_r^2 + E_\theta^2} = \frac{p}{4\pi\epsilon_0 r^3} \sqrt{1 + 3 \cos^2 \theta}.$$

Задача

7.2. Определить потенциал и напряженность электрического поля, созданного равномерно заряженным тонким кольцом на оси, проходящей через центр кольца перпендикулярно плоскости, в которой лежит кольцо. Радиус кольца R , его заряд q .

Решение:

Воспользуемся принципом суперпозиции для потенциала. Как и при решении задачи 6.3 кольцо разбивается на точечные заряды Δq_i каждый из которых в точке A создает поле с потенциалом

$$\varphi_i = \frac{\Delta q_i}{4\pi\epsilon_0 r} = \frac{\Delta q_i}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{(R^2 + x^2)^{1/2}}.$$

Выражение для $\varphi(x)$ (см. рисунок к задаче 6.3) получается суммированием φ_i по всем элементам кольца:

7. Потенциал. Електроёмкость.

$$\varphi(x) = \sum_i \varphi_i = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 (R^2 + x^2)^{1/2}}.$$

Используя связь между напряженностью электрического поля и потенциалом (7.6) $E(x) = -\frac{\partial\varphi}{\partial x}$, получаем напряженность поля:

$$E(x) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{x}{(R^2 + x^2)^{3/2}}.$$

Такое же выражение для напряженности ранее было получено нами непосредственным суммированием вкладов ΔE от малых участков кольца (задача 6.3). Однако при этом пришлось складывать разнонаправленные векторы, что существенно сложнее по сравнению с выше приведенным способом.

Задача.

7.3. Определить потенциал $\varphi(r)$ **внутри** равномерно заряженного по объему шара радиуса R . Объемная плотность заряда ρ , диэлектрическую проницаемость считать равной $\epsilon = 1$.

Решение:

Нормируя потенциал “на бесконечности” $\varphi(\infty) = 0$, и с учетом того, что поле вне шара не отличается от поля точечного заряда, можно определить потенциал на поверхности шара:

$$\varphi(R) = \int_R^{\infty} E(r) dr = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int_R^{\infty} \frac{dr}{r^2} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R} = \frac{\rho R^2}{3\epsilon_0}.$$

Применяя теорему Гаусса для сферы радиусом $r < R$:

$$E(r) \cdot 4\pi r^2 = \frac{1}{\epsilon_0} \cdot \frac{4}{3} \pi r^3 \rho,$$

получаем выражение для напряженности поля внутри шара:

$$E(r) = \frac{\rho r}{3\epsilon_0}.$$

Потенциал в точке поля внутри шара ($r < R$) равен

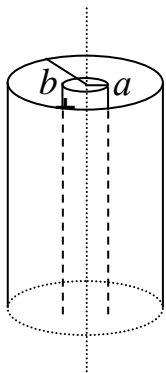
$$\begin{aligned}\varphi(r) &= \int_r^R E(r') dr' + \varphi(R) = \int_r^R \frac{\rho r'}{3\epsilon_0} dr' + \varphi(R) = \\ &= \frac{\rho}{6\epsilon_0} (R^2 - r^2) + \varphi(R) = \frac{\rho}{2\epsilon_0} \left(R^2 - \frac{r^2}{3} \right).\end{aligned}$$

Итак, потенциал в точках поля внутри шара равен:

$$\varphi(r) = \frac{\rho}{2\epsilon_0} \left(R^2 - \frac{r^2}{3} \right).$$

Задача.

7.4. Определить емкость единицы длины коаксиального кабеля (см. рис). Радиус внутренней жилы кабеля $a = 0,5$ мм, радиус оплетки кабеля $b = 3$ мм. Диэлектрическая проницаемость изолятора ϵ .



Решение:

Данная система проводников, по сути, представляет собой *цилиндрический конденсатор*. Если по жиле и оплётке (обкладке) разноименные заряды распределены с линейной плотностью λ , то между ними существует электрическое поле с

напряженностью $E(r) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon\epsilon_0 r}$. Возникшая при этом между

обкладками разность потенциалов будет равна:

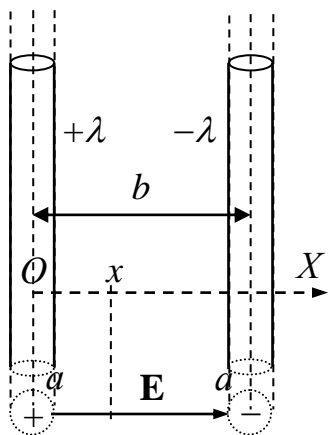
$$\varphi_a - \varphi_b = \int_a^b E(r) dr = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon\epsilon_0} \ln \frac{b}{a}.$$

7. Потенциал. Электроемкость.

Отсюда емкость единицы длины кабеля: $C = \frac{2\pi\epsilon\epsilon_0}{\ln b/a}$.

Задача.

7.5. Два длинных провода радиуса $a = 0,5$ мм расположены в воздухе параллельно друг другу (двухпроводная линия). Расстояние между их осями $b = 10$ мм. Найти электроемкость этой системы проводов C , приходящуюся на единицу их длины.



Решение:

По данным задачи $b \gg a$. Это позволяет считать, что заряды по поверхности проводников распределяются равномерно и напряженность электрического поля между проводами можно найти, используя выражение (6.12) и принцип суперпозиции полей: $\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \mathbf{E}_+(\mathbf{r}) + \mathbf{E}_-(\mathbf{r})$. Для вычисления разности потенциалов между проводами выберем простейший путь – вдоль прямой силовой линии, соединяющей провода. В любой точке с координатой x на этой линии напряженность равна

$$E(x) = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{b-x} \right),$$

и тогда разность потенциалов между проводами:

$$\varphi_a - \varphi_b = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \left(\int_a^{b-a} \frac{dx}{x} + \int_a^{b-a} \frac{dx}{b-x} \right) = \frac{\lambda}{\pi\epsilon_0} \ln \frac{b-a}{a}.$$

Отсюда при $b \gg a$ получим $C \approx \frac{\pi\epsilon_0}{\ln b/a} \approx 9,3$ нФ/м.

Задачи для самостоятельного решения.

7.6. Найти потенциал φ в центре полусферы радиуса R , заряженной равномерно с поверхностной плотностью заряда σ .

7.7. Имеется бесконечная плоскость, заряженная равномерно с плотностью заряда σ . Ось X перпендикулярна к плоскости, начало отсчета оси находится в точке её пересечения с плоскостью. *а)* Найти зависимость $\varphi(x)$. *б)* Можно ли нормировать выражение для φ так, чтобы потенциал обращался в нуль на бесконечности?

7.8. * Бесконечная пластина из диэлектрика с проницаемостью ε заряжена однородно с объемной плотностью заряда ρ . Толщина пластины равна $2a$. Ось X перпендикулярна к пластине, начало координат расположено в середине пластины. Найти $\varphi(x)$: *а)* внутри и *б)* вне пластины. (Потенциал в середине пластины положить равным нулю). Пластина находится в воздухе.

7.9. а) Могут ли силовые линии электрического поля (в той его части, где отсутствуют электрические заряды) пересекаться между собой? *б)* Могут ли пересекаться или соприкасаться эквипотенциальные линии (поверхности), соответствующие различным потенциалам?

7.10. Определить разность потенциалов $\Delta\varphi$ между двумя коаксиальными цилиндрами радиусов R_1 и R_2 , равномерно заряженными противоположными по знаку зарядами с линейной плотностью λ . Краевыми эффектами пренебречь.

7. Потенциал. Емкость.

7.11. Разность потенциалов между двумя коаксиальными цилиндрами с радиусами R_1 и R_2 равна U_0 . Выразить через U_0 разность потенциалов $U(r)$ между внутренним цилиндром радиуса R_1 и точками, находящимися на расстоянии r от оси цилиндров ($R_1 < r < R_2$).

7.12. * Накаленная нить катода радиолампы испускает электроны, которые под действием электрического поля ускоренно движутся к цилиндру, по оси которого натянута нить. Радиусы цилиндра и нити равны соответственно $R_1 = 5$ мм и $R_2 = 0,05$ мм. Разность потенциалов между цилиндром и нитью $\Delta\varphi = 91$ В. Пренебрегая начальной скоростью электронов, определить ускорение a и скорость электронов V в точке, отстоящей от оси нити на расстоянии $r = 3,5$ мм. Заряд электрона $e = -1,6 \cdot 10^{-19}$ Кл, его масса $m_e = 9,1 \cdot 10^{-31}$ кг.

7.13. * Найти силу взаимодействия двух молекул воды, расположенных на расстоянии $r = 5$ нм друг от друга. Дипольные моменты молекул \mathbf{p}_1 и \mathbf{p}_2 расположены вдоль одной прямой и равны по величине $p = 0,62 \cdot 10^{-29}$ Кл·м.

7.14. Получить выражения для емкости: а) плоского конденсатора с площадью пластин S и расстоянием d между ними; б) цилиндрического (на единицу длины). Радиусы цилиндров R_1 и R_2 ; в) сферического конденсатора с радиусами сфер R_1 и R_2 ; $R_2 > R_1$. Конденсаторы заполнены диэлектриком с диэлектрической проницаемостью ϵ .

7.15. * Между пластинами плоского воздушного конденса-

тора создается электрическое поле E_0 . Затем половина зазора между пластинами заполняется однородным диэлектриком с проницаемостью ε . Найти значения напряженности поля E_1 и E_2 в двух образовавшихся *параллельно соединенных* конденсаторах. Рассмотреть два случая: а) напряжение между обкладками не меняется; б) остаются неизменными заряды на обкладках.

7.16. * Решить задачу, аналогичную предыдущей, с тем отличием, что диэлектриком заполняется половина зазора между пластинами параллельно плоскости пластин.

7.17. * Цилиндрический конденсатор заполнен двумя коаксиальными цилиндрическими слоями изоляторов с диэлектрической проницаемостью ε_1 и ε_2 и “пробивными напряженностями” E_1 и E_2 . При каком соотношении между радиусами внутренней обкладки конденсатора и границы раздела изоляторов R_1 и R_2 напряженность поля будет одновременно достигать значения, соответствующего пробоем в обоих диэлектриках?

7.18. * Площадь каждой обкладки плоского конденсатора $S = 1 \text{ м}^2$, расстояние между обкладками $d = 5 \text{ мм}$. Зазор между обкладками заполнен диэлектриком, проницаемость которого изменяется в направлении перпендикулярном обкладкам по линейному закону от значения $\varepsilon_1 = 2$ вблизи одной обкладки до $\varepsilon_2 = 5,44$ вблизи другой. Определить емкость такого конденсатора.

7.19. * Радиусы обкладок сферического конденсатора $R_1 = 9 \text{ см}$ и $R_2 = 11 \text{ см}$. Зазор между обкладками заполнен диэлектриком, проницаемость которого изменяется с расстоянием r по закону $\varepsilon = 2 (R_1/r)$. Найти емкость этого конденсатора.

8. Энергия электростатического поля.

8. Энергия электростатического поля.

• Определим энергию заряженного конденсатора. Для этого рассчитаем работу по разделению зарядов между его обкладками. Элементарная работа внешних сил (см. 7.4) по перемещению заряда dq в электрическом поле равна:

$$dA = \Delta\varphi \cdot dq = \frac{q}{C} \cdot dq^*), \quad (8.1)$$

где $\Delta\varphi$ – разность потенциалов между обкладками. Полная работа определяется суммированием элементарных работ, т.е. интегрированием выражения (8.1):

$$A = \int_0^Q \frac{q}{C} dq = \frac{Q^2}{2C}. \quad (8.2)$$

Эта работа и определяет энергию «запасенную» в конденсаторе. Используя ещё раз связь заряда Q на обкладках конденсатора с разностью потенциалов $\Delta\varphi$ между ними, можно записать энергию в виде:

$$U = \frac{C(\Delta\varphi)^2}{2}, \quad (8.3)$$

• По современным представлениям, эта *энергия сосредоточена в электрическом поле*. Поэтому выразим ее через *характеристику самого поля – напряженность E* . Используя (8.3), выразим энергию плоского конденсатора через напряженность электрического поля в нем:

$$U_E = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 S}{d} \cdot \frac{(Ed)^2}{2} = \frac{\varepsilon\varepsilon_0}{2} E^2 Sd = \frac{\varepsilon\varepsilon_0}{2} E^2 V, \quad (8.4)$$

где V – объем конденсатора.

Определим *энергию, приходящуюся на единицу объема пространства*, где есть электрическое поле. Поле внутри конденсатора однородно, поэтому с учетом $Sd = V$ получаем:

*) Здесь было использовано определение электроёмкости конденсатора $C = q/\Delta\varphi$.

$$w_E(\mathbf{r}) = \frac{\Delta U_E}{\Delta V} = \frac{\varepsilon \varepsilon_0}{2} E^2(\mathbf{r}). \quad (8.5)$$

Величина w_E называется *объемной плотностью энергии* электрического поля. В случае неоднородного поля она позволяет определять энергию, заключенную в малых элементах пространства объемом dV : $dU_E = w dV$. А зная напряженность поля как функцию координат, можно рассчитать полную энергию электрического поля в той или иной области пространства Ω :

$$U_E = \frac{\varepsilon_0}{2} \int_{\Omega} \varepsilon E^2(\mathbf{r}) dV. \quad (8.6)$$

- Задачи данного раздела, как правило, связаны с нахождением энергии электрического поля заряженных тел, а также изменения энергии конденсатора при его перезарядке, перемещении обкладок, заполнении пространства между обкладками диэлектриком.

Примеры решения задач

8.1. Заряд $q = 1$ мкКл равномерно распределен по объему шара радиуса $R = 1$ см. Рассчитать

- энергию электрического поля U_1 в окружающем шар пространстве;
- энергию U_2 , заключенную в пространстве внутри шара;
- полную энергию электрического поля U , связанную с шаром.
- Какая часть энергии приходится на область пространства за пределами концентрической с шаром сферы радиуса $R_1 = 1$ м.

Принять диэлектрическую проницаемость материала шара и окружающей среды равной $\varepsilon = 1$.

Решение:

a) Объемная плотность энергии электрического поля определяется выражением (8.5). Используя теорему Гаусса,

8. Энергия электростатического поля.

легко получить напряженность электрического поля. *Вне шара* она равна:

$$E(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2},$$

где r – расстояние от центра шара, q – полный заряд шара. Для вычисления интеграла (8.5) разобьем пространство на тонкие сферические слои радиуса r и толщиной dr . Объем такого слоя равен $dV = 4\pi r^2 dr$. Плотность энергии зависит только от радиуса и, следовательно, постоянна в пределах слоя. Энергия поля, заключенная в пределах слоя равна:

$$dU = w dV = \frac{1}{2} \left(\frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 r^2} \right) dr.$$

Выражение для полной энергии электрического поля *вне шара* получается интегрированием dU_E в пределах от R до ∞ :

$$U_1 = \frac{q^2}{2(4\pi\epsilon_0)^2} \int_R^{\infty} \frac{dr}{r^2} = \frac{1}{2} \left(\frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 R} \right) = 0,45 \text{ Дж.}$$

b) Напряженность электрического поля E *внутри шара* равна

$$E(r) = \frac{\rho r}{3\epsilon_0} \quad (\text{см. решение задачи 7.3}), \text{ где } \rho \text{ – объемная плотность}$$

заряда. Тогда для сферического слоя внутри шара можно записать:

$$dU = w dV = \frac{\epsilon_0 \rho^2 r^2}{2(3\epsilon_0)^2} \cdot 4\pi r^2 dr = \frac{4\pi \rho^2 r^4}{18\epsilon_0} dr.$$

Таким образом, энергию поля *внутри шара* можно рассчитать, интегрируя dU по объему шара (в пределах от 0 до R):

$$U_2 = \frac{4\pi \rho^2}{18\epsilon_0} \int_0^R r^4 dr = \frac{4\pi \rho^2 R^5}{90\epsilon_0} = \frac{1}{10} \left(\frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 R} \right) = 0,09 \text{ Дж,}$$

где $q = \rho(4/3\pi R^3)$ – полный заряд шара.

с) Полная энергия электрического поля U , связанного с шаром, очевидно, равна сумме:

$$U_E = U_1 + U_2 = \frac{3}{5} \left(\frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 R} \right) = 0,54 \text{ Дж.}$$

Отсюда видно, что 1/6 её часть приходится на область внутри шара, а 5/6 – на окружающее шар пространство.

d) Вне концентрической с шаром сферы радиуса R_1 , поле имеет энергию (см. п. a):

$$U_1 = \frac{q^2}{2(4\pi\epsilon_0)^2} \int_{R_1}^{\infty} \frac{dr}{r^2} = \frac{1}{2} \left(\frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 R_1} \right).$$

Это составляет долю равную $\eta = \frac{U_1}{U} = \frac{R}{R_1} = 0,01$ (1%) от общей

энергии электрического поля, связанного с шаром. Т.е. почти вся энергия поля сосредоточена в пределах сферы радиуса R_1 .

Задачи для самостоятельного решения.

8.2. Определить энергию электрического поля U_E проводящего шара радиуса R , несущего заряд q .

8.3. Определить радиус сферы $R_{0,9}$, в пределах которой заключено 90% всей энергии поля проводящей сферы радиуса R , несущей заряд q .

8.4. Какая часть энергии η , связанной с заряженным проводящим шаром радиуса $R_0 = 1 \text{ см}$, заключена в пределах сферы, концентрической с шаром, радиуса $R = 1 \text{ м}$?

8.5. * Заряд $q = 10^{-10} \text{ Кл}$ распределяется равномерно по объему шара радиусом $R = 1 \text{ см}$. Затем, вследствие взаимного отталкивания заряды переходят на поверхность шара. Какую

8. Энергия электростатического поля.

работу A совершают при этом электрические силы над зарядами?
Считать $\varepsilon = 1$.

8.6. Точечный заряд $q = 3 \text{ мкКл}$ помещается в центре сферического слоя из однородного и изотропного диэлектрика с $\varepsilon = 3$. Внутренний радиус слоя $a = 0,25 \text{ м}$, внешний $b = 0,5 \text{ м}$. Найти энергию U_E электрического поля, заключенную в пределах диэлектрического слоя.

8.7. Определить работу A , которую нужно совершить, чтобы увеличить на $\Delta x = 0,2 \text{ мм}$ расстояние между пластинами плоского конденсатора, заряженного разноименными зарядами величины $q = 0,2 \text{ мкКл}$. Площадь каждой пластины $S = 400 \text{ см}^2$, $\varepsilon = 1$.

8.8. Среднее расстояние электрона от ядра в атоме водорода $\langle r \rangle = 0,8 \cdot 10^{-10} \text{ м}$. Оценить: *a)* энергию U_E кулоновского взаимодействия электрона с ядром; *b)* сумму таких энергий U_0 для одного моля атомарного водорода.

8.9. Получить выражение, которое определяет энергию электрического поля U_1 , приходящуюся на единицу длины воздушного цилиндрического конденсатора. Радиус внутреннего цилиндра – a , внешнего – b . Заряд, приходящийся на единицу длины обкладок конденсатора, равен λ .

8.10. Определить зависимость $q(t)$ заряда от времени на конденсаторе ёмкости C при подключении его через сопротивление R к источнику питания с ЭДС ε . Построить график $q(t)$. Определить максимальное значение тока при зарядке конденсатора.

8.11. Определить зависимость заряда $q(t)$ от времени на конденсаторе емкости C после замыкания его на сопротивление R . Начальное значение заряда конденсатора q_0 . Построить график $q(t)$. Определить время τ , за которое заряд уменьшится в e раз.

8.12. Определить время τ , за которое энергия электрического поля конденсатора емкости $C = 1 \text{ мкФ}$ уменьшится в 2 раза. Конденсатор разряжается через сопротивление $R = 1 \text{ кОм}$.

8.13. Две концентрические проводящие сферы радиусами $R_1 = 20 \text{ см}$ и $R_2 = 50 \text{ см}$ заряжены одинаковыми зарядами $q = 100 \text{ нКл}$. Определить энергию U_E электростатического поля, заключенного между этими сферами в диэлектрике с $\varepsilon = 1$.

9. Законы постоянного тока.

- Электрический ток это *упорядоченное* движение заряженных частиц (носителей тока). Количественными характеристиками электрического тока являются *плотность и сила тока*.

- *Плотность электрического тока* – вектор, направление которого совпадает с направлением упорядоченного движения положительных носителей тока, и равный по величине заряду, переносимому в единицу времени через единичную поверхность, перпендикулярную к току:

$$\mathbf{j} = qn\mathbf{V}, \quad (9.1)$$

где q , n и \mathbf{V} – заряд, концентрация и скорость упорядоченного движения частиц.

- *Силой тока* I называется скалярная величина, равная отношению заряда dq переносимого через некоторую поверхность Σ за малый промежуток времени dt , к величине этого промежутка:

$$I = \left. \frac{dq}{dt} \right|_{\Sigma}. \quad (9.2)$$

Зная вектор $\mathbf{j}(\mathbf{r})$ в каждой точке пространства можно найти силу тока через любую поверхность Σ :

$$I = \int_{\Sigma} j_n dS. \quad (9.3)$$

- Опыт показывает, что для многих тел плотность тока в данной точке в широких пределах пропорциональна напряженности электрического поля в той же точке:

$$\mathbf{j}(\mathbf{r}) = \frac{1}{\rho(\mathbf{r})} \mathbf{E}(\mathbf{r}). \quad (9.4)$$

Величина $\rho(\mathbf{r})$ называется *удельным сопротивлением* вещества, из которого сформировано проводящее тело. Соотношение (9.4)

носит название *закона Ома в дифференциальной (локальной) форме.*

• Для поддержания в проводнике *постоянного тока* в каком-то участке цепи должны действовать силы, перемещающие заряды *против сил электростатического поля.* Такие силы, в отличие от кулоновских, называют *сторонними.*

○ *Величина, равная работе сторонних сил по перемещению единичного положительного заряда называется электродвижущей силой (ЭДС), действующей в цепи или на её участке (в источнике тока).*

○ Закон Ома для участка цепи с ЭДС связывает силу тока, протекающего в участке, разность потенциалов на его концах $\varphi_1 - \varphi_2$ и действующую на участке ЭДС \mathcal{E}_{12} :

$$I(R + r) = \varphi_1 - \varphi_2 \pm \mathcal{E}_{12}. \quad (9.4)$$

Здесь $(R + r)$ – полное сопротивление участка цепи. При движении вдоль участка от точки 1 к точке 2 знаки *падения напряжения* $I(R + r)$ и ЭДС \mathcal{E}_{12} выбираются *положительными, если направление тока и ЭДС источника совпадают с направлением обхода.*

Величина $U_{12} = \varphi_1 - \varphi_2 \pm \mathcal{E}_{12}$ называется *электрическим напряжением на участке цепи 1-2.*

○ Закон Ома для *однородного участка цепи* (без ЭДС) устанавливает *прямо пропорциональную зависимость* между током I и приложенным к участку цепи напряжением U_{12} :

$$I = \frac{1}{R} U_{12}, \quad (9.5)$$

где R – *электрическое сопротивление* проводника. Для проводника произвольной формы его *можно рассчитать* так:

9. Законы постоянного тока.

$$R = \int_1^2 \frac{\rho dl}{S}, \quad (9.6)$$

где S – площадь поперечного сечения проводника. В частности, для однородного проводника постоянного сечения длины l :

$$R = \rho \frac{l}{S}. \quad (9.7)$$

- Из опыта известно, что при протекании электрического тока по проводникам часть энергии, приобретаемой зарядами в электрическом поле, переходит в тепло.

Для физически малого элемента проводника выполняется локальное соотношение (*закон Джоуля – Ленца в дифференциальной форме*):

$$\frac{\Delta Q_{\text{уд}}}{\Delta t} = (\mathbf{j}, \mathbf{E}) = \rho j^2 = \frac{1}{\rho} E^2. \quad (9.8)$$

Количество теплоты ΔQ , выделяемое во всем проводнике при протекании по нему тока, определяется законом Джоуля – Ленца (в интегральной форме):

$$\frac{\Delta Q}{\Delta t} = I^2(R + r) = IU_{12} = \frac{U_{12}^2}{R}. \quad (9.9)$$

Отметим, что соотношение (9.9) выполняется в неподвижном проводнике при отсутствии химических реакций.

- С помощью закона Ома в интегральной форме рассчитывают силы токов по заданным величинам ЭДС и полных сопротивлений только в простейших случаях, когда цепь можно свести к одному неразветвленному контуру. Для разветвленных цепей весьма удобно использовать так называемые *правила Кирхгофа*. Из закона сохранения заряда для стационарных токов

следует *первое правило Кирхгофа*:

- алгебраическая сумма токов, сходящихся в узле, равна нулю:

$$\sum_{i=1}^N I_i = 0. \quad (9.10)$$

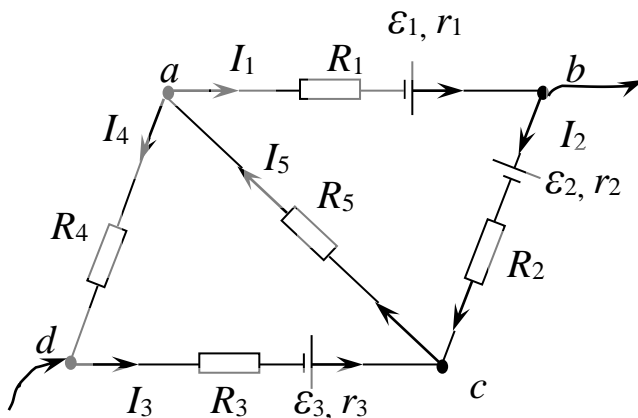
Обычно токам, входящим в узел, приписывают знак плюс, выходящим из узла – минус.

Из закона Ома для неоднородных участков цепи следует *второе правило Кирхгофа*:

- алгебраическая сумма ЭДС, действующих в контуре, равна алгебраической сумме произведений сил токов на полные сопротивления в неразветвленных участках контура.

$$\sum_i \mathcal{E}_i = \sum_i I_i (R_i + r_i). \quad (9.11)$$

Для применения второго правила Кирхгофа выбирается определенное направление обхода контура (по часовой стрелке или против неё). *Знаки ЭДС и токов, входящих в равенства вида (9.11), считаются положительными, если направление обхода контура совпадает с направлением ЭДС и тока. Считается, что ЭДС направлена от отрицательного полюса источника тока к положительному.*



Например, для узла *a* в схеме представленной на рисунке равенство (9.10) запишется в виде:

$$I_5 - I_1 - I_4 = 0.$$

Для контура *abcd* при обходе по часовой стрелке

можно записать второе правило Кирхгофа:

9. Законы постоянного тока.

$$I_1(R_1+r_1) + I_2(R_2+r_2) - I_3(R_3 + r_3) - I_4R_4 = \varepsilon_1 - \varepsilon_2 - \varepsilon_3.$$

Составив систему уравнений (используя правила Кирхгофа), по заданным величинам ε_i , R_i и r_i можно найти значения сил токов, текущих по всем участкам анализируемой цепи.

При практическом использовании правил Кирхгофа направления токов в неразветвленных участках цепи и направления обхода контуров выбираются произвольно. Если в результате расчета получаемая величина силы тока положительна, то направление тока было выбрано правильно. В противном случае ток в действительности течет в направлении, обратном выбранному первоначально.

- *Токи в сплошных средах.* Законы Ома и Джоуля - Ленца приведены для случая, когда ток протекает по хорошо проводящим проводникам, окруженным изолятором (воздухом). Альтернативная ситуация реализуется при погружении металлических электродов, между которыми поддерживается постоянная разность потенциалов, в плохо проводящую среду. Определение тока и сопротивления в этом случае продемонстрировано в решении задачи 9.2 данного раздела.

- Задачи этого раздела обычно посвящены определению разности потенциалов, силы тока, сопротивления в электрических цепях по заданным остальным параметрам. При этом следует различать случай, когда токи локализованы в проводниках и когда они текут в сплошных средах между хорошо проводящими электродами.

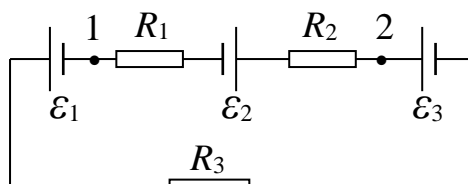
Примеры решения задач

9.1. На рисунке изображена цепь постоянного тока, состоящая из трех источников тока и трех сопротивлений, включенных последовательно. $\mathcal{E}_1 = 2 \text{ В}$, $\mathcal{E}_2 = 5 \text{ В}$, $\mathcal{E}_3 = 2 \text{ В}$, $R_1 = 1 \text{ Ом}$, $R_2 = 2 \text{ Ом}$, $R_3 = 3 \text{ Ом}$.

Определить разность потенциалов $\varphi_1 - \varphi_2$ между точками 1 и 2.

Внутренним сопротивлением

источников тока и соединительных проводов пренебречь.



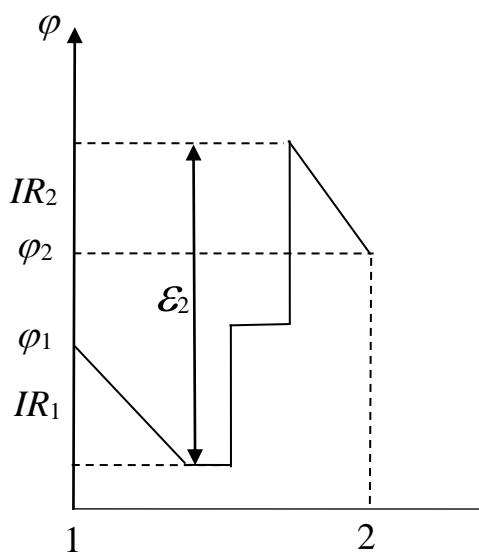
Решение:

Задав для определенности направление тока I в контуре по часовой стрелке, можно записать закон Ома для участка цепи, содержащего ЭДС: $\varphi_1 - \varphi_2 = I \cdot (R_1 + R_2) - \mathcal{E}_2$. Значение силы тока I получается из закона Ома для полной цепи с учетом направления

включения источников тока: $I = \frac{\mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_2 - \mathcal{E}_3}{R_1 + R_2 + R_3}$. Окончательно

получается:

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \frac{\mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_2 - \mathcal{E}_3}{R_1 + R_2 + R_3} - \mathcal{E}_2 = -4,5 \text{ В}.$$



Как видим, оказалось, что $\varphi_1 < \varphi_2$.

К такому результату приводит присутствие ЭДС \mathcal{E}_2 между точками 1 и 2. В этом можно убедиться, построив ход потенциала φ между этими точками (см. рисунок).

9. Законы постоянного тока.

Задача.

9.2. Два металлических электрода произвольной формы разделены слабо проводящей средой заполняющей все пространство. Удельное сопротивление среды ρ , её диэлектрическая проницаемость ε . Емкость указанной системы электродов равна C . Найти ток утечки I между электродами, если разность потенциалов между электродами равна $\Delta\varphi$.

Решение:

Линии плотности тока \mathbf{j} в изотропной среде совпадают с линиями напряженности электрического поля \mathbf{E} , поскольку в любой точке пространства $\mathbf{j} = \frac{1}{\rho} \mathbf{E}$. Сила тока, текущего по среде, сквозь замкнутую поверхность Σ , окружающую один из электродов равна

$$I = \oint_{\Sigma} (\mathbf{j}, d\mathbf{S}) = \frac{1}{\rho} \oint_{\Sigma} (\mathbf{E}, d\mathbf{S}).$$

Используя теорему Гаусса, можно записать:

$$\oint_{\Sigma} (\mathbf{E}, d\mathbf{S}) = \frac{q}{\varepsilon\varepsilon_0},$$

где q – заряд электрода, ε – диэлектрическая проницаемость среды. Тогда “ток утечки” между электродами равен

$$I = \frac{q}{\varepsilon\varepsilon_0\rho} = \frac{C \cdot \Delta\varphi}{\varepsilon\varepsilon_0\rho}.$$

Сопротивление R между обкладками связано с электроёмкостью системы соотношением:

$$R = \frac{\Delta\varphi}{I} = \frac{\varepsilon\varepsilon_0\rho}{C}. \quad (9.11)$$

Отметим, что оно справедливо только в однородных средах $\rho = const$, $\varepsilon = const$.

Задача.

9.3. Два металлических шара радиусом a помещены на расстоянии $l \gg a$ друг от друга в бесконечную слабо проводящую среду с удельным сопротивлением ρ . Найти электрическое сопротивление между электродами. Диэлектрическая проницаемость среды ε .

Решение:

Значительное удаление шаров позволяет считать их уединенными проводниками с емкостью:

$$C_1 = 4\pi\varepsilon_0\varepsilon a.$$

Эти емкости соединены последовательно (у них одна общая обкладка – Земля) и $C_{общ} = C_1/2 = 2\pi\varepsilon_0\varepsilon a$. В соответствии с соотношением (9.11)

$$R = \frac{\varepsilon_0\varepsilon\rho}{2\pi\varepsilon_0\varepsilon a} = \frac{\rho}{2\pi a}.$$

На первый взгляд мы получили неожиданный результат: сопротивление между электродами не зависит от расстояния l . Это связано с предположением о бесконечности среды, в которую помещены шары. При их удалении друг от друга увеличивается сечение области, где проходят линии тока, что и компенсирует в точности рост сопротивления за счёт увеличения l . Отмеченный эффект использовался ранее для уменьшения числа проводов в телефонных и телеграфных линиях: одним из проводников являлась земля между двумя помещенными в грунт электродами на краях линии.

9. Законы постоянного тока.

Задача.

9.4. Металлический шар радиуса a окружен концентрической с ним металлической оболочкой радиуса b . Пространство между этими электродами заполнено однородной проводящей средой с удельным сопротивлением ρ . Найти электрическое сопротивление R межэлектродного пространства. Рассмотреть случай $b \rightarrow \infty$.

Решение.

Выделяя в межэлектродном пространстве сферический слой радиуса r и толщиной dr , можно записать выражение для величины сопротивления этого слоя $dR = \rho \frac{dr}{4\pi r^2}$. Отсюда полное сопротивление межэлектродного промежутка

$$R = \frac{\rho}{4\pi} \int_a^b \frac{dr}{r^2} = \frac{\rho}{4\pi} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right).$$

При $b \rightarrow \infty$ $R = \rho/4\pi a$.

Задачи для самостоятельного решения.

9.5. Участок цепи представляет тело вращения из однородного материала с удельным сопротивлением ρ , длиной l . Площадь поперечного сечения тела зависит от координаты x по закону $S(x)$. Написать выражение для сопротивления R этого участка.

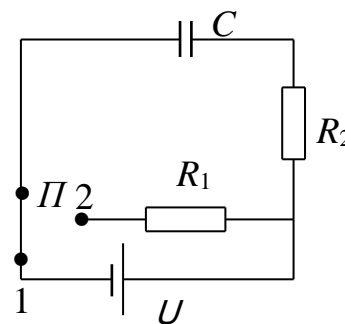
9.6. Радиусы обкладок сферического конденсатора равны a и b ($a < b$). Пространство между обкладками заполнено веществом с проницаемостью ε и удельной проводимостью σ . Первоначально конденсатор не заряжен. Затем внутренней обкладке сообщается заряд q_0 . Найти: а) закон изменения заряда q на внутренней обкладке, б) количество тепла Q , выделившееся при растекании заряда.

9.7. Две квадратные пластины со стороной a , закрепленные на расстоянии d друг от друга ($a \gg d$), образуют плоский конденсатор, подключенный к источнику постоянного напряжения U . Расположенные вертикально пластины погружают в сосуд с керосином со скоростью V . Проницаемость керосина ε . Найти силу тока I , текущего при этом по подводящим проводам.

9.8. Имеется $N = 24$ источников тока с ЭДС $\varepsilon = 1$ В и внутренним сопротивлением $r = 0,2$ Ом. Эти источники соединены так, что образуют батарею из n последовательных секций, каждая из которых состоит из N/n соединенных параллельно источников. К батарее подключено внешнее сопротивление $R = 0,3$ Ом. При каком n мощность P , выделяемая на сопротивлении R будет максимальной? Чему равно максимальное значение P ?

9.9. Конденсатор емкости $C = 5$ мкФ подсоединен к источнику постоянного тока с напряжением $U = 200$ В.

Затем переключатель Π переводится с контакта 1 на контакт 2. Найти количество тепла Q , выделившееся на сопротивлении $R_1 = 500$ Ом. Сопротивление $R_2 = 300$ Ом. Сопротивлением проводов пренебречь.



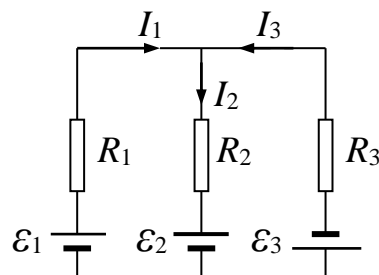
9.10. Между обкладками плоского конденсатора помещена параллельно им медная пластинка, толщина которой равна $1/3$ зазора между пластинами. Емкость конденсатора в отсутствие пластины $C = 0,025$ мкФ. Конденсатор подключен к источнику тока с напряжением $U = 100$ В. Определить: а) работу A_1 , которую надо совершить, чтобы извлечь пластинку из конденсатора; б)

9. Законы постоянного тока.

работу A_2 , совершаемую при этом источником тока. Нагреванием пластинки пренебречь.

9.11. По участку цепи с сопротивлением R течет постоянный ток силы I . Может ли при этом разность потенциалов на концах участка равняться нулю?

9.12. В схеме, изображенной на рисунке $\varepsilon_1 = 10 \text{ В}$, $\varepsilon_2 = 20 \text{ В}$, $\varepsilon_3 = 30 \text{ В}$, $R_1 = 9 \text{ Ом}$, $R_2 = 7 \text{ Ом}$, $R_3 = 12 \text{ Ом}$. Найти токи I_1 , I_2 , I_3 . Внутренними сопротивлениями источников пренебречь.



9.13. Сила тока в проводнике сопротивлением $R = 120 \text{ Ом}$ равномерно возрастает от $I_0 = 0$ до $I_{\max} = 5 \text{ А}$ за время $\tau = 15 \text{ с}$. Определить выделившееся за это время в проводнике количество теплоты Q .

9.14. Сила тока в проводнике сопротивлением $R = 100 \text{ Ом}$ равномерно убывает от $I_0 = 10 \text{ А}$ до $I = 0$ за время $\tau = 30 \text{ с}$. Определить выделившееся за это время в проводнике количество теплоты Q .

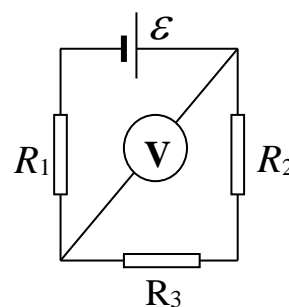
9.15. Определить напряженность электрического поля E в алюминиевом проводнике объемом $V = 10 \text{ см}^3$, если при прохождении по нему постоянного тока за время $\tau = 5 \text{ мин}$ выделилось количество $Q = 2,3 \text{ кДж}$. Удельное сопротивление алюминия $\rho = 26 \text{ нОм}\cdot\text{м}$.

9.16. Определить внутреннее сопротивление r и ЭДС ε источника тока, если во внешней цепи при силе тока $I_1 = 4 \text{ А}$

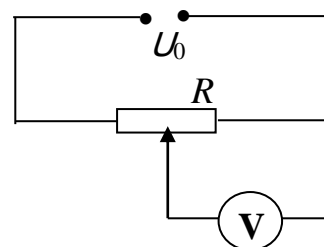
развивается мощность $P_1 = 10 \text{ Вт}$, а при силе тока $I_2 = 2 \text{ А}$ мощность $P_2 = 8 \text{ Вт}$.

9.17. Определить среднюю мощность $\langle P \rangle$, выделяющуюся на сопротивлении $R = 10 \text{ Ом}$, при протекании по нему прямоугольных импульсов тока длительностью $\tau = 1 \text{ с}$ и амплитудой $I_0 = 2 \text{ А}$. Период повторения импульсов $T = 2 \text{ с}$.

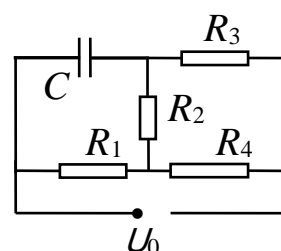
9.18. Определить ЭДС батареи ε , пренебрегая ее внутренним сопротивлением в схеме, указанной на рисунке. $R_1 = R_2 = R_3 = 100 \text{ Ом}$. Вольтметр показывает напряжение $U = 200 \text{ В}$, сопротивление вольтметра $R_v = 800 \text{ Ом}$.



9.19. На схеме сопротивление потенциометра $R = 2 \text{ кОм}$, внутреннее сопротивление вольтметра $R_v = 5 \text{ кОм}$, напряжение источника $U_0 = 220 \text{ В}$. Определить показание вольтметра V , если подвижный контакт находится посередине потенциометра.



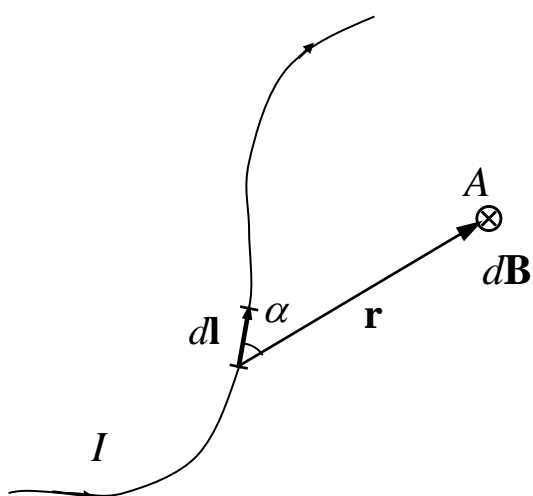
9.20. В схеме, представленной на рисунке $R_1 = R$, $R_2 = 2R$, $R_3 = 3R$, $R_4 = 4R$. Определить q заряд на конденсаторе емкости C . Напряжение источника U_0 .



9.21. Определить плотность j электрического тока в медном проводе (удельное сопротивление $\rho = 17 \text{ нОм}\cdot\text{м}$), если удельная тепловая мощность тока $P = 1,7 \text{ Дж}/(\text{м}^3\cdot\text{с})$.

10. Магнитное поле токов.

• Силовое действие магнитного поля на проводники с током и движущиеся заряды определяет вектор магнитной индукции \mathbf{B} . Чтобы найти \mathbf{B} можно использовать закон Био–Савара–Лапласа (БСЛ). Он позволяет определить индукцию магнитного поля $d\mathbf{B}$ от каждого элемента тока $I d\mathbf{l}$ в произвольной точке пространства A , задаваемой радиус-вектором \mathbf{r} (см. рис.):



$$d\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I[d\mathbf{l}, \mathbf{r}]}{r^3}, \quad (10.1)$$

где μ_0 – магнитная постоянная, равная $4\pi \cdot 10^{-7}$ Гн/м (или Н/А²). Модуль магнитной индукции равен

$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I dl \sin \alpha}{r^2}. \quad (10.2)$$

Для нахождения результирующего магнитного поля в точке A следует, пользуясь *принципом суперпозиции полей*, найти сумму векторов $d\mathbf{B}$ от всех элементов тока, на которые предварительно разбивается проводник с током I . Таким образом, *принципиально* может быть решён вопрос для проводников произвольной формы. Покажем, как реализуется этот подход *практически* для случая проводников несложной формы.

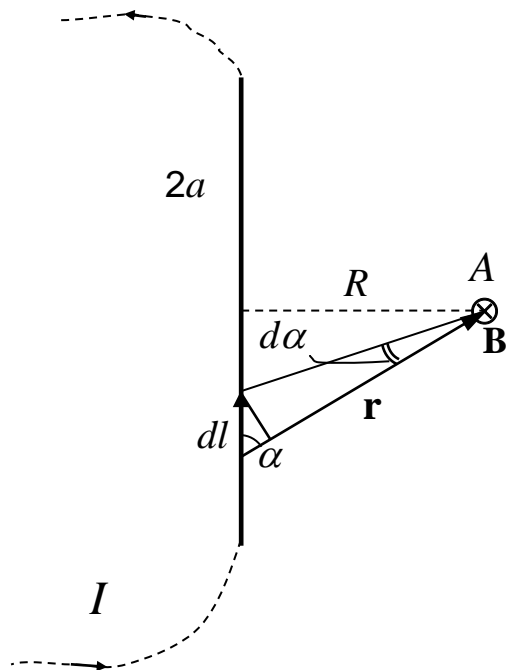
Задача

10.1. Ток силы $I = 10$ А протекает по прямолинейному участку проводника длины $2a = 20$ см. Точка A лежит на расстоянии $R = 4$ см от этого участка на перпендикуляре, проходящем через его

10. Магнитное поле токов.

середины. Найти магнитную индукцию \mathbf{B} в точке A , которая создается данным участком проводника. Рассмотреть также случай $l \rightarrow \infty$.

Решение



Разобьем проводник на малые элементы и определим индукцию магнитного поля в точке A для каждого из них в соответствии с законом Био–Савара–Лапласа (10.1). Направление векторов определим по «правилу буравчика» (правого винта). Очевидно, все векторы $d\mathbf{B}$ направлены одинаково – перпендикулярно плоскости, в которой располагается проводник и точка A (на рисунке показано

символом \otimes – перпендикулярно его плоскости от нас). Поэтому результирующий вектор \mathbf{B} направлен так же, и остается найти его модуль. Чтобы просуммировать модули dB (операция интегрирования), даваемые соотношением (10.2), выразим входящие в него величины r и dl через одну переменную α и её дифференциал $d\alpha$:

$$r = \frac{R}{\sin \alpha}, \quad dl = \frac{rd\alpha}{\sin \alpha} = \frac{Rd\alpha}{\sin^2 \alpha}. \quad (10.3)$$

Подстановка в (10.2) дает:

$$dB = \frac{\mu_0 I \sin \alpha}{4\pi R} d\alpha. \quad (10.4)$$

Остается выполнить интегрирование в пределах изменения угла

α для данного участка проводника, т. е. от α_0 до $\pi - \alpha_0$:

$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi R} \int_{\alpha_0}^{\pi - \alpha_0} \sin \alpha d\alpha, \quad (10.5)$$

где α_0 – угол, под которым направлен вектор, соединяющий нижний конец участка с точкой A . Очевидно $\cos \alpha_0 = \frac{a}{\sqrt{a^2 + R^2}}$ (см.

рис.). В итоге получаем модуль вектора магнитной индукции поля в точке A :

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi R \sqrt{1 + (R/a)^2}} = 46,4 \text{ мкТл}. \quad (10.6)$$

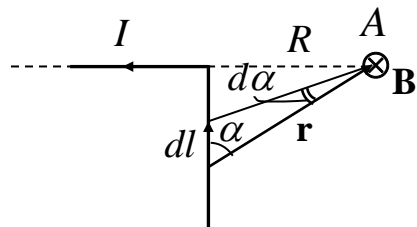
Если длина прямолинейного участка проводника с током много больше расстояния до точки A , вид результата упростится:

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi R} = 50 \text{ мкТл}. \quad (10.7)$$

Физически это соответствует магнитному полю очень длинного (“бесконечного”) проводника с током на конечном расстоянии R от него.

Задача

10.2. Длинный проводник с током силой I изогнут под прямым углом. Найти магнитную индукцию в точке A , находящейся на расстоянии R от точки изгиба на продолжении одного из перпендикулярных участков (см. рис.) проводника.



Решение

Действуя аналогично предыдущей задаче, разобьем проводник на элементы тока. Очевидно, угол α меняется в

10. Магнитное поле токов.

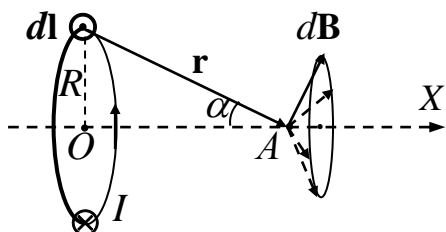
пределах от 0 до $\pi/2$ лишь для вертикального (по рис.) участка. Напротив, для горизонтального участка он постоянен и равен π . Это означает, что данный участок не создает магнитного поля в точке A ($\cos \alpha = 0$). Выражение для индукции поля, создаваемого каждым элементом тока вертикального участка, записывается так же, как и в предыдущей задаче (10.4). Остается лишь просуммировать соответствующие векторы с учетом оговоренного выше диапазона изменения угла α . Модуль вектора магнитной индукции для этого случая равен

$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi R}. \quad (10.8)$$

Задача

10.3. По круговому витку из тонкого провода радиуса $R = 5$ см

циркулирует ток силой $I = 10$ А. Найти магнитную индукцию на оси витка на расстоянии $x = 10$ см от его центра, а также в центре витка.



Решение

Определим, прежде всего, направление векторов $d\mathbf{B}$ от элементов тока $I d\mathbf{l}$ в рассматриваемом случае. По закону БСЛ оно определяется векторным произведением $[d\mathbf{l}, \mathbf{r}]$, то есть векторы $d\mathbf{B}$ перпендикулярны как вектору $d\mathbf{l}$ так и \mathbf{r} . Это означает, что векторы $d\mathbf{B}$ располагаются “веером” (по поверхности конуса) вокруг оси симметрии кольца с вершиной в точке A (см. рис.). Угол раствора “веера” равен $2 \times (\pi/2 - \alpha)$ (α – угол, под которым элемент тока виден из точки A , одинаковый для всех элементов

тока). Из симметрии расположения векторов $d\mathbf{B}$ относительно оси OX очевидно, что суммирование даст результирующий вектор, направленный вдоль оси OX . Остается найти лишь сумму проекций векторов $d\mathbf{B}$ на это направление.

$$B = \int dB_x = \frac{\mu_0 IR}{4\pi r^3} \int dl = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2\pi R^2 I}{(R^2 + x^2)^{3/2}}. \quad (10.9)$$

Окончательно получаем
$$B = \frac{\mu_0}{2} \frac{R^2 I}{(R^2 + x^2)^{3/2}} = 11,2 \text{ мкТл}.$$

Полезно записать результат (10.9) для вектора \mathbf{B} также через **магнитный момент** кругового витка с током \mathbf{p}_m ($p_m = SI = \pi R^2 \cdot I$):

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2\mathbf{p}_m}{(R^2 + x^2)^{3/2}}. \quad (10.10)$$

На большом расстоянии от витка ($x \gg R$)

$$B = \frac{\mu_0}{2} \frac{IR^2}{x^3}. \quad (10.11)$$

или в векторной форме:
$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2\mathbf{p}_m}{x^3}. \quad (10.12)$$

Обратим внимание на то, что индукция магнитного поля витка убывает обратно пропорционально **кубу** расстояния x от него (аналогично электрическому полю диполя).

В центре витка $x = 0$, поэтому из (10.9) следует:

$$B = \frac{\mu_0}{2} \frac{I}{R} = 125,6 \text{ мкТл}. \quad (10.13)$$

Рассмотренный на приведенных выше примерах способ нахождения индукции магнитного поля токов обладает большой общностью, но сопряжен, зачастую, с весьма кропотливыми математическими процедурами. В ряде частных случаев, характеризующихся определенной симметрией, искомый

10. Магнитное поле токов.

результат можно получить, применяя *теорему о циркуляции вектора В*.

Циркуляция вектора магнитной индукции **В** по любому замкнутому контуру L пропорциональна алгебраической сумме токов, пронизывающих поверхность, ограниченную этим контуром:

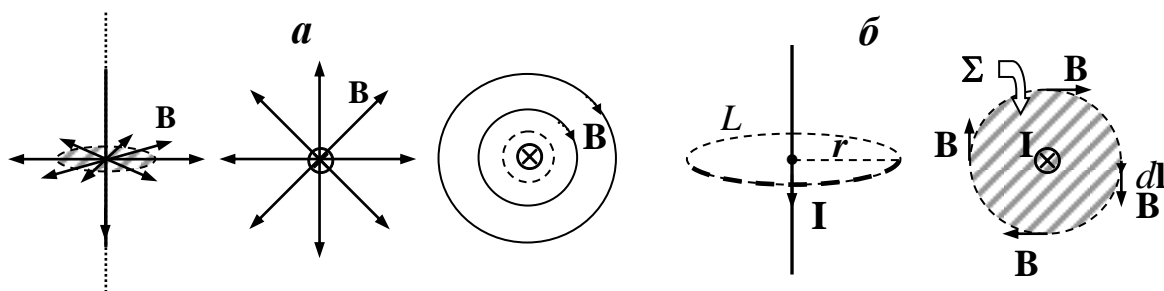
$$\oint_L (\mathbf{B}, d\mathbf{l}) = \mu_0 \sum_i I_i. \quad (10.14)$$

В приведенной аналитической записи утверждения теоремы коэффициент пропорциональности имеет вид, соответствующий системе единиц СИ. В том случае, когда через поверхность Σ , ограниченную контуром протекают распределенные токи, в правой части вместо суммы следует записать интеграл вида:

$$\int_{\Sigma} (\mathbf{j}, d\mathbf{S}),$$

где \mathbf{j} – плотность тока, а интеграл берется по всей поверхности, ограниченной контуром L .

Использование теоремы о циркуляции вектора **В** для нахождения магнитного поля проводников с током возможно лишь в тех случаях, когда за счет выбора формы контура L интеграл в (10.14) можно свести к произведению модуля вектора **В** на длину контура или отдельных его частей. Проиллюстрируем это на рассмотренном ранее примере прямого проводника с током. Если проводник бесконечен, то ввиду осевой (цилиндрической) симметрии, в любой плоскости, перпендикулярной проводнику, линии поля могут быть либо радиальными, либо представлять собой окружности с центрами на нём (см. рис.). С учётом свойств магнитного поля физически приемлемой является вторая картина линий индукции, т.к. мы знаем, что магнитных зарядов в природе не существует и линии **В** всегда замкнуты. Очевидно, что модуль вектора **В** зависит только от



расстояния до проводника и постоянен на окружности радиуса r . Если в качестве контура интегрирования выбрать линию поля, то векторы \mathbf{B} и $d\mathbf{l}$ на любом ее участке сонаправлены. С учетом этого:

$$\oint_L (\mathbf{B}, d\mathbf{l}) = \oint_L B(r) dl = B(r) \oint_L dl = B(r) \cdot 2\pi r.$$

Здесь учтено, что оставшийся интеграл, равен по определению длине контура L , т.е. длине окружности $2\pi r$. В соответствии с теоремой о циркуляции вектора \mathbf{B} :

$$B(r) \cdot 2\pi r = \mu_0 I, \quad \text{и} \quad B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}. \quad (10.15)$$

Применим данный способ нахождения магнитного поля к несколько более сложному случаю.

Задача

10.4. По прямому цилиндрическому проводу, радиус сечения которого R , течет постоянный ток плотности \mathbf{j} . Найти индукцию магнитного поля как вне, так и внутри этого провода. Влиянием магнитной проницаемости вещества провода пренебречь.

Решение

Отметим, прежде всего, что закон изменения индукции с расстоянием, вероятно, различен для области пространства вне и внутри проводника. Применим теорему о циркуляции дважды, выбрав соответствующие контуры – окружности с радиусом r большим и меньшим, чем радиус R цилиндрического проводника с током соответственно.

*) Результат совпадает с полученным ранее в задаче 10.1, где расстояние от проводника обозначалось R .

10. Магнитное поле токов.

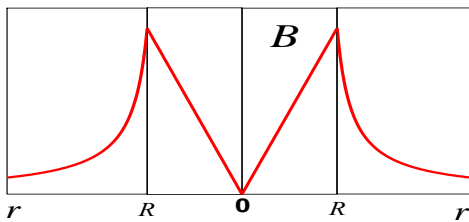
Повторяя рассуждения аналогичные приведенным в предыдущем примере, определим значение циркуляции магнитного поля для обоих контуров – $B \cdot 2\pi r$. Отличаться будут лишь выражения в правой части равенства (10.14), соответствующего теореме о циркуляции:

$\mu_0 \cdot j \cdot \pi R^2$ – для поля вне проводника, и

$\mu_0 \cdot j \cdot \pi r^2$ – для поля внутри проводника.

При этом учтено, что плотность тока отлична от нуля и постоянна (j) только в пределах проводника (поверхности Σ_1) радиуса R .

Соответствующие результаты для магнитного поля можно записать в виде:



$B(r) = \frac{\mu_0 j R^2}{2r}$ – вне проводника, и

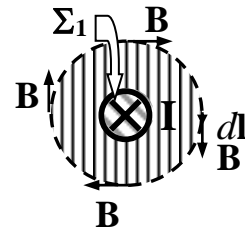
$B(r) = \frac{\mu_0 j}{2} r$ – внутри проводника.

На рисунке показано распределение магнитного поля в радиальном по отношению к оси проводника направлении.

Ясно, что направление магнитного поля в любой точке пространства определяется правилом “правого винта”. Однако, приведем также и векторную форму записи для магнитной индукции поля вокруг и внутри проводника в точках, положение которых относительно оси провода определяется радиус-вектором \mathbf{r} :

$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0 [\mathbf{j}, \mathbf{r}] R^2}{2r^2}$ – вне проводника, и

$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{2} [\mathbf{j}, \mathbf{r}]$ – внутри проводника.



Эти выражения помогут при решении более сложных задач (например, 10.20).

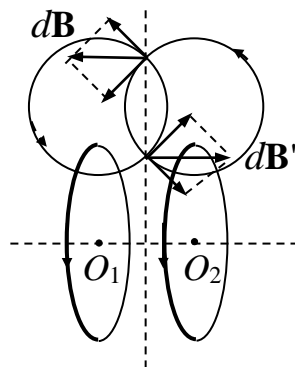
Найдем поле соленоида – длинной катушки с током.

Задача

10.5. Однослойный соленоид имеет длину $l = 0,5$ м и число витков $N = 1000$. Найти индукцию магнитного поля в центре соленоида, если ток в обмотке равен $I = 1$ А.

Решение

Прежде чем применять рассмотренный выше подход (теорему о циркуляции) сделаем некоторые заключения о структуре поля соленоида. Катушка состоит из большого количества одинаковых витков с током, каждый из которых дает свой вклад в результирующее магнитное поле. При этом для каждого витка найдется симметрично ему расположенный по отношению к плоскости, перпендикулярной к оси катушки (O_1O_2 , см. рис.). Сумма векторов индукции от симметричных витков в любой точке этой плоскости дает вектор параллельный оси соленоида. Итак, направление векторов может быть только параллельным оси катушки как вне, так и внутри неё.



Выберем теперь контур для применения теоремы о циркуляции в виде прямоугольника, две стороны которого располагаются вдоль оси катушки, а две другие – перпендикулярно. Одна из сторон при этом расположена внутри катушки, а противоположная – вне.

Циркуляция вектора \mathbf{B} складывается из интегралов:

$$\oint (\mathbf{B}, d\mathbf{l}) = \int_{1-2} (\mathbf{B}, d\mathbf{l}) + \int_{2-3} (\mathbf{B}, d\mathbf{l}) + \int_{3-4} (\mathbf{B}, d\mathbf{l}) + \int_{4-1} (\mathbf{B}, d\mathbf{l}). \quad (10.15)$$

10. Магнитное поле токов.

Второе и четвертое слагаемое равны нулю, так как на любом участке сторон контура 2–3 и 4–1 векторы $d\mathbf{B}$ и $d\mathbf{l}$ взаимно-перпендикулярны. Участок 3–4 может быть выбран на любом расстоянии от оси соленоида, в частности на очень большом, где магнитное поле пренебрежимо мало (вспомним закон убывания индукции поля с расстоянием по закону БСЛ). Поэтому выражение для циркуляции практически полностью определяется индукцией поля внутри соленоида. Остается приравнять его произведению μ_0 на сумму токов, пронизывающих контур:

$$Bl = \mu_0 \cdot \sum_i I_i, \quad Bl = \mu_0 \cdot N \cdot I, \quad N = nl,$$

где n – число витков на единицу длины соленоида. Отсюда индукция поля *внутри* соленоида:

$$B = \mu_0 \cdot nI^{*}) . \quad (10.16)$$

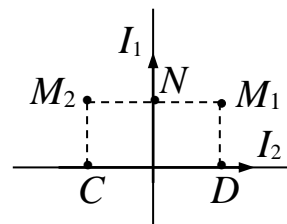
С учётом численных данных задачи получим:

$$B = \mu_0 \cdot \frac{N}{l} \cdot I \approx 2,5 \text{ мТл.}$$

Независимость циркуляции от расположения внешнего участка контура (3–4) говорит также о том, что магнитное поле вне соленоида очень мало. Практически все поле сосредоточено *внутри катушки и однородно*. Заметим, что в этом смысле соленоид аналогичен конденсатору, почти все электрическое поле которого сосредоточено между обкладками.

Задачи для самостоятельного решения.

10.6. Два прямолинейных бесконечно длинных проводника расположены перпендикулярно друг к другу и находятся в одной плоскости



*) Если соленоид заполнен однородным изотропным веществом, то индукция возрастает в μ раз, где μ – магнитная проницаемость этого вещества.

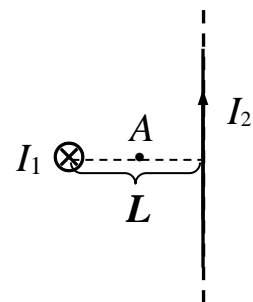
(см. рис.). Найти индукцию магнитного поля \mathbf{B} (модуль и направление) в точках M_1 и M_2 , если $I_1 = 2 \text{ A}$, $I_2 = 3 \text{ A}$. Расстояния $r_1 = NM_1 = NM_2 = 1 \text{ см}$. $r_2 = DM_1 = CM_2 = 2 \text{ см}$.

10.7. Два прямолинейных длинных проводника расположены параллельно на расстоянии $l = 5 \text{ см}$ друг от друга. По проводникам текут токи $I_1 = I_2 = 10 \text{ A}$ в **противоположных** направлениях. Найти величину и **направление** индукции магнитного поля \mathbf{B} в точке, находящейся на расстоянии $R = 5 \text{ см}$ от каждого из проводников.

10.8. По двум прямолинейным параллельным длинным проводникам, расстояние между которыми $l = 20 \text{ см}$ текут токи $I_1 = 40 \text{ A}$ и $I_2 = 80 \text{ A}$ в одном направлении. Найти величину и направление индукции магнитного поля \mathbf{B} в точке, находящейся на расстоянии $r_1 = 12 \text{ см}$ от первого проводника и от второго – на расстоянии $r_2 = 16 \text{ см}$.

10.9. Два прямолинейных длинных проводника расположены параллельно на расстоянии $l = 15 \text{ см}$ друг от друга. По проводникам текут токи $I_1 = 70 \text{ A}$ и $I_2 = 50 \text{ A}$ в **противоположных** направлениях. Найти индукцию магнитного поля B в точке, находящейся на расстоянии $r_1 = 20 \text{ см}$ от первого и $r_2 = 30 \text{ см}$ от второго проводника.

10.10. Два прямолинейных длинных провода с токами $I_1 = 80 \text{ A}$ и $I_2 = 60 \text{ A}$ скрещены под прямым углом (см. рис.). Расстояние между проводами равно $L = 10 \text{ см}$. Найти индукцию магнитного поля



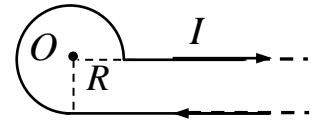
\mathbf{B} (модуль и направление) в точке A , лежащей на общем

10. Магнитное поле токов.

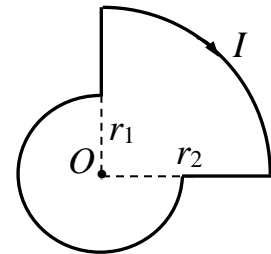
перпендикулярно к проводникам на одинаковом расстоянии от обоих.

10.11. Из проволоки длиной $L = 1$ м сделана квадратная рамка. По этой рамке течет ток силой $I = 10$ А. Найти индукцию магнитного поля \mathbf{B} в центре рамки.

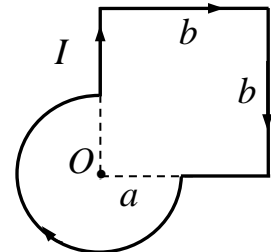
10.12. Определить индукцию магнитного поля в точке O , если проводник с током I имеет вид, показанный на рис. Радиус изогнутой части проводника равен R , прямолинейные участки проводника предполагаются очень длинными.



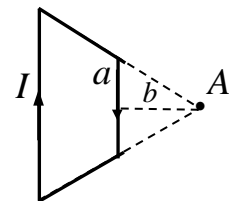
10.13. Ток силы $I = 2$ А течет по плоскому контуру, изображенному на рисунке. Угол между прямолинейными участками контура прямой. Радиусы имеют значения: $r_1 = 10$ см, $r_2 = 20$ см. Найти магнитную индукцию \mathbf{B} в точке O .



10.14. Найти индукцию магнитного поля в точке O контура с током I , который показан на рисунке. Радиус a и сторона b известны.



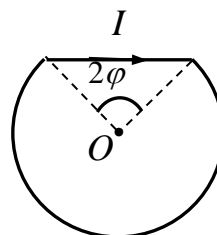
10.15. Ток силы $I = 5$ А циркулирует в контуре, имеющем форму равнобокой трапеции (рис.). Отношение оснований трапеции $k = 2$. Найти магнитную индукцию \mathbf{B} в точке A , лежащей в плоскости трапеции. Меньшее основание трапеции $a = 10$ см, расстояние $b = 5$ см.



10.16. По проволоке, согнутой в виде правильного n -угольника, вписанного в окружность радиуса R , пропускается ток

силы I . Найти магнитную индукцию \mathbf{B} в центре многоугольника. Исследовать полученное выражение для случая $n \rightarrow \infty$.

10.17. Ток $I = 5 \text{ A}$ течет по замкнутому проводнику показанному на рисунке. Радиус изогнутой части $R = 120 \text{ мм}$, угол $2\varphi = 90^\circ$. Найти магнитную индукцию в точке O .



10.18. Электрон движется прямолинейно с постоянной скоростью $V = 0,3 \cdot 10^6 \text{ м/с}$. Определить магнитную индукцию \mathbf{B} поля, создаваемого электроном в точке, находящейся на расстоянии $r = 4 \text{ нм}$ от электрона и лежащей на прямой, проходящей через мгновенное положение электрона и составляющей угол $\alpha = 30^\circ$ со скоростью движения электрона.

10.19. * Согласно теории Бора, электрон в атоме водорода движется вокруг ядра по круговой орбите радиусом $R = 5,3 \cdot 10^{-11} \text{ м}$ ($0,53 \text{ \AA}$). Определить магнитную индукцию \mathbf{B} поля, создаваемого электроном в центре орбиты.

10.20. * Внутри прямого провода круглого сечения имеется круглая цилиндрическая полость, ось которой параллельна оси провода. Смещение оси полости относительно оси провода определяется вектором \mathbf{a} . По проводу течет ток одинаковой по всему сечению плотности \mathbf{j} . Найти индукцию магнитного поля \mathbf{B} внутри полости.

11. Закон Ампера. Сила Лоренца.

- **Сила Ампера.**

Силовое действие магнитного поля на проводники с током определяется законом Ампера:

$$d\mathbf{F} = I[d\mathbf{l}, \mathbf{B}] \quad (11.1)$$

здесь $d\mathbf{F}$ – сила, действующая на элемент $d\mathbf{l}$ тока силой I со стороны магнитного поля \mathbf{B} в том месте, где располагается участок проводника $d\mathbf{l}$. Направление этой силы определяется по правилу “левой руки”. Полная сила, действующая на проводник конечной длины вычисляется, как обычно, суммированием (интегрированием) “элементарных воздействий”.

- **Сила Лоренца.**

Движущийся электрический заряд q также представляет собой “элемент тока”, поэтому магнитное поле действует на него с силой, получившей название силы Лоренца:

$$\mathbf{F}_L = q[\mathbf{V}, \mathbf{B}], \quad (11.2)$$

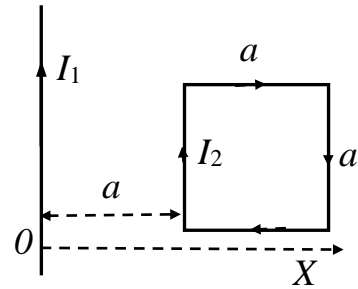
где \mathbf{V} – скорость движения заряда. Часто обобщенной силой Лоренца называют силу, действующую на заряженную частицу в одновременно существующих электрическом и магнитном полях:

$$\mathbf{F}_L^* = q\mathbf{E} + q[\mathbf{V}, \mathbf{B}]. \quad (11.3)$$

Например, такая сила действует между двумя параллельно летящими с большой скоростью электронами. Соотношение этих сил выясняется в задаче 11.17. Проиллюстрируем применение законов взаимодействия электромагнитного поля с токами и заряженными частицами на примерах.

Задача

11.1. В одной плоскости с длинным прямым проводом, по которому течет ток силой $I_1 = 6 \text{ A}$, расположена квадратная рамка так, что две ее стороны параллельны проводу, а расстояние от провода до ближайшей из этих сторон равно ее длине $a = 0,5 \text{ м}$. По рамке течет ток силой $I_2 = 1 \text{ A}$. Какую работу нужно совершить, чтобы перенести рамку параллельно самой себе вправо на расстояние $l = 40 \text{ см}$?



Решение

На каждую сторону квадратной рамки будет действовать сила Ампера со стороны магнитного поля порожденного током, текущим по прямолинейному проводнику. Нетрудно определить (по правилу «левой руки»), однако, что на стороны рамки, перпендикулярные проводнику эти силы равны и противоположно направлены. Сила притяжения, действующая на ближнюю к проводнику сторону рамки больше силы отталкивания, действующей на дальнюю сторону. Для нахождения этих сил достаточно записать величину индукции магнитного поля длинного прямолинейного проводника с током (10.7) и применить закон Ампера (11.1)

$$B(r) = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi x}, \quad F(x) = \frac{\mu_0 I_1 I_2 a}{2\pi x}.$$

Напомним, что работа в неоднородном силовом поле $A_{12} = \int_1^2 (\mathbf{F}, d\mathbf{l})$ (см. 4.2). Поскольку в нашем случае рамку перемещают

вдоль оси X , искомая работа $A = \int_1^2 F(x) dx$, и равна алгебраической

11. Закон Ампера. Сила Лоренца.

сумме работ сил притяжения и отталкивания:

$$A = \frac{\mu_0 I_1 I_2 a}{2\pi} \left(\int_a^{a+l} \frac{dx}{x} - \int_{2a}^{2a+l} \frac{dx}{x} \right) = \frac{\mu_0 a I_1 I_2}{2\pi} \left[\ln\left(\frac{a+l}{a}\right) - \ln\left(\frac{2a+l}{2a}\right) \right].$$

Окончательно
$$A = \frac{\mu_0 a I_1 I_2}{2\pi} \ln\left(\frac{a+l}{a+l/2}\right).$$

Задача

11.2. Протоны движутся в однородном магнитном поле циклотрона по дуге окружности радиусом $R = 10$ м. При этом поле имеет индукцию $B = 2$ Тл и направлено перпендикулярно плоскости движения частиц. Пучок протонов попадает на заземленную мишень. Найти силу тока в пучке, если тепловая мощность, выделяющаяся в мишени, составляет $P = 2$ Вт. Отношение заряда протона к его массе равно $q/m = 10^8$ Кл/кг.

Решение

Движение протонов по окружности обусловлено действием силы Лоренца со стороны магнитного поля, сообщаемой протону центростремительное ускорение. По 2-му закону Ньютона:

$$m \cdot \frac{V^2}{R} = qVB. \quad (1)$$

Кинетическая энергия каждого протона

$$E_k = \frac{mV^2}{2}. \quad (2)$$

Вся эта энергия при неупругом ударе о мишень превращается в тепло. Поэтому тепловая мощность, выделяющаяся в мишени, может быть посчитана следующим образом:

$$P = E_k n, \quad (3)$$

где n – число протонов, попадающих на мишень в единицу

времени. Исходя из определения силы тока:

$$I = nq. \quad (4)$$

Из равенств (2) и (3) получаем $n = \frac{2P}{mV^2}$

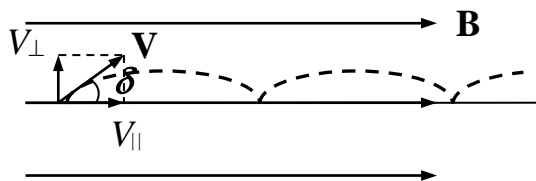
и, используя (1) и (4), окончательно находим:

$$I = \frac{2P}{mV^2} q = \frac{2P}{m} \cdot \frac{m^2}{q^2 B^2 R^2} = \frac{2P}{B^2 R^2 q / m} = 1 \cdot 10^{-10} \text{ A.}$$

Задача

11.3. Вдоль линий индукции однородного магнитного поля из одной точки вылетают электроны со скоростью V , имея малый угловой разброс δ . Определите, на каком расстоянии от места вылета пучок будет иметь минимальный поперечный размер. Индукция магнитного поля B . Масса электрона m_e , его заряд $-e$.

Решение



Электрон, скорость которого образует угол δ с направлением магнитного поля B , движется по винтовой линии. Разложим вектор скорости электрона на две составляющие: $V_{\parallel} = V \cdot \cos \delta \approx V$, направленную вдоль линий магнитной индукции и $V_{\perp} = V \cdot \sin \delta \approx V \cdot \delta$ – перпендикулярную к ним. Период движения электрона по спирали T – время прохождения одного витка определяется из уравнения движения с учётом выражения для силы Лоренца:

$$eV_{\perp}B = m_e \cdot \frac{V_{\perp}^2}{R}, \quad T = \frac{2\pi R}{V_{\perp}}, \quad \Rightarrow \quad T = \frac{2\pi m_e}{eB}.$$

Как видим, он не зависит ни от скорости электрона V_{\perp} , ни от радиуса витка R . Шаг винтовой линии, напротив определяется V_{\parallel} :

11. Закон Ампера. Сила Лоренца.

$$L = V_{||} \cdot T \approx \frac{2\pi m_e}{eB} \cdot V.$$

Пройдя именно это расстояние, слабо расходящийся из одной точки пучок электронов, сфокусируется практически в одной точке.

• Виток с током в магнитном поле.

Если в однородное магнитное поле поместить виток с током, характеризующийся магнитным моментом \mathbf{p}_m , то на него будет действовать вращающий момент сил:

$$\mathbf{N} = [\mathbf{p}_m, \mathbf{B}], \quad N = p_m \cdot B \cdot \sin \alpha, \quad (11.2)$$

где α – угол между векторами \mathbf{p}_m и \mathbf{B} . Элементарная работа при повороте витка равна при этом $dA = N \cdot d\alpha = p_m \cdot B \cdot \sin \alpha \cdot d\alpha$. Этому соответствует потенциальная энергия взаимодействия витка тока с магнитным полем $U_M = \int dA = -p_m B \cos \alpha$.

В неоднородном поле виток испытывает, кроме того, втягивающее или выталкивающее воздействие со стороны магнитного поля, в зависимости от первоначальной ориентации векторов \mathbf{p}_m и \mathbf{B} . Сила этого взаимодействия может быть получена, исходя из общей взаимосвязи силы и потенциальной энергии:

$$\mathbf{F} = -\mathbf{grad} U_M, \quad \text{например } F_x = -p_m \frac{\partial B}{\partial x}. \quad (11.4)$$

Определим силу взаимодействия двух катушек (соленоидов) расположенных на одной оси на некотором расстоянии друг от друга, существенно превышающем их собственные размеры.

Задача

11.4. Две одинаковые катушки радиусом $R = 20$ мм содержат по $N = 100$ витков. Оси катушек лежат на одной прямой. Найти силу взаимодействия катушек, если по ним протекает ток с одинаковой силой $I = 2$ А, а расстояние между катушками $l = 0,5$ м значительно превышает их размеры.

Решение

Определим, прежде всего, магнитный момент обеих катушек $p_{m1} = p_{m2} = p_m = N \cdot \pi R^2 \cdot I$.

Найдем силу, действующую на одну из катушек со стороны неоднородного поля другой катушки. В условиях данной задачи для определения индукции этого поля на оси катушки можно воспользоваться полученным ранее для одиночного витка значением индукции магнитного поля (10.12):

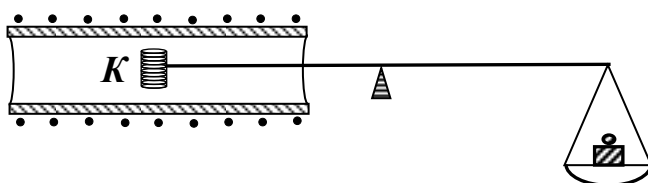
$$B = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2p_m}{x^3}.$$

Используя (11.4), получаем:

$$F_x = -p_m \frac{\partial B}{\partial x} = -p_m \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{6p_m}{x^4} = -\frac{3\mu_0}{2\pi} \frac{p_m^2}{l^4} = -\frac{3\mu_0\pi}{2} \frac{(N \cdot R^2 \cdot I)^2}{l^4} = 0,2 \text{ мкН}.$$

Задачи для самостоятельного решения.

11.5. Укрепленную на одном коромысле весов небольшую катушку K с числом витков $N = 100$ поместили внутрь соленоида



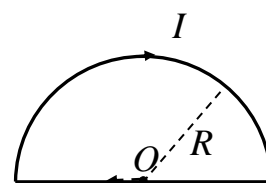
(см. рис.) Площадь сечения катушки $S = 1$ см², длина плеча коромысла $l = 20$ см. В отсутствие тока в катушке

11. Закон Ампера. Сила Лоренца.

весы уравновешены. После того как через катушку пустили ток $I = 50 \text{ мА}$, для восстановления равновесия пришлось изменить груз на чаше весов на $\Delta m = 50 \text{ мг}$. Найти индукцию магнитного поля в месте нахождения катушки.

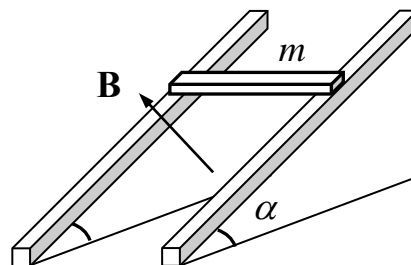
11.6. Определите силу, приходящуюся на единицу длины, с которой взаимодействуют в вакууме два параллельных очень длинных проводника с током силой $I_1 = I_2 = 1 \text{ А}$. Расстояние между проводниками равно $a = 1 \text{ м}$.

11.7. Какая сила на единицу длины приходится в точке O тонкого провода с током $I = 4 \text{ А}$, показанного на рисунке. Радиус закругления равен $R = 20 \text{ см}$.



11.8. Контур из провода, изогнутого в форме квадрата (см. рис. к задаче 11.1) со стороной $a = 0,5 \text{ м}$, расположен в одной плоскости с очень длинным прямым проводом с током $I_1 = 6 \text{ А}$ так, что две его стороны параллельны проводу. Сила тока в контуре $I_2 = 1 \text{ А}$. Определить силу, действующую на контур, если ближайшая к проводу сторона контура находится на расстоянии $b = 10 \text{ см}$. Направления токов указаны на рисунке.

11.9. По двум контактными шинам, установленным под углом $\alpha = 30^\circ$ к горизонту может скользить медный брусок массы $m = 0,5 \text{ кг}$ (см. рис.). В



окружающем шинах пространстве создано однородное магнитное поле с индукцией $B = 1,5 \text{ Тл}$, перпендикулярное к плоскости шин. Если по бруску пропускать ток с силой $I = 8 \text{ А}$, то он

перемещается вверх с постоянной скоростью. С каким ускорением брусок соскальзывает вниз в отсутствии тока? Расстояние между шинами равно $l = 20 \text{ см}$. Учтеть трение.

11.10. Для измерения горизонтальной составляющей индукции магнитного поля Земли B_{Γ} можно использовать электронно-лучевую трубку осциллографа (ЭЛТ). В опыте измеряется смещение электронного луча на экране осциллографа от центра по вертикали h , если ориентировать трубку перпендикулярно земному меридиану. В качестве известных параметров установки можно считать ускоряющее напряжение U и расстояние от электронной пушки ЭЛТ до экрана l . Определить по этим данным B_{Γ} .

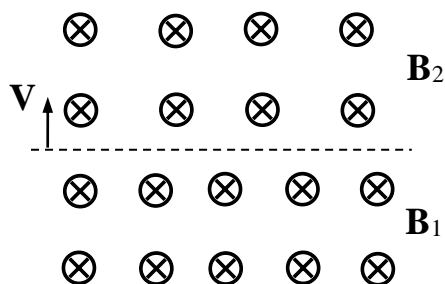
11.11. Проволочная катушка поставлена на горизонтальной плоскости так, что её ось вертикальна. Система находится в однородном горизонтальном магнитном поле с индукцией B . Масса катушки m , число витков N , радиус R . Какой ток следует пропустить по катушке, чтобы она опрокинулась?

11.12. Электрон со скоростью $V = 10^7 \text{ м/с}$ влетает в область однородного магнитного поля с индукцией $B = 10^{-3} \text{ Тл}$. Скорость перпендикулярна линиям индукции поля и направлена под углом $\alpha = 30^\circ$ к плоской границе поля. Определите максимальную глубину h проникновения электрона в область магнитного поля. Отношение заряда электрона к его массе $\gamma = 1,76 \cdot 10^{11} \text{ Кл/кг}$.



11. Закон Ампера. Сила Лоренца.

11.13. * Граница двух магнитных полей с индукциями B_1 и B_2 – плоскость. Электрон влетает перпендикулярно границе со скоростью V и движется сначала в поле 2, затем в поле 1, потом снова в поле 2 и т.д. Определить среднюю скорость дрейфа электрона вдоль границы за большой промежуток времени.



11.14. Протон движется по окружности в однородном магнитном поле с индукцией $B = 0,5 \cdot 10^{-5} \text{ Тл}$ в плоскости, перпендикулярной к силовым линиям. Чему равен период T такого движения? $m_p = 1,67 \cdot 10^{-27} \text{ кг}$; $|e| = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ Кл}$.

11.15. Однозарядные ионы аргона разгоняются в электрическом поле напряжением 1000 В и затем попадают в перпендикулярное их скорости магнитное поле с индукцией 1 Тл , где разделяются на два пучка. Первому соответствует окружность радиуса $R_1 = 27,4 \text{ мм}$, второму – радиуса $R_2 = 28,9 \text{ мм}$. Определить относительные массы этих изотопов.

11.16. * Поток проводящей жидкости (расплавленный металл) течет по керамической трубе. Для определения скорости течения жидкости трубу помещают в однородное магнитное поле, перпендикулярное оси трубы, в трубе закрепляют два электрода, образующих плоский конденсатор, и измеряют разность потенциалов между электродами. Найдите скорость потока V , если магнитная индукция поля $B = 0,01 \text{ Тл}$, расстояние между электродами $d = 2 \text{ см}$, а измеренная разность потенциалов оказалась $U = 0,4 \text{ мВ}$.

11.17. * Два электрона движутся параллельно друг другу с одинаковой скоростью $V = 300 \text{ км/с}$. Найти отношение сил электрического и магнитного взаимодействия этих электронов.

11.18. * В случае эффекта Холла для натриевого проводника при плотности тока $j = 150 \text{ А/см}^2$ и магнитной индукции $B = 2 \text{ Тл}$ напряженность поперечного электрического поля $E = 0,75 \text{ мВ/м}$. Определить концентрации электронов проводимости, а также ее отношение к концентрации атомов в этом проводнике. Плотность натрия $\rho = 0,97 \text{ г/см}^3$.

11.19. * Определить постоянную Холла для натрия, если для него отношение концентрации электронов проводимости к концентрации атомов составляет 0,984. Плотность натрия $\rho = 0,97 \text{ г/см}^3$.

11.20. * Известно, что постоянная Холла для меди больше, чем для алюминия в $k = 1,8$ раза. Во сколько раз число свободных электронов приходящихся в среднем на один атом у алюминия больше, чем у меди. Плотности меди и алюминия соответственно равны $\rho_{Cu} = 8,93$ и $\rho_{Al} = 2,7 \text{ г/см}^3$.

11.21. * Через сечение медной пластинки толщиной $a = 0,2 \text{ мм}$ пропускается ток $I = 6 \text{ А}$. Пластинка помещается в однородное магнитное поле с индукцией $B = 1 \text{ Тл}$, перпендикулярное ребру пластинки и направлению тока. Считая концентрацию электронов проводимости равной концентрации атомов, определить возникающую в пластинке поперечную (холловскую) разность потенциалов. Плотность меди $\rho = 8,93 \text{ г/см}^3$, атомная масса $M = 64 \cdot 10^{-3} \text{ кг/моль}$.

12. Электромагнитная индукция.

• Явление электромагнитной индукции (ЭМИ) состоит в возникновении электрического тока в проводящем контуре при изменении магнитного потока через поверхность, ограниченную этим контуром^{*)}. Закон электромагнитной индукции устанавливает, что ЭДС индукции пропорциональна^{**)} **скорости изменения** этого магнитного потока:

$$\mathcal{E}_i = -\frac{d\Phi}{dt}. \quad (12.1)$$

Знак минус соответствует договоренности обозначать направление индукционного тока, определяемое по правилу Ленца: **индукционный ток направлен так, чтобы его магнитное поле препятствовало изменению внешнего магнитного потока**. ЭДС считается положительной, если направление индукционного тока составляет с вектором положительной нормали к контуру «правовинтовую систему».

Напомним, что магнитным потоком через поверхность Σ называется величина

$$\Phi = \int_{\Sigma} (\mathbf{B}, d\mathbf{S}). \quad (12.2)$$

Приведем простой пример применения закона ЭМИ.

Задача.

12.1. Круговой контур («пробный виток») радиусом $r = 2$ см помещен в однородное магнитное поле, индукция которого $B =$

^{*)} Электромагнитной индукцией объясняют также разделение зарядов (возникновение ЭДС) в проводниках, движущихся в магнитном поле.

^{**)} Коэффициент пропорциональности в законе зависит от выбора системы единиц. В системе СИ его полагают равным 1.

0,2 Тл. Плоскость контура перпендикулярна направлению магнитного поля, сопротивление контура $R = 1 \text{ Ом}$. Какой заряд протечет через контур при его повороте на угол 90° ?

Решение.

До поворота контура поверхность, ограниченную контуром «пронизывает» магнитный поток, равный $\Phi = B \cdot S$. Мгновенное значение ЭДС в процессе поворота контура (исчезновения магнитного потока) определяется соотношением (12.1). Тогда, согласно закону Ома мгновенное значение силы тока в контуре равно

$$I = -\frac{1}{R} \frac{d\Phi}{dt}.$$

Заряд, протекший через контур при повороте его на угол 90° , т.е. в результате полного исчезновения магнитного потока – его изменения на Φ , равен

$$q = \int_0^\tau I dt = -\frac{1}{R} \int_\Phi^0 d\Phi = \frac{\Phi}{R}. \quad *) \quad (12.3)$$

Итак, окончательно:
$$q = \frac{BS}{R} = \frac{\pi r^2}{R} B \approx 0,25 \text{ мКл}.$$

Обратим внимание на то, что результат совершенно не зависит ни от времени поворота τ , ни от степени равномерности этого процесса.

Задача.

12.2. В однородном магнитном поле с индукцией $B = 0,1 \text{ Тл}$ расположены *вертикально* на расстоянии $l = 30 \text{ см}$ два металлических прута, замкнутых наверху. Поле перпендикулярно плоскости системы. По прутьям без трения и без нарушения контакта может скользить перемычка массой $m = 5 \text{ г}$ и

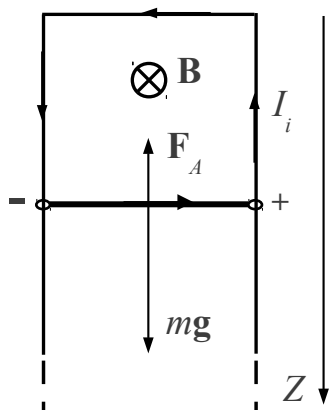
*) Именно в такой форме закон ЭМИ был впервые записан М. Фарадеем в 1831 г.

12. Электромагнитная индукция.

сопротивлением $R = 9,2 \text{ мОм}$. Перемычку сначала удерживают в покое, а затем отпускают. Как будет меняться скорость перемычки, и какова ее установившаяся скорость?

Решение.

Будем пренебрегать сопротивлением прутьев и скользящих контактов, а также самоиндукцией контура. Под действием силы



тяжести перемычка начнет скользить вниз. Магнитный поток, пронизывающий контур, образованный перемычкой и П-образными «рельсами», очевидно, будет при этом нарастать (см. рис.). Собственное магнитное поле возникающего в контуре индукционного тока, по правилу Ленца, препятствует

нарастанию внешнего магнитного потока, т.е. направлено навстречу полю \mathbf{B} . Направление тока находим по правилу правого винта («буравчика») – против часовой стрелки (см. рис.). На перемычку, по которой протекает ток, действует сила Ампера (см. гл.11). По правилу «левой руки» находим, что эта сила направлена вертикально вверх и тормозит падение перемычки. Качественно ясно, что ускорение перемычки при этом постепенно уменьшается, а её скорость через некоторое время перестает расти. Найдём закон изменения скорости перемычки $V(t)$. Запишем для этого уравнение её движения в проекции на ось Z , а также очевидные соотношения для силы Ампера и ЭДС индукции:

$$m \frac{dV}{dt} = mg - F_A,$$

$$F_A = \frac{\mathcal{E}_i}{R} Bl,$$

$$|\mathcal{E}_i| = \left| \frac{d\Phi}{dt} \right| = Bl \frac{dS}{dt} = BVl.$$

Подставляя соответствующие выражения в уравнение движения перемычки, получаем:

$$m \frac{dV}{dt} = mg - \frac{BVl}{R} Bl.$$

Остается привести полученное дифференциальное уравнение относительно искомой функции $V(t)$ к виду, удобному для интегрирования, используя стандартный приём замены переменной:

$$\frac{dV}{dt} = -\frac{B^2 l^2}{mR} \left(V - \frac{mgR}{B^2 l^2} \right)$$

$$u = V - \frac{mgR}{B^2 l^2}, \quad \frac{du}{dt} = -\frac{B^2 l^2}{mR} u, \quad \frac{du}{u} = -\frac{B^2 l^2}{mR} dt,$$

$$\ln u = -\frac{B^2 l^2}{mR} t + C_1, \quad u(t) = C \cdot e^{-\frac{B^2 l^2}{mR} t},$$

$$V(t) = \frac{mgR}{B^2 l^2} + C \cdot e^{-\frac{B^2 l^2}{mR} t},$$

Подстановка начального условия задачи $V(0) = 0$ позволяет определить константу интегрирования $C = -\frac{mgR}{B^2 l^2}$, и записать окончательно:

$$V(t) = \frac{mgR}{B^2 l^2} \left(1 - e^{-\frac{B^2 l^2}{mR} t} \right) = V_0 \cdot \left(1 - e^{-\frac{B^2 l^2}{mR} t} \right)$$

Установившаяся скорость движения перемычки равна, т.о.

$$V_0 = \frac{mgR}{B^2 l^2} = 0,5 \text{ м/с.}$$

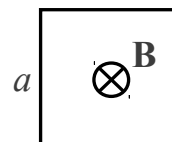
Задачи для самостоятельного решения.

12.3. Проволочная квадратная рамка со стороной a и с сопротивлением R (рис.). Однородное магнитное поле направлено перпендикулярно к плоскости рамки за чертеж. В каком направлении будет протекать по рамке индукционный ток

a) при увеличении индукции поля до значения B ,

б) при её уменьшении,

в) какой заряд q протечет по рамке при выключении поля?



12.4. Сквозь горизонтально расположенное проводящее кольцо падают с одинаковой высоты алюминиевый брусок и магнит. Что упадет первым? Дать объяснение.

12.5. В знаменитом опыте Ньютона пробка, дробишка и перышко одинаково падают в отсутствии силы сопротивления воздуха – внутри вакууммированной стеклянной трубки. Как изменятся результаты эксперимента, если дробишку заменить на небольшой намагниченный шарик, а откачанную трубку сделать металлической и достаточно длинной. Считать, что шарик падает вертикально по оси трубки. Описать и *объяснить* характер движения шарика. Сравнить с видом решения задачи 2.2.

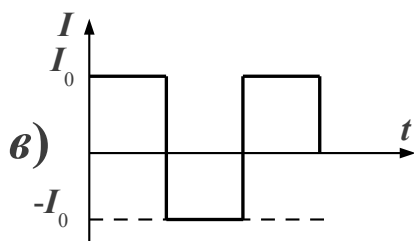
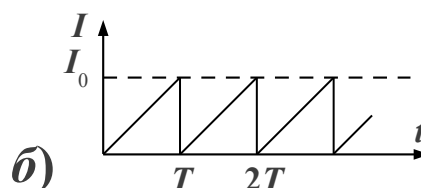
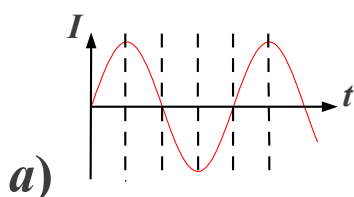
12.6. На вертикально расположенном сердечнике электромагнита лежит монета. При подключении обмотки электромагнита к источнику постоянного напряжения монета подскакивает вверх. Объясните этот эффект.

12.7. На разомкнутый магнитопровод сетевого трансформатора надевают рамку с $N_2 = 35$ витками провода, замкнутого на

лампочку от карманного фонарика ($U_2 = 3,5 \text{ В}$). Лампочка начинает светиться в полный накал. Объясните эффект. Найдите число витков N_1 включенной в сеть ($U_1 = 220 \text{ В}$) обмотки трансформатора. Рассеянием магнитного потока за пределы магнитопровода пренебречь.

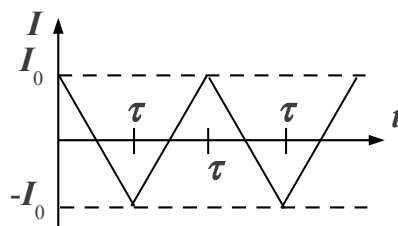
12.8. Две катушки надеты на общий сердечник. Первая катушка соединена с генератором сигналов специальной формы. Форма тока во второй катушке контролируется с помощью осциллографа. Какова форма сигналов на экране осциллографа (учесть фазовые соотношения) для различных случаев тока, протекающего в первой катушке *a) – в)*:

a) синусоидальное; *б)* «пилообразное»; *в)* «меандр» (см. рис.)



12.9. Проволочное кольцо с сопротивлением $R = 314 \text{ МОм}$ надето на соленоид с площадью поперечного сечения $S = 2,5 \cdot 10^{-3} \text{ м}^2$ и плотностью намотки витков $n = 10^3 \text{ м}^{-1}$.

На рисунке показана зависимость от времени тока, протекающего через соленоид ($I_0 = 0,8 \text{ А}$, $\tau = 0,5 \text{ мс}$). Постройте график зависимости от времени тока, протекающего через кольцо. Определите тепловую мощность, которую нужно отводить от кольца



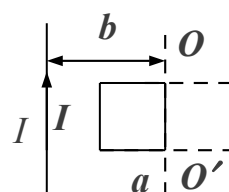
12. Электромагнитная индукция.

для поддержания его температуры неизменной. Индуктивность кольца пренебрежимо мала.

12.10. В простейшем приборе для измерения индукции магнитного поля «флюксметре» (flux - поток) используется небольшой «пробный виток» с площадью $S = 2 \text{ см}^2$, соединенный с баллистическим гальванометром^{*)}. Плоскость витка первоначально перпендикулярна магнитному полю, затем его поворачивают на угол 90° . Сопротивление витка $R = 0,01 \text{ Ом}$. Определите индукцию поля B , если гальванометр зарегистрировал протекание заряда $q = 1 \text{ мкКл}$. (Указание: Используйте решение задачи 12.1)

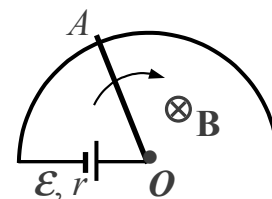
12.11. Индукция магнитного поля, пронизывающего небольшую медную рамку меняется по закону $B = kt$, где $k = 10 \text{ Тл/с}$. Рамка имеет форму квадрата со стороной $a = 1 \text{ см}$, сечение медного провода равно $S = 0,3 \text{ мм}^2$, плоскость рамки перпендикулярна полю. Какое количество теплоты Q будет выделено рамкой за время $\tau = 1 \text{ с}$. $\rho_{\text{Cu}} = 1,7 \cdot 10^{-8} \text{ Ом}\cdot\text{м}$.

12.12. Квадратная проволочная рамка со стороной a и прямой проводник с постоянным током I лежат в одной плоскости. Сопротивление рамки R . Её повернули на 180° вокруг оси OO' , отстоящей от проводника с током на расстояние b . Найти заряд, протекший в рамке.

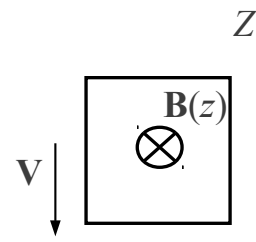


^{*)} Впервые такой способ был предложен А.Г. Столетовым.

12.13. Стержень OA с сопротивлением R и длиной L скользит по полукольцу (см. рис.). Контур находится в однородном магнитном поле с индукцией B , перпендикулярной к его плоскости. В контур включен источник тока с ЭДС \mathcal{E} и внутренним сопротивлением r . Определите силу тока в стержне, если угловая скорость его движения равна ω . Сопротивлением полукольца и контактов пренебречь.



12.14. * Проволочная квадратная рамка массы m со стороной a падает в гравитационном поле Земли, все время оставаясь также и в магнитном поле, перпендикулярном плоскости рамки (рис.). Индукция магнитного поля изменяется по закону $B(z) = B_0 + kz$. Сопротивление рамки равно R . Найти закон движения рамки. С какой установившейся скоростью будет двигаться рамка через некоторое время полета?



12.15. Перпендикулярно линиям однородного магнитного поля B движется с постоянной скоростью V металлический стержень длины l . Магнитное поле (сила Лоренца) совершает работу по разделению свободных электронов внутри стержня, что и приводит к появлению ЭДС индукции на его концах $\mathcal{E} = \frac{A^{ст}}{q} = BVl$. Как это согласуется с утверждением, что сила Лоренца, перпендикулярная скорости заряженной частицы, не совершает над ней работы?

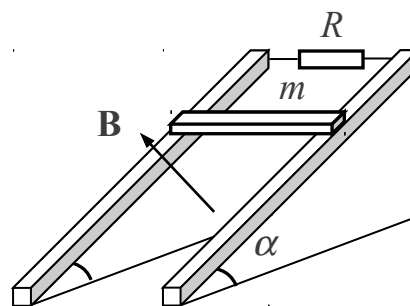
12.16. По П-образной рамке скользит с постоянной

12. Электромагнитная индукция.

скоростью V под действием силы F перемычка. Контур находится в перпендикулярном к его плоскости однородном магнитном поле. Чему равна сила F , если в контуре выделяется каждую секунду количество тепла Q ?

12.17. В однородном магнитном поле с индукцией $B = 0,02 \text{ Тл}$ равномерно вращается вокруг вертикальной оси горизонтальный стержень длиной $l = 0,5 \text{ м}$. Ось вращения проходит через конец стержня параллельно линиям магнитной индукции. Определить угловую скорость вращения стержня, при которой на концах стержня возникает разность потенциалов $U = 0,1 \text{ В}$.

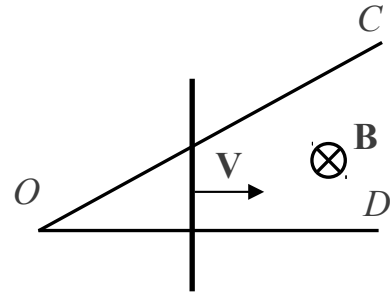
12.18. По двум медным шинам, установленным под углом α к горизонту, скользит под действием силы тяжести медный брусок массы m (см. рис.). В окружающем шины пространстве создано однородное магнитное поле с индукцией B , перпендикулярное к плоскости, в которой перемещается брусок. Вверху шины замкнуты на сопротивление R . Коэффициент трения между поверхностями шин и бруска равен μ ($\mu < \text{tg}\alpha$). Расстояние между шинами равно l . Пренебрегая сопротивлением шин, бруска и мест контакта между ними, найти установившуюся скорость бруска.



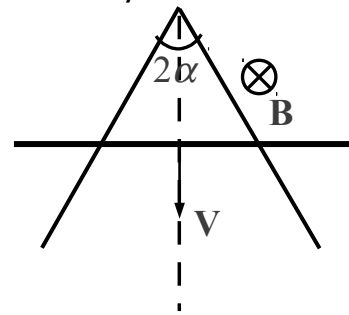
Вверху шины замкнуты на сопротивление R . Коэффициент трения между поверхностями шин и бруска равен μ ($\mu < \text{tg}\alpha$). Расстояние между шинами равно l . Пренебрегая сопротивлением шин, бруска и мест контакта между ними, найти установившуюся скорость бруска.

12.19. * Система отличается от рассмотренной в предыдущей задаче лишь тем, что вместо сопротивления R между шинами подключен конденсатор емкости C . Брусок удерживают на расстоянии L от основания «горки». Найти время соскальзывания бруска τ .

12.20. * Металлический стержень, сопротивление единицы длины которого равно ρ , скользит с постоянной скоростью V , замыкая две медные шины OC и OD ($V \parallel OD$), расположенные под углом α друг к другу. Стержень перпендикулярен к шине OD (см. рис.). Система находится в однородном магнитном поле с индукцией B , перпендикулярной к плоскости системы. Пренебрегая сопротивлением шин и контактов, найти количество тепла, которое выделяется в цепи за время перемещения стержня на расстояние L от точки O .

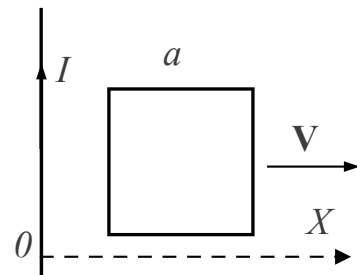


12.21. * Прямой провод с сопротивлением ρ на единицу длины согнут под углом 2α (см. рис). Перемычка из такого же провода, расположенная перпендикулярно к биссектрисе угла 2α , образует с согнутым проводом замкнутый треугольный контур.



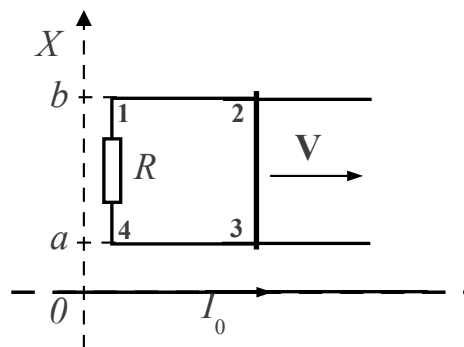
Этот контур помещен в однородное магнитное поле с индукцией B , перпендикулярное к его плоскости. Найти направление и силу I тока, текущего в контуре, когда перемычка движется с постоянной скоростью V . Сопротивлением в местах контактов пренебречь.

12.22. * Квадратная рамка со стороной a и длинный прямой провод с током I находятся в одной плоскости (рис.). Рамку поступательно перемещают вправо с постоянной скоростью V . Найти ЭДС индукции в рамке как функцию расстояния x .



12. Электромагнитная индукция.

12.23. * На расстояниях a и b от длинного прямого проводника с постоянным током I_0 расположены два параллельных ему провода, замкнутых на одном конце сопротивлением R (рис.). По проводам без трения перемещают с постоянной скоростью V стержень-перемычку. Пренебрегая сопротивлением проводов и стержня, а также магнитным полем индукционного тока, найти:



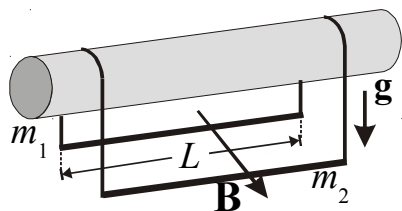
а) силу I и направление индукционного тока в контуре 1–2–3–4,

б) силу F , необходимую, чтобы поддерживать постоянной скорость стержня 2–3, и расстояние x от провода с током I_0 до точки, в которой нужно приложить эту силу, чтобы стержень двигался поступательно,

в) мощность P , затрачиваемую на перемещение стержня.

Сопротивлением проводов, стержня и контактов пренебречь.

12.24. * Через неподвижный гладкий горизонтальный непроводящий стержень перекинuty два легких гибких провода, к концам которых припаяны два проводящих стержня длиной l так, что оси всех стержней параллельны, а каждый из проводов располагается в вертикальной плоскости, перпендикулярной осям стержней. Система находится в однородном магнитном поле,



вектор индукции которого \mathbf{B} направлен горизонтально перпендикулярно осям стержней. Масса первого проводящего стержня равна m_1 , второго – m_2 ; Найти установившуюся скорость поступательного движения стержней, если их общее сопротивление равно R . Сопротивлением

проводов, трением и индуктивностью проводящего контура пренебречь.

13. Самоиндукция. Взаимоиндукция. Энергия магнитного поля.

• Явление электромагнитной индукции предполагает появление в проводящем контуре дополнительной ЭДС также и при изменении *собственного* магнитного потока контура (обусловленного током в самом контуре) – ЭДС *самоиндукции*. Из закона Био–Савара–Лапласа (см. 10.1) следует, что магнитная индукция в любой точке пространства пропорциональна силе тока в контуре*), следовательно, с учетом (12.2) собственный магнитный поток контура также пропорционален ей:

$$\Phi_s = LI. \quad (13.1)$$

Коэффициент пропорциональности L называется коэффициентом самоиндукции или *индуктивностью* контура. Индуктивность любого контура зависит от его размеров и формы, а также от магнитных свойств окружающей среды. При изменении тока в контуре в нем возникает ЭДС самоиндукции, которая с учетом соотношений (12.1) и (13.1) равна:

$$\mathcal{E}_{si} = -L \frac{dI}{dt} - I \frac{dL}{dt}^{**}). \quad (13.2)$$

• Если два контура с током 1 и 2 находятся близко друг к другу, то говорят о их *взаимоиндукции*. Магнитное поле контура 1 создает поток через поверхность, ограниченную контуром 2, который прямо пропорционален силе тока в контуре 1*), и наоборот:

$$\Phi_{21} = L_{21}I_1, \quad \Phi_{12} = L_{12}I_2. \quad (13.3)$$

Коэффициенты пропорциональности L_{12} и L_{21} называются коэффициентами взаимной индукции контуров или их взаимными

*) При отсутствии вблизи контура ферромагнетиков.

**) Здесь учтена возможность изменений и самой индуктивности контура L .

13. Самоиндукция. Взаимоиндукция.

индуктивностями. Они зависят от размеров, формы контуров, их взаимного расположения, а также от магнитных свойств окружающей среды. Можно показать, что в отсутствие ферромагнетиков $L_{12} = L_{21}$ («теорема взаимности»).

- Задачи этого раздела, как правило, связаны с использованием известного распределения индукции магнитного поля проводников с током $\mathbf{B}(\mathbf{r})$. Вычисление создаваемого ими потока Φ_B через поверхность, ограниченную этим или другими проводниками позволяет выделить коэффициент пропорциональности между данным потоком и силой тока в проводнике – источнике поля – коэффициент само- или взаимоиндукции. Проиллюстрируем это на простых примерах.

Примеры решения задач

13.1. Определить индуктивность соленоида – катушки длиной $l = 50$ см и диаметром $d = 5$ см, содержащей $N = 400$ витков.

Решение.

В задаче 10.5 мы нашли индукцию магнитного поля внутри соленоида. Легко получить как магнитный поток, пронизывающий каждый виток соленоида $\Phi_1 = B \cdot S$, так и полный поток через все N витков $\Phi = N \cdot \Phi_1$. Остается использовать равенство (10.16) и очевидные геометрические соотношения:

$$\Phi = N \cdot \mu_0 \mu_r n \cdot S \cdot I = \mu \mu_0 \frac{N^2}{l} S \cdot I = \mu \mu_0 \frac{N^2}{l^2} S l \cdot I = \mu \mu_0 \frac{N^2}{l^2} V \cdot I = \mu \mu_0 n^2 V \cdot I.$$

Выделяя коэффициент пропорциональности между Φ и I , в соответствии с определением индуктивности (13.1), получаем:

$$L = \mu \mu_0 n^2 V, \quad (13.4)$$

где V – объём внутри соленоида. В нашем примере

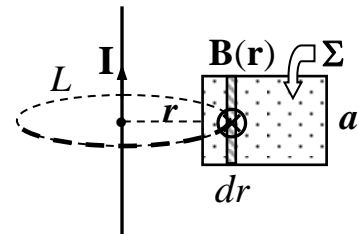
$$L = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{\text{Гн}}{\text{м}} \left(\frac{400}{0,5 \text{ м}} \right)^2 \frac{\pi \cdot (0,05 \text{ м})^2}{4} 0,5 \text{ м} \approx 0,8 \text{ мГн}.$$

Задача

13.2. Определить взаимную индуктивность L_{12} тороидальной катушки (тороида) и проходящего по её оси бесконечного прямого провода. Тороид имеет прямоугольное сечение ширины a . Внутренний радиус тороида равен r_1 внешний r_2 . Число витков тороида равно N . Система находится в однородном магнетике с магнитной проницаемостью μ .

Решение.

Определим поток вектора магнитной индукции \mathbf{B} поля прямолинейного проводника через поверхность Σ , ограниченную одним витком тороида. Мы знаем, что линии магнитной индукции имеют в данном случае форму концентрических окружностей и пересекают поверхность каждого витка по нормали к ней. Учитывая, кроме того, что индукция зависит только от расстояния r от проводника – источника поля, разобьем поверхность витка на малые элементы, в пределах каждого из которых индукция не меняется. Это узкие полоски параллельные прямолинейному проводнику с током с площадью $dS = a \cdot dr$ (см. рис.). Искомый поток получается интегрированием по поверхности Σ , ограниченной контуром:



$$\Phi = \int_{\Sigma} (\mathbf{B}, d\mathbf{S}) = \int_{\Sigma} B(r) dS = \int_{r_1}^{r_2} B(r) a dr.$$

Используем полученный ранее при решении задачи 10.1 результат для поля прямолинейного проводника с током (10.7):

13. Самоиндукция. Взаимоиндукция.

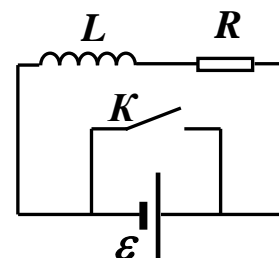
$$\Phi = \int_{r_1}^{r_2} \frac{\mu\mu_0 I}{2\pi r} a dr = \frac{\mu\mu_0 I a}{2\pi} \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r} = \left(\frac{\mu\mu_0 a}{2\pi} \ln \frac{r_2}{r_1} \right) \cdot I.$$

Полный поток через все витки тороида в N раз больше, поэтому искомая взаимная индуктивность равна

$$L_{12} = N \frac{\mu\mu_0 a}{2\pi} \ln \frac{r_2}{r_1}.$$

Задача

13.3. Катушка с индуктивностью $L = 10$ Гн подключена к источнику тока через сопротивление $R = 10$ Ом. Найти закон уменьшения силы тока в цепи с течением времени $I(t)$ после замыкания источника тока накоротко ключом K (см. рис.).



Решение.

После замыкания ключа K ток в контуре, состоящем из катушки и резистора не исчезает мгновенно, благодаря явлению самоиндукции. Запишем равенство соответствующее второму правилу Кирхгофа для этого контура:

$$IR = -L \frac{dI}{dt}.$$

После стандартной операции разделения переменных и интегрирования (см., например, решение задачи 1.1) получаем:

$$\ln I = -\frac{L}{R} \cdot t + const.$$

Наконец, после простых преобразований и потенцирования:

$$I(t) = I_0 e^{-\frac{L}{R} t}.$$

Константа I_0 , очевидно – значение начальной силы тока (до замыкания ключа K):

$$I(0) = I_0 = \frac{\mathcal{E}}{R}.$$

• **Энергия магнитного поля.**

Итак, уже после отключения источника тока в цепи, рассмотренной в задаче (13.3), протекает ток самоиндукции, совершается работа по перемещению зарядов, а на резисторе выделяется тепло. Каков источник этой работы? Это *энергия магнитного поля*, окружающего проводники с током. Определив работу этого поля, мы и получим выражение для его энергии.

Элементарная работа «сторонних сил» (в нашем случае это силы вихревого электрического поля) по перемещению заряда dq равна:

$$dA = \mathcal{E}_{si} \cdot dq = -L \frac{dI}{dt} \cdot Idt = -LI dI^*), \quad (13.5)$$

Полная работа определяется суммированием элементарных работ, т.е. интегрированием выражения (13.5):

$$A = -L \int_{I_0}^0 I dI = \frac{LI_0^2}{2}. \quad (13.6)$$

Эта работа определяет энергию, «запасенную» в магнитном поле. Как и в случае поля электрического выразим ее через *характеристику самого поля – магнитную индукцию B* . Для этого запишем энергию магнитного поля соленоида через индукцию магнитного поля в нем B :

$$U_M = \frac{1}{2} LI^2 = \frac{1}{2} \mu\mu_0 n^2 V \cdot \left(\frac{B}{\mu\mu_0 n} \right)^2 = \frac{B^2}{2\mu\mu_0} \cdot V^{**}), \quad (13.7)$$

где V – объем соленоида.

Определим *энергию, приходящуюся на единицу объема пространства*, где есть магнитное поле. Поле внутри соленоида

*) Здесь использован закон ЭМИ (12.1) и определение силы тока $I = dq/dt$.

**) Используются результаты решений задач 10.5 и 13.1 для магнитной индукции поля соленоида и его индуктивности.

13. Самоиндукция. Взаимоиндукция.

однородно, поэтому получаем:

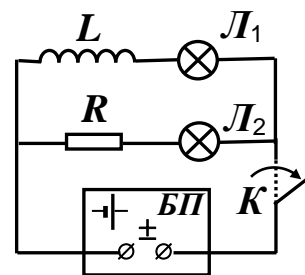
$$w_M(\mathbf{r}) = \frac{\Delta U_E}{\Delta V} = \frac{U}{V} = \frac{B^2}{2\mu\mu_0}. \quad (13.8)$$

Величина w_M называется *объемной плотностью энергии* магнитного поля. В случае неоднородного поля она позволяет определять энергию, заключенную в малых элементах пространства объемом dV : $dU_M = w_M dV$. А, зная магнитную индукцию поля как функцию координат, можно рассчитать полную энергию магнитного поля в той или иной области пространства Ω :

$$U_M = \frac{1}{2\mu_0} \int_{\Omega} \frac{B^2(\mathbf{r})}{\mu} dV. \quad (13.6)$$

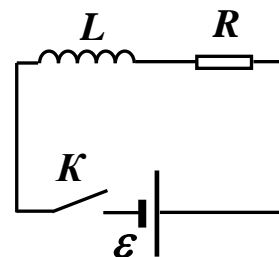
Задачи для самостоятельного решения.

13.4. В опыте по демонстрации влияния индуктивности используется схема, приведенная на рисунке. В одной из двух параллельных ветвей включена катушка с очень большой индуктивностью, а в другой – резистор,



сопротивление которого равно омическому сопротивлению обмотки катушки. L_1 и L_2 – одинаковые демонстрационные лампочки. Блок питания *БП* содержит переключатель, позволяющий менять полярность подаваемого на схему постоянного напряжения. Опишите демонстрационный эксперимент. Как ведут себя лампочки, если быстро изменять полярность напряжения блока питания?

13.5. Найти закон нарастания силы тока $I(t)$ после замыкания ключа K в представленной на рисунке цепи. Индуктивность катушки $L = 10$ Гн, сопротивление резистора $R = 10$ Ом. За какое

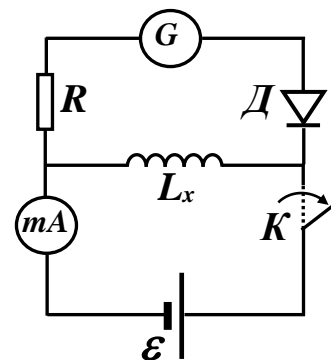


время τ сила тока достигнет 99% от предельного значения?

13.6. * Двухпроводная линия состоит из двух длинных проводов радиуса $a = 0,5$ мм, расположенных в воздухе параллельно друг другу на расстоянии $b = 10$ мм. Найти индуктивность L_1 , приходящуюся на единицу длины этих проводов. Магнитную проницаемость материала проводов и окружающей среды принять равной единице.

13.7. Длинная двухпроводная линия питания нагрузки с сопротивлением $R = 10$ Ом обладает индуктивностью $L = 0,1$ мГн. Найти закон нарастания силы тока в нагрузке при замыкании цепи. Определить время нарастания тока τ_1 и τ_2 до значений $0,5I_0$ и $0,75I_0$ соответственно, где I_0 – установившееся значение силы тока в цепи. Сравните эти значения.

13.8. * Для определения индуктивности катушки собрана экспериментальная схема, показанная на рисунке. Был измерен ток через катушку $I = 3$ мА до размыкания ключа K , а затем полный заряд протекший через баллистический гальванометр $\Delta q = 60$ мкКл за счёт «экстратока»



самоиндукции после размыкания ключа. а) Определить по этим данным индуктивность катушки L_x , если сопротивление $R = 10$ Ом. б) Предложите, как можно определять индуктивность L_x , используя эталонную катушку с известной индуктивностью L_0 , но не зная абсолютных значений R и Δq (например, в случае замены баллистического гальванометра на обычный микроамперметр).

13. Самоиндукция. Взаимоиндукция.

13.9. Определить индуктивность L_1 единицы длины “коаксиального кабеля”, который состоит из двух concentric проводников, разделенных слоем диэлектрика. Радиус внутреннего проводника цилиндрической формы (“центральная жила”) $a = 0,5$ мм, а радиус внешнего (имеющего форму тонкостенной трубки) $b = 3$ мм. Магнитную проницаемость проводников и среды между ними считать равной единице.

13.10. На бесконечный соленоид с n витками на единицу длины и площадью поперечного сечения S намотана катушка из N витков. Найти взаимную индуктивность L_{12} катушки и соленоида. Магнитную проницаемость среды, заполняющей соленоид, считать равной единице.

13.11. По соседству расположены два витка проволоки. По первому течет ток $I = 10$ А. В цепь второго включен баллистический гальванометр. Полное сопротивление второй цепи $R = 1$ Ом. Чему равна взаимная индуктивность L_{12} витков, если при выключении тока через гальванометр проходит заряд $\Delta q = 0,02$ мкКл?

13.12. Для частного случая – тороидальных катушек доказать *теорему взаимности*. На поверхность тора квадратного сечения равномерно навито N_1 витков тонкой проволоки. На эту обмотку в свою очередь равномерно навито ещё N_2 витков. Внутренний и внешний радиусы тора равны a и b . Найти взаимную индуктивность обеих обмоток. Считать, что система находится в однородном магнетике проницаемости μ .

13.13. Два соленоида с индуктивностями $L_1 = 0,4$ Гн и $L_2 = 0,9$

Γ_n одинаковой длины и равного сечения вставлены один в другой. Определить взаимную индуктивность соленоидов.

13.14. Две катушки намотаны на один сердечник. Индуктивность первой катушки $L_1 = 0,64 \Gamma_n$, второй – $L_2 = 1 \Gamma_n$. Сопротивление второй катушки $R_2 = 400 \text{ Ом}$. Определить силу тока I_2 возникающего во второй катушке, если ток в первой катушке равномерно уменьшать за время $\Delta t = 10 \text{ мс}$ от $I_1 = 0,6 \text{ А}$ до нуля.

13.15. Определить энергию магнитного поля, приходящуюся на единицу длины “коаксиального кабеля” (например, описанного в задаче 13.7) при протекании по нему постоянного тока силой $I = 1 \text{ А}$.

13.16. Соленоид с обмоткой, содержащей $N = 1000$ витков провода, имеет длину $l = 1 \text{ м}$ и площадь поперечного сечения $S = 20 \text{ см}^2$. Определить силу тока, при которой объемная плотность энергии магнитного поля внутри соленоида равна $w = 0,628 \text{ Дж/м}^3$. Какова при этом полная энергия магнитного поля внутри соленоида?

13.17. Обмотка электромагнита, находясь под постоянным напряжением, имеет сопротивление $R = 5 \text{ Ом}$ и индуктивность $L = 0,5 \Gamma_n$. Определить время, за которое в обмотке выделится количество теплоты, равное энергии магнитного поля в сердечнике.