1. *Кинематика движения материальной точки и абсолютно твердого тела.*

Кинематика – раздел механики, изучающий движение тел без анализа причин, обусловливающих это движение. Простейшей моделью физического тела является материальная точка (МТ), которой называют тело, размерами которого можно пренебречь в условиях данной задачи.

Положение любого тела в пространстве может быть определено только по отношению к *системе отсчета (СО)*. Для количественного описания движения с последней связывается *система координат,* в простейшем случае – декартова прямоугольная система координат.

Положение МТ в такой системе задается радиус-вектором, проведенным из начала координат к данной точке:

$$\mathbf{r} = x \cdot \mathbf{e}_x + y \cdot \mathbf{e}_y + z \cdot \mathbf{e}_z. \qquad (1.1)$$

- Вектор $\Delta\mathbf{r}$, соединяющий начальную и конечную точки движения, называется *перемещением*. Линия, которую описывает МТ при своем движении, представляет собой *траекторию*. Она задается уравнением кривой. Путь s – это *длина участка траектории*, причем всегда $s \geq |\Delta\mathbf{r}|$.

- Мгновенная скорость МТ есть первая производная радиус-вектора по времени. В декартовой системе координат:

$$\mathbf{V} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \dot{\mathbf{r}} = V_x \cdot \mathbf{e}_x + V_y \cdot \mathbf{e}_y + V_z \cdot \mathbf{e}_z, \qquad (1.2)$$

где $V_x = \dot{x}$; $V_y = \dot{y}$; $V_z = \dot{z}$.

Модуль вектора скорости $V = \sqrt{V_x^{\,2} + V_y^{\,2} + V_z^{\,2}}$ характеризует изменение пройденного пути со временем:

$$V(t)=\frac{ds}{dt}=\dot{s}(t). \tag{1.3}$$

Зная мгновенную скорость как функцию времени, можно найти вектор перемещения МТ:

$$\Delta\mathbf{r}=\int_{t_1}^{t_2}\mathbf{V}dt\,, \tag{1.4}$$

а также изменение координат и пройденный путь:

$$\Delta x=\int_{t_1}^{t_2}V_x(t)\,dt\,;\quad \Delta y=\int_{t_1}^{t_2}V_y(t)\,dt\,;\quad \Delta z=\int_{t_1}^{t_2}V_z(t)\,dt\,;\quad s=\int_{t_1}^{t_2}V(t)dt\,. \tag{1.5}$$

- Мгновенным ускорением называется первая производная скорости по времени:

$$\mathbf{a}=\frac{d\mathbf{V}}{dt}=\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}\,,\qquad \mathbf{a}=a_x\mathbf{e}_x+a_y\mathbf{e}_y+a_z\mathbf{e}_z\,, \tag{1.6}$$

где $a_x=\dot{V}_x=\ddot{x},\ a_y=\dot{V}_y=\ddot{y},\ a_z=\dot{V}_z=\ddot{z}$.

Зная функцию $\mathbf{a}(t)$, можно определить изменение вектора скорости за промежуток времени между моментами t_1 и t_2:

$$\Delta\mathbf{V}=\int_{t_1}^{t_2}\mathbf{a}(t)dt\,. \tag{1.7}$$

Если известны начальные положение $\mathbf{r}(0)$, скорость МТ $\mathbf{V}(0)$ и функция $\mathbf{a}(t)$, то

$$\begin{aligned}\mathbf{V}(t)&=\mathbf{V}(0)+\int_0^t\mathbf{a}(t')dt'\\ \mathbf{r}(t)&=\mathbf{r}(0)+\int_0^t\mathbf{V}(t')dt'.\end{aligned} \tag{1.8}$$

Вектор ускорения в общем случае составляет некоторый угол с касательной к траектории в данной точке. Часто оказывается удобным разложить вектор $\mathbf{a}$ на две составляющие:

касательную к траектории в данной точке – $\mathbf{a}_\tau$ и перпендикулярную к касательной – $\mathbf{a}_n$:

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}_\tau + \mathbf{a}_n.$$

Величины $\mathbf{a}_\tau$ и $\mathbf{a}_n$ называют *тангенциальным* и *нормальным* ускорениями соответственно.

$$a_n = \frac{V^2}{R_{кр}}; \quad a_\tau = \dot{V}; \quad a = \sqrt{a_n^2 + a_\tau^2}, \tag{1.9}$$

где $R_{кр}$ – радиус кривизны траектории.

- При описании криволинейного движения материальной точки удобно пользоваться угловыми характеристиками движения – угловыми перемещением, скоростью и ускорением.

Малым угловым перемещением МТ $\Delta\boldsymbol{\alpha}$ называют *вектор*, равный по величине углу поворота радиуса, проведенного от оси вращения к этой точке, и направленный вдоль указанной оси по правилу правого винта.

Угловая скорость есть первая производная по времени углового перемещения:

$$\boldsymbol{\omega} = \frac{d\boldsymbol{\alpha}}{dt}. \tag{1.10}$$

При движении МТ по окружности связь между линейной и угловой скоростью определяется соотношением:

$$\mathbf{V} = [\boldsymbol{\omega}, \mathbf{r}]\,. \tag{1.11}$$

Угловым ускорением называют первую производную по времени от вектора угловой скорости:

$$\boldsymbol{\beta} = \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt}. \tag{1.12}$$

Если движение происходит в одной плоскости, то можно определить скалярную величину – угол поворота радиус-вектора МТ:

$$\Delta\alpha = \int_{t_1}^{t_2} \omega(t)dt \,. \tag{1.13}$$

- Положение твёрдого тела (ТТ) в пространстве полностью определяется заданием координат трех не совпадающих друг с другом точек, то есть заданием положения треугольника.

Простейшим типом движения ТТ является **поступательное**. При этом каждая прямая, связанная жестко с ТТ, движется параллельно самой себе. При описании такого движения, когда все точки тела движутся по одинаковым траекториям, можно пользоваться соотношениями, определяющими кинематику материальной точки.

Другим простейшим видом представляется **вращение** ТТ около неподвижной оси. Описать такое движение можно всего лишь одной координатой, задав угол поворота ТТ относительно фиксированного направления.

- Более сложным оказывается так называемое ***плоское движение*** ТТ, при котором все его точки движутся в параллельных плоскостях. Такое движение можно представить, комбинируя поступательное движение тела и его поворот вокруг оси перпендикулярной плоскостям, в которых движутся точки ТТ. Тогда скорости точек тела:

$$\mathbf{V}_i = \mathbf{V}_0 + [\boldsymbol{\omega}\mathbf{r}_i], \tag{1.14}$$

где $\mathbf{V}_0$ – скорость поступательного движения оси поворота, $\boldsymbol{\omega}$ – угловая скорость поворота, $\mathbf{r}_i$ – радиус вектор, проведенный от оси вращения к i–ой точке ТТ.

Необходимо подчеркнуть, что разложение движения на поступательное и вращательное может быть произведено *бесконечным числом способов*. Ось вращения может быть выбрана произвольно. При этом какую ось мы бы ни выбрали для описания движения, *угловая скорость будет иметь одно и то же значение*.

Интересно отметить, что из множества способов разложения движения всегда можно найти такой, когда движение сведется к последовательности поворотов вокруг некоторой оси ($\mathbf{V}_0 = 0$). Эта ось вращения занимает разное положение в пространстве в разные моменты времени. Её называют *мгновенной осью вращения*.

Приступая к решению задач по разделу кинематика, следует, прежде всего

- выбрать систему отсчёта, относительно которой рассматривается движение тел задачи, и
- связать с ней систему координат с учётом симметрии задачи (декартова, цилиндрическая, сферическая системы координат).
- Далее необходимо спроектировать известные по условию задачи векторы (ускорения, скорости, начального смещения) на оси выбранной системы координат и,
- используя приведенные выше соотношения для связи кинематических величин, записать соответствующие уравнения и найти искомые величины.

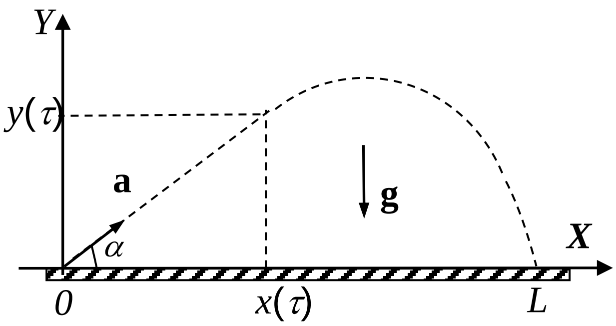
Примеры решения задач

1.1. Двигатель ракеты сообщает ей при взлёте постоянное ускорение $\mathbf{a}$, составляющее угол α с горизонтом. Через время τ после старта двигатель выключают. Найти расстояние L между точками старта и падения ракеты, считая, что её движение началось без начальной скорости.

Решение

Систему отсчёта естественно связать с Землей и использовать прямоугольную систему координат, поместив её начало в точку старта.

По условию задачи известны точка вылета, начальная скорость ($\mathbf{V}_0$ = 0) и ускорения на первом ($\mathbf{a}$) и втором ($\mathbf{g}$) этапе движения. Пока работает двигатель:



$$V_x(t) = V_{0x} + \int_0^t a_x(t')dt' = a\cos\alpha \cdot t,$$

$$V_y(t) = V_{0y} + \int_0^t a_y(t')dt' = a\sin\alpha \cdot t,$$

$$x(t) = x_0 + \int_0^t V_x(t')dt' = a\cos\alpha \cdot \frac{t^2}{2}, \qquad y(t) = y_0 + \int_0^t V_y(t')dt' = a\sin\alpha \cdot \frac{t^2}{2}.$$

После выключения двигателя:

$$V_x(t) = V_x(\tau),$$

$$V_y(t) = V_y(\tau) - g(t-\tau),$$

$$x(t) = x(\tau) + V_x(\tau)(t-\tau),$$

$$y(t) = y(\tau) - \frac{g(t-\tau)^2}{2}.$$

Момент падения ракеты определяется условием $y(\tau_1) = 0$, где τ_1 – время всего полёта ракеты. Отсюда

$$\tau_1 = \tau \pm \sqrt{\frac{2y(\tau)}{g}}.$$

Физический смысл имеет только одно решение, соответствующее $\tau_1 > \tau$, т.е. $\tau_1 = \tau + \sqrt{\frac{2y(\tau)}{g}}.$

Искомая дальность полёта находится из условия:

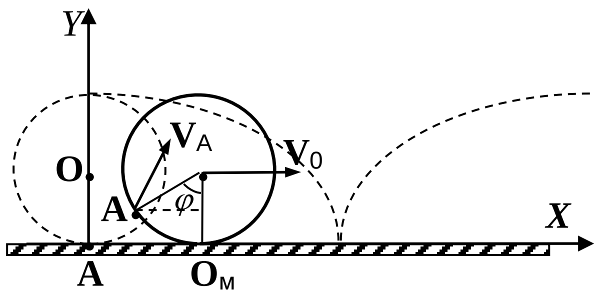
$$L = x(\tau_1) = a\cos\alpha \cdot \frac{\tau^2}{2} + a\cos\alpha \cdot \tau\sqrt{\frac{a\sin\alpha \cdot \tau^2}{g}} = a\tau^2 \cdot \cos\alpha \cdot \left(\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{a\sin\alpha}{g}}\right).$$

Задача

1.2. Точка A находится на ободе колеса радиуса R, которое катится без проскальзывания с постоянной скоростью $\mathbf{V}_0$ по горизонтальной плоскости. Найти скорость точки A, написать уравнение траектории (в параметрической форме), по которой движется точка A, и её путь за один оборот колеса.

Решение

Рассмотрение будем вести относительно системы отсчёта, связанной с Землей. Систему координат расположим, как это показано на рисунке. Движение обруча – плоское. В частности оно может быть представлено как совокупность поступательного перемещения со скорость движения оси колеса $\mathbf{V}_0$ и вращения с угловой скоростью $\omega = \dfrac{V_0}{R}$ относительно неё.



Координаты точки A:

$$x(t) = V_0 t - R\sin\varphi = V_0 t - R\sin\frac{V_0}{R}t,$$

$$y(t) = R - R\cos\frac{V_0}{R}t.$$

Это уравнения циклоиды.

Компоненты скорости точки A:

$$V_x(t) = \dot{x}(t) = V_0 - V_0\cos\frac{V_0}{R}t = V_0\left(1 - \cos\frac{V_0}{R}t\right),$$

$$V_y(t) = \dot{y}(t) = V_0\sin\frac{V_0}{R}t.$$

Модуль скорости:

$$V(t)=\sqrt{V_x^2(t)+V_y^2(t)}=V_0\sqrt{2-2\cos\frac{V_0}{R}t}=$$

$$=2V_0\sqrt{\sin^2\frac{V_0}{2R}t}=2V_0\left|\sin\frac{V_0}{2R}t\right|.$$

Время одного полного оборота колеса находится из условия:

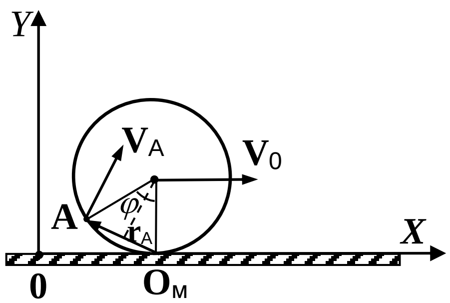
$$V_0\cdot T=2\pi R,\ \text{т.е.}\ T=\frac{2\pi R}{V_0}.$$

Путь, пройденный точкой A за период:

$$s=\int_0^T V(t)dt=2V_0\int_0^T\left|\sin\frac{V_0}{2R}\right|dt=4V_0\int_0^{T/2}\sin\frac{V_0}{2R}dt=8R\left(-\cos\frac{V_0}{2R}\right)\Bigg|_0^{T/2}=$$

$$=8R\left(-\cos\frac{\pi}{2}+1\right)=8R$$

Движение колеса можно представить также как последовательность поворотов вокруг мгновенной оси О$_М$ (так как проскальзывание отсутствует, то в любой момент времени скорость точки касания колеса и плоскости О$_М$ равна нулю).



$$\mathbf{V}_A=[\boldsymbol{\omega}\mathbf{r}_A],$$

$$V_A=\omega\cdot 2R\left|\sin\frac{\varphi}{2}\right|=2V_0\left|\sin\frac{\varphi}{2}\right|=2V_0\left|\sin\frac{V_0}{2R}t\right|.$$

Естественно, что мы получили такой же результат.

Задача

1.3. * Зависимость модуля скорости частицы V от пройденного пути s определяется функцией $V(s)=V_0-bs$.

а) Найти зависимость s от времени t.

б) Определить зависимость V от t.

Решение

a) Заданную зависимость V от пройденного пути представим в виде:

$$\frac{ds}{dt} = -b\left(s - \frac{V_0}{b}\right). \qquad (1)$$

Соотношение (1) представляет собой дифференциальное уравнение первого порядка. Если провести замену переменной $s(t)$ на $u(t) = s - \frac{V_0}{b}$, то, поскольку дифференциалы величин ds и du (малые приращения) не отличаются, равенство (1) принимает вид:

$$\frac{du}{dt} = -bu\,. \qquad (2)$$

Это так называемое уравнение с разделяющимися переменными, решение которого после приведения к виду:

$$\frac{du}{u} = -b\,dt\,. \qquad (3)$$

выполняется посредством интегрирования правой и левой частей:

$$\ln u = -b \cdot t + const\,. \qquad (4)$$

Константу интегрирования удобно представить как $\ln u_0$, тогда после простых преобразований и потенциирования получим:

$$u(t) = u_0 e^{-bt}\,. \qquad (5)$$

Возвращаясь к исходной переменной, запишем:

$$s(t) = \frac{V_0}{b} + u_0 e^{-b\,t}\,. \qquad (6)$$

Константа интегрирования u_0, определяется из начальных условий – $s(0) = 0$:

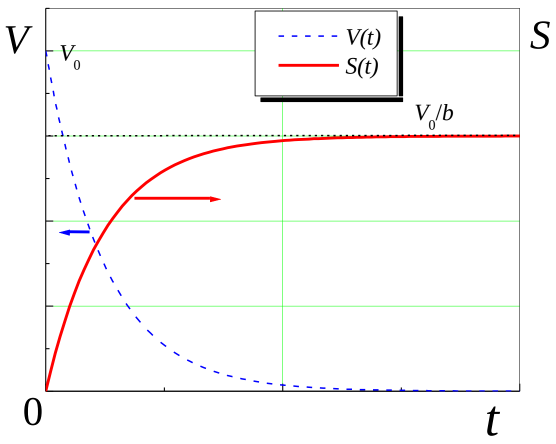
$$s(0) = \frac{V_0}{b} + u_0 \cdot 1 \quad \Rightarrow \quad u_0 = -\frac{V_0}{b},$$

Итак, путь зависит от времени по закону:

$$s(t) = \frac{V_0}{b} \cdot \left(1 - e^{-b\,t}\right). \qquad (8)$$

б) Зависимость скорости от времени получим, дифференцируя равенство (8):

$$V(t) = V_0 \cdot e^{-b\,t}. \qquad (9)$$



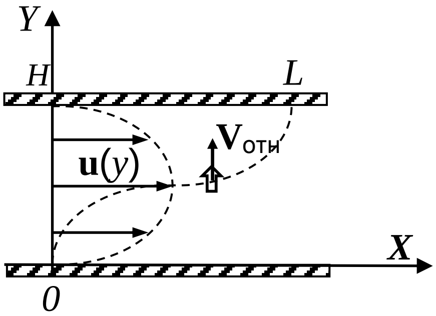
Полученные зависимости представлены графически на рисунке и имеют ясный физический смысл, который мы предлагаем продумать читателю самостоятельно.

Задача

1.4. * Лодка пересекает реку с постоянной относительно воды и перпендикулярной берегам скоростью $V_{отн}$ = 0,3 *м/с*. Ширина реки равна H = 63 *м*. Скорость течения изменяется по параболическому закону $u(y) = u_0 - 4\frac{u_0}{H^2}\left(y - \frac{H}{2}\right)^2$, где y – расстояние от берега, u_0 – константа, равная 5 *м/с*. Найти снос лодки L вниз по течению от пункта ее отправления до места причаливания на противоположном берегу.

Решение

Как известно, механическое движение всегда носит относительный характер – его характеристики различны в разных системах отсчёта. Поскольку в задаче дана скорость лодки **относительно воды**, будем использовать две системы отсчёта – «неподвижную», связанную с берегом, и «движущуюся» – связанную с водой в реке. Направим координатные оси обеих



систем отсчёта вдоль берега (OX) и перпендикулярно к нему (OY). Скорость лодки относительно неподвижной системы отсчёта равна сумме скорости лодки относительно движущейся системы отсчёта (воды) и скорости движущейся системы отсчёта относительно неподвижной (берега):

$$\mathbf{V} = \mathbf{V}_{\text{отн}} + \mathbf{u}.$$

Сложное движение лодки можно представить как сумму двух более простых – вдоль берега и перпендикулярно к нему. Первое происходит со скоростью движения относительно воды $V_{\text{отн}}$, второе – со скоростью воды относительно берега $u(y)$. Поскольку вдоль оси OY движение является равномерным закон этого движения можно записать в виде:

$$y(t) = V_{\text{отн}} \cdot t. \qquad (1)$$

Это позволяет определить зависимость изменения скорости лодки вдоль оси OX ***от времени***. Последнее необходимо для определения изменения координаты в каждом направлении, как интеграл соответствующих функций скорости по времени в пределах «времени переправы» τ:

$$\Delta y(\tau) = y(\tau) = H = \int_0^\tau V_y(t)dt\,, \qquad (2)$$

$$\Delta x(\tau) = x(\tau) = L = \int_0^\tau V_x(t)dt\,. \qquad (3)$$

Интеграл в равенстве (2) легко вычисляется и, поскольку ширина реки H известна, это позволяет найти время переправы:

$$H=\int_0^\tau V_y(t)dt=\int_0^\tau V_{\text{отн}}dt=V_{\text{отн}}\cdot\tau \quad\Rightarrow\quad \tau=H/V_{\text{отн}}. \qquad (4)$$

Для определения сноса лодки вниз по течению $L = x(\tau)$ придётся провести довольно кропотливую, но несложную процедуру вычисления соответствующих интегралов:

$$L=\int_0^\tau u(t)dt=\int_0^\tau u_0dt-4\frac{u_0}{H^2}\int_0^\tau\left(y(t)-\frac{H}{2}\right)^2dt=\int_0^\tau u_0dt-4\frac{u_0}{H^2}\int_0^\tau\left(V_{\text{отн}}\cdot t-\frac{H}{2}\right)^2dt=$$

$$=u_0\tau-4\frac{u_0}{H}\frac{1}{V_{\text{отн}}}\frac{1}{3}\left(V_{\text{отн}}\cdot t-\frac{H}{2}\right)^3\Bigg|_0^\tau=$$

$$=u_0\tau-4\frac{u_0}{H}\frac{1}{V_{\text{отн}}}\frac{1}{3}\left[\left(V_{\text{отн}}\cdot\tau-\frac{H}{2}\right)^3+\left(\frac{H}{2}\right)^3\right]=$$

[подставим найденное ранее значение $\tau = H/V_{\text{отн}}$]

$$=u_0\cdot\frac{H}{V_{\text{отн}}}-4\frac{u_0}{H}\frac{1}{V_{\text{отн}}}\frac{1}{3}\left[\left(V_{\text{отн}}\cdot\frac{H}{V_{\text{отн}}}-\frac{H}{2}\right)^3+\left(\frac{H}{2}\right)^3\right]=$$

$$=\frac{u_0}{V_{\text{отн}}}\cdot H-\frac{4}{3}\frac{1}{H}\frac{u_0}{V_{\text{отн}}}\left[\left(H-\frac{H}{2}\right)^3+\left(\frac{H}{2}\right)^3\right]=\frac{u_0}{V_{\text{отн}}}\cdot H-\frac{4}{3}\frac{1}{H^2}\frac{u_0}{V_{\text{отн}}}\frac{H^3}{4}=$$

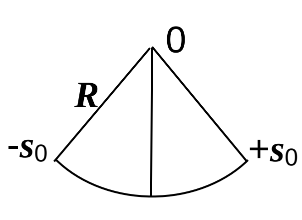
$$=\frac{u_0}{V_{\text{отн}}}\cdot H-\frac{1}{3}\frac{u_0}{V_{\text{отн}}}\cdot H=\frac{2}{3}\frac{u_0}{V_{\text{отн}}}\cdot H.$$

Итак, снос лодки с учётом численных данных задачи равен:

$$L=\frac{2}{3}\frac{u_0}{V_{\text{отн}}}\cdot H=700\,м.$$

Задачи для самостоятельного решения.

1.5. Атом в молекуле, совершая так называемые “маятниковые колебания”, движется по дуге окружности радиуса R по закону $s = s_0 cos\omega t$ (s – длина дуги). Найти полное



ускорение атома в точках *а*) $s = 0$ и *б*) $s = \pm s_0$. Считать $R = 10^{-7}$ *см*, $s_0 = 10^{-8}$ *см* и $\omega = 10^{13}$ c^{-1}.

1.6. Частица движется по круговой орбите радиуса R так, что зависимость угла поворота радиус-вектора от времени имеет вид: $\varphi(t) = a + bt - ct^2$. Найти зависимость от времени: 1) угловой скорости, 2) линейной скорости, 3) тангенциального ускорения, 4) нормального ускорения и 5) полного ускорения частицы.

1.7. Шар вращается вокруг оси, проходящей через его центр с помощью электромотора с частотой $\nu = 1800$ *об/мин*. После выключения электромотора шар, вращаясь равнозамедленно, совершил $N = 150$ оборотов и остановился. Сколько времени прошло с момента выключения до остановки.

1.8. Диск электропроигрывателя вращается с постоянной угловой скоростью, делая $\nu = 33{,}(3)$ *об/мин*. После выключения двигателя диск останавливается за счет трения через $\tau = 20$ *с*. Считая движение равнозамедленным, найти, сколько оборотов сделает диск после выключения двигателя до полной остановки.

1.9. Маховик вращается, совершая $\nu_0 = 20$ *об/с*. После выключения двигателя, вращавшего маховик, он остановился, сделав $N = 250$ оборотов. Считая движение равнозамедленным, найти угловое ускорение маховика.

1.10. Радиус-вектор частицы определяется выражением $\mathbf{r} = 3t^2\cdot\mathbf{e}_x + 4t^2\cdot\mathbf{e}_y + 7\cdot\mathbf{e}_z$ (*м*). Вычислить *а*) путь s, пройденный частицей за первые 10 *с* движения, б) модуль перемещения $|\Delta\mathbf{r}|$ за это время, *в*) объяснить полученный результат.

1.11. Радиус-вектор частицы определяется выражением $\mathbf{r} = 3t^2\cdot\mathbf{e}_x + 2t\cdot\mathbf{e}_y + 1\cdot\mathbf{e}_z$ (*м*). Найти: *а*) зависимость от времени скорости $\mathbf{V}$ и ускорения $\mathbf{a}$ частицы, *б*) модуль скорости в момент времени $\tau = 1$ *с*, *в*) приближённое значение пути, пройденного частицей за 11-ю секунду движения.

1.12. Точка движется ускоренно по окружности вокруг неподвижной оси. Указать направления векторов линейной и угловой скорости, а также линейного и углового ускорения.

1.13. Укажите на чертеже направления вектора линейного ускорения математического маятника в следующих случаях: *а*) в момент прохождения положения равновесия, *б*) в крайнем положении, *в*) в промежуточном положении. Какие силы создают ускорение в рассмотренных случаях?

1.14. Указать на чертеже направление углового ускорения в следующих случаях: *а*) диск вращается вокруг собственной неподвижной оси с возрастающей угловой скоростью, *б*) направление оси вращения поворачивается, а скорость вращения диска остается неизменной.

1.15. Точка совершает гармонические колебания вдоль оси X с амплитудой $A = 4$ *см* и частотой $\nu = 5$ *Гц*. Найти проекции скорости V_x и ускорения a_x точки в тот момент, когда ее смещение от положения равновесия определено координатой $x_1 = 2$ *см*.

1.16. Точка движется по окружности радиуса $R = 20$ *см* с постоянным тангенциальным ускорением $a_\tau = 5$ *см/с*^{2}. Через какое время после начала движения нормальное ускорение a_n будет: *а*) равно тангенциальному, *б*) вдвое больше тангенциального?

1.17. Компоненты скорости частицы изменяются со временем по законам: $V_x = A\cdot\cos\omega t$, $V_y = A\cdot\sin\omega t$ и $V_z = 0$, где A и ω – константы. Найти модуль скорости частицы, модуль ускорения, а также угол между векторами скорости и ускорения. На основании полученных результатов сделать вывод о характере движения частицы.

1.18. Зависимость координат частицы от времени имеет вид: $x = A\cdot\cos\omega t$, $y = A\cdot\sin\omega t$ и $z = 0$ (A и ω – константы). Определить радиус-вектор $\mathbf{r}$, скорость $\mathbf{V}$ и ускорение $\mathbf{a}$ частицы, а также их модули. Найти:

а) скалярное произведение векторов $\mathbf{r}$ и $\mathbf{V}$; *б*) скалярное произведение векторов $\mathbf{r}$ и $\mathbf{a}$. Что означают полученные результаты?

в) Записать уравнение траектории частицы.

г) В каком направлении движется по траектории частица?

д) Охарактеризовать движение частицы.

1.19. Модуль скорости частицы меняется по закону $V = V_0 e^{-bt}$. Каков физический смысл константы b?

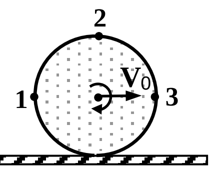
1.20. Материальная точка движется по прямой с начальной скоростью V_0 = 4 *м/с*, причем ускорение точки направлено в сторону, **противоположную** вектору $\mathbf{V}_0$, и изменяется со временем по закону $a = kt^2$. Определить перемещение точки за первые τ = 3 *с* движения и ее среднюю скорость за этот же промежуток времени. (k = 1 *м/с*^{4}).

1.21. Цилиндрическое тело *замедленно* вращается в вязкой среде вокруг своей оси. При этом абсолютная величина углового ускорения прямо пропорциональна угловой скорости. Найти:

а) закон изменения угловой скорости и построить график $\omega = f(t)$, *б*) за какой промежуток времени угловая скорость уменьшится в $n_1 = 6$ раз, если известно, что в $n_2 = 2$ раза она уменьшается за время $t_2 = 20$ *с*. Начальная скорость вращения равна ω_0.

1.22. Колесо вращается с постоянным угловым ускорением $\beta = 2$ *рад*/*с*^{2}. Через $\tau = 0{,}5$ *с* после начала движения полное ускорение точек обода колеса стало равно $a = 13{,}6$ *см*/*с*^{2}. Найти радиус колеса.

1.23. Цилиндр катится без скольжения со скоростью $\mathbf{V}_0$ (см. рис.). Найти скорости точек 1, 2 и 3. Выразить их через орты координатных осей.



1.24. Найти ускорение точки **2** в условиях предыдущей задачи.

1.25. * На обод колеса, имеющего неподвижную горизонтальную ось, намотана нить, на конце которой подвешен груз. В некоторый момент груз начинает опускаться с постоянным ускорением a_0 и при этом приводит во вращение колесо. Найти полное ускорение точек обода колеса в зависимости от высоты h, на которую опускается груз. Радиус колеса R.

1.26. Лодка пересекает реку с постоянной относительно воды скоростью $\mathbf{V}$, перпендикулярной к течению. Скорость течения реки, ширина которой d, равна нулю у берегов и линейно возрастает по мере приближения к середине реки, где достигает значения U_0 {т.е. $U(y) = 2U_0y/d$ при $0 \le y < d/2$ и $U(y) = 2U_0 - 2U_0y/d$ при $d/2 \le y < d$}. Каков снос лодки ΔX вниз по течению, от места ее отправления до причала на противоположном берегу реки?

2. *Динамика движения материальной точки.*

Изучая механическое движение, динамика выясняет причины того или иного характера этого движения. Они обусловлены взаимодействием между телами. *Мерой взаимодействия тела* с окружающими его телами и полями является *сила*.

Основу динамики материальной точки составляют законы Ньютона. *Первый закон,* даёт критерий выбора *инерциальных систем отсчета (ИСО)*: *в таких системах тело, на которое не действуют другие тела движется равномерно и прямолинейно.*

Для нахождения закона движения материальной точки используют равенство, соответствующее *второму закону Ньютона*:

$$m\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = \mathbf{F}\,. \tag{2.1}$$

Здесь $\mathbf{r}$ – радиус вектор, определяющий положение точки в пространстве, $\mathbf{F}$ – равнодействующая всех сил, действующих на материальную точку. С точки зрения математики записанное равенство может рассматриваться как дифференциальное уравнение второго порядка, решая которое с учётом начальных условий движения, можно найти зависимость координат материальной точки от времени (**закон движения**). По этой причине уравнение второго закона Ньютона называют также **уравнением движения.** Необходимо помнить, что второй закон Ньютона *справедлив только в инерциальных системах отсчета*.

В декартовых координатах уравнение второго закона Ньютона приобретает вид

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = F_x, \qquad m\frac{d^2y}{dt^2} = F_y, \qquad m\frac{d^2z}{dt^2} = F_z. \qquad (2.2)$$

Силовое воздействие всегда носит характер взаимодействия. При этом, как утверждает *третий закон Ньютона*:

“*Силы взаимодействия двух МТ равны по величине, противоположно направлены и действуют вдоль прямой, соединяющей эти точки*”.

При анализе движения тел с помощью законов Ньютона приходится иметь дело с различными типами сил. Для многих из них известны законы, определяющие зависимость силы взаимодействия от расстояний, характеристик тел, состояния их движения.[*)]

1. *Силы Всемирного тяготения*. Две материальные точки с массами m_1 и m_2 притягиваются с силами

$$\mathbf{F}_{12} = G\frac{m_1 m_2}{r_{12}^3}\mathbf{r}_{12} = -\mathbf{F}_{21}, \qquad (2.3)$$

Вблизи поверхности Земли:

$$F_{12} = G\frac{mM}{(R_З + h)^2} \approx G\frac{mM}{R_З^2} = mg, \qquad (2.4)$$

где $g = G\frac{M}{R_З^2}$ - ускорение свободного падения, h - высота тела над поверхностью Земли.

2. *Упругие силы,* возникающие при деформации тел (в частности, это различные *силы реакции опор, натяжения нитей* и т.д.). В некотором интервале деформаций тел (например, пружин, стержней) выполняется *закон Гука*:

$$F_{упр} = k \cdot |l - l_0|, \qquad (2.5)$$

[*)] Подробнее о законах этих взаимодействий см. П.К. Кашкаров, А.И. Ефимова «Механика и электромагнетизм» § 3.4 (стр. 24 – 26), а также в других разделах данного пособия.

где $|l-l_0|$ – величина деформации тела, k – коэффициент упругости. При этом сила упругости всегда противоположна направлению деформации тела.

3. *Силы трения*.

Для *сухого трения скольжения* в первом приближении сила не зависит от величины скорости:

$$\mathbf{F}_{тр}^{ск} = -\mu F_{р} \cdot \frac{\mathbf{V}}{V}, \qquad F_{тр}^{ск} = \mu F_{р}, \tag{2.8}$$

где $\mathbf{V}$ – скорость относительного движения тел, $F_р$ – сила реакции опоры, μ – коэффициент трения скольжения.

При движении тел в жидких или газообразных средах возникает *сила вязкого трения*. При малых скоростях она пропорциональна скорости движения тела относительно среды:

$$\mathbf{F}_{тр}^{вязк} = -r \cdot \mathbf{V}, \tag{2.10}$$

где r – коэффициент вязкого трения.

4. *Электромагнитные силы*, возникающие при взаимодействии электрически заряженных частиц друг с другом или с электрическими и магнитными полями, описываются *обобщённой силой Лоренца*:

$$\mathbf{F}_{Л} = q\mathbf{E} + q[\mathbf{V}, \mathbf{B}], \tag{2.7}$$

где $\mathbf{E}$ – вектор напряженности электрического, а вектор $\mathbf{B}$ – вектор индукции магнитного полей, $\mathbf{V}$ – скорость частицы.

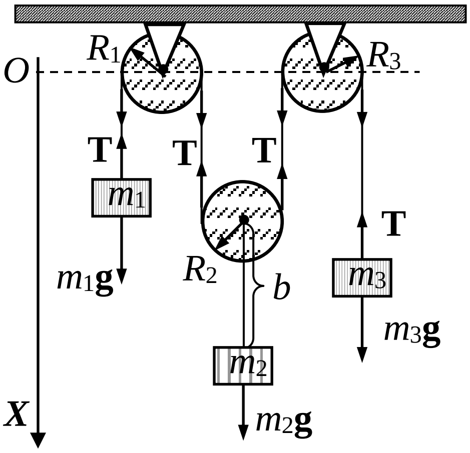
При решении задач на эту тему следует

- *выбрать инерциальную систему отсчета*;
- на рисунке изобразить все силы, действующие на тела, рассматриваемые в задаче и спроецировать их на координатные оси;

- записать равенства, соответствующие второму закону Ньютона (уравнения движения) в проекциях на каждую ось координат;
- если в задаче рассматривается движение двух и более тел, необходимо добавить равенства, связывающие ускорения этих тел (*уравнения кинематической связи*).
- Решить полученную систему уравнений, найдя искомые величины.

Примеры решения задач

2.1. Найти ускорения тел в системе, изображенной на рисунке. Блоки считать невесомыми, нить нерастяжимой, трением пренебречь.



Решение.

а) Инерциальную систему отсчёта, свяжем с Землёй. Начало одномерной системы координат совместим с центрами неподвижных блоков.

б) Так как блоки по условию задачи невесомы, то сила натяжения нити будет постоянна по величине вдоль всей нити.

в) Уравнение движения для каждого из тел:

$$m_1\ddot{x}_1 = m_1 g - T, \qquad (1)$$

$$m_2\ddot{x}_2 = m_1 g - 2T, \qquad (2)$$

$$m_3\ddot{x}_3 = m_3 g - T. \qquad (3)$$

г) Уравнение кинематической связи можно получить, выразив длину нити через координаты тел системы:

$$L = x_1 + \pi R_1 + (x_2 - b) + \pi R_2 + (x_2 - b) + \pi R_3 + x_3 = const.$$

Продифференцировав это равенство дважды, получаем связь между проекциями ускорений тел:

$$\ddot{x}_1 + 2\ddot{x}_2 + \ddot{x}_3 = 0. \qquad (4)$$

д) Объединяя записанные уравнения (1-4) в систему, находим:

$$\ddot{x}_1 = \frac{m_1m_2 - 3m_2m_3 + 4m_1m_3}{m_1m_2 + m_2m_3 + 4m_1m_3} g,$$

$$\ddot{x}_2 = \frac{m_1m_2 + m_2m_3 - 4m_1m_3}{m_1m_2 + m_2m_3 + 4m_1m_3} g,$$

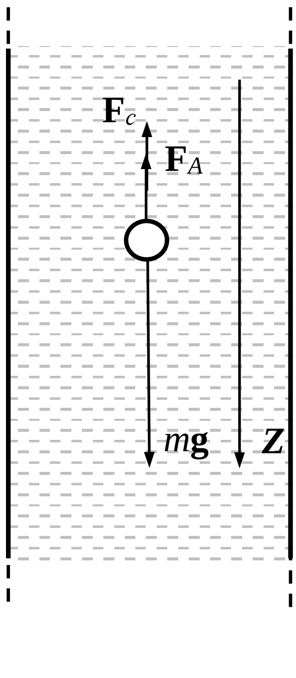
$$\ddot{x}_3 = \frac{m_2m_3 - 3m_1m_2 + 4m_1m_3}{m_1m_2 + m_2m_3 + 4m_1m_3} g.$$

Задача

2.2. Небольшой металлический шарик массы m = 4 *мг* помещен в высокий сосуд с водой и отпущен без толчка. Считая, что сила сопротивления воды пропорциональна скорости движения шарика (r = $9{\cdot}10^{-6}$ *Н·с/м*), найти закон изменения скорости шарика от времени $V(t)$.

Решение.

Укажем, прежде всего, все силы, действующие на шарик: $m\mathbf{g}$ – сила тяжести, $\mathbf{F}_A$ – архимедова сила, $\mathbf{F}_c$ – сила сопротивления (*вязкого трения*) со стороны воды. Выберем инерциальную систему отсчёта, связанную с Землёй. Поскольку движение является одномерным, достаточно использовать всего одну координатную ось $\boldsymbol{Z}$, направленную вертикально вниз (см. рис.).



Тогда в проекциях на эту ось уравнение движения шарика (запись второго закона

Ньютона) будет иметь вид:

$$m\frac{dV}{dt} = mg - F_A - F_c, \tag{1}$$

Сила вязкого трения при движении тела в жидкости зависит от скорости движения. При небольших скоростях, как и предложено считать в условии данной задачи, эта зависимость прямо пропорциональная: $F_c = rV$ (коэффициент пропорциональности r зависит от размеров и формы тела, а также вязких свойств среды). Архимедова сила равна $F_A = \rho g \upsilon$, где υ – объём погружённой части тела, а ρ – плотность жидкости, т.е. *является не зависящей от скорости константой*.

Подставляя соответствующие выражения в уравнение движения шарика, получаем:

$$m\frac{dV}{dt} = mg - rV - F_A. \tag{2}$$

Как видно, мы получили *дифференциальное уравнение* относительно искомой функции $V(t)$. Чтобы решить приведём его к виду, удобному для интегрирования, используя стандартный приём замены переменной (см., например, задачу 1.15):

$$\frac{dV}{dt} = -\frac{r}{m}\left(V - \frac{mg - F_A}{k}\right), \tag{3}$$

$$u = V - \frac{mg - F_A}{r}, \quad \frac{du}{dt} = -\frac{r}{m}u. \tag{4}$$

Теперь переменные разделяются – $\frac{du}{u} = -\frac{r}{m}dt,$

и можно проинтегрировать обе части равенства:

$\ln u = -\frac{r}{m}t + C_1.$ Откуда после потенциирования находим:

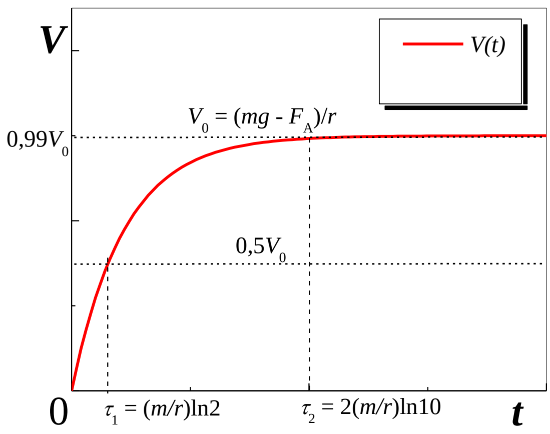
$$u(t) = C \cdot e^{-\frac{r}{m}t}.$$

Вернёмся теперь к исходной функции:

$$V(t) = \frac{mg - F_A}{r} + C \cdot e^{-\frac{r}{m}t}.$$

Подстановка *начального условия* задачи $V(0) = 0$ позволяет определить константу интегрирования $C = -\frac{mg - F_A}{r}$, и записать окончательно искомый закон изменения скорости шарика:

$$V(t) = \frac{mg - F_A}{r}\left(1 - e^{-\frac{r}{m}t}\right).$$



Видно, что скорость шарика сначала увеличивается довольно быстро, но затем её рост замедляется, и она экспоненциально стремится к скорости “установившегося движения”:

$$V_0 = \frac{mg - F_A}{r}.$$

Данная зависимость представлена на рисунке.

Задача

2.3. Через какой промежуток времени τ в условиях предыдущей задачи скорость шарика достигнет *а*) половины от установившейся величины? *б*) 99% от установившейся величины?

Решение

Для ответа на поставленные вопросы достаточно решить алгебраические уравнения:

$a)\ 0{,}5V_0 = V_0\left(1 - e^{-\frac{r}{m}\tau_1}\right)$, откуда $e^{-\frac{r}{m}\tau_1} = 0{,}5$, $\quad \dfrac{r}{m}\tau_1 = \ln 2$,

$$\tau_1 = \frac{m}{r}\ln 2 \approx 0{,}3\ c.$$

$б)\ 0{,}99V_0 = V_0\left(1 - e^{-\frac{r}{m}\tau_2}\right)$, откуда $e^{-\frac{r}{m}\tau_1} = 0{,}01$, $\quad \dfrac{r}{m}\tau_2 = 2\ln 10$,

$$\tau_2 = 2\frac{m}{r}\ln 10 \approx 2\ c.$$

Данные моменты времени отмечены на рисунке к задаче 2.2.

Задача

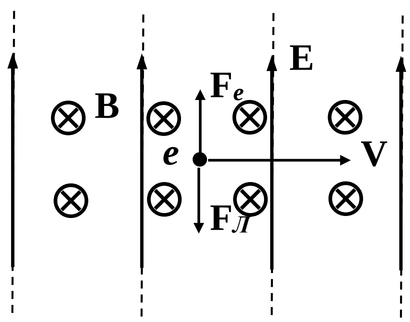
2.4. Однородное электрическое (E = 300 *В/м*) и магнитное (B = 10^{-4} *Тл*) поля направлены взаимно перпендикулярно. Каковы должны быть направление и величина скорости электрона, чтобы его траектория была прямолинейной?

Решение.

Движение электрона будет прямолинейным в случае, если у него отсутствует ускорение или оно совпадает по направлению с вектором начальной скорости электрона. Последний случай не может быть реализован, т.к. со стороны магнитного поля на движущуюся заряженную частицу действует сила Лоренца:

$$\mathbf{F}_Л = q[\mathbf{V}, \mathbf{B}],$$

где $\mathbf{V}$ – скорость движения частицы, q – её заряд. Как видим, эта сила направлена перпендикулярно вектору скорости. Ускорение электрона может быть равно нулю, если сила Лоренца окажется скомпенсирована силой, действующей на электрон со стороны электрического поля: $\mathbf{F}_e = q\mathbf{E}$.



Итак, $q\mathbf{E} = -q[\mathbf{V}, \mathbf{B}]$. Скорость электрона, таким образом, должна быть равна по модулю

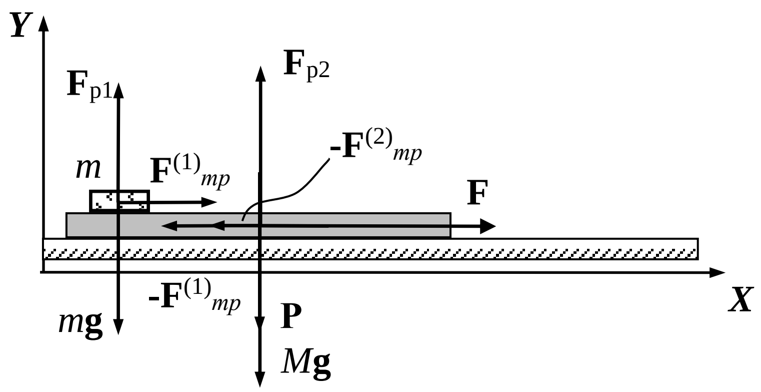
$$V = \frac{E}{B} = \frac{300\ В/м}{10^{-4}\ Тл} = 3 \cdot 10^{6}\ м/с,$$

а её направление должно обеспечить противоположное направление векторов $\mathbf{E}$ и $[\mathbf{V,B}]$. Чтобы определить это направление нужно вспомнить правило «левой руки» и учесть отрицательность заряда электрона (см. рис).

Задача

2.5. На столе лежит доска массы M = 1 *кг*, а на доске – груз массы m = 2 *кг*. Какую силу F нужно приложить к доске, чтобы доска выскользнула из-под груза? Коэффициент трения между грузом и доской μ_1 = 0,25 , а между доской и столом μ_2 = 0,5.

Решение.



Выберем инерциальную систему отсчёта связанную с Землёй. Направим одну из координатных осей этой системы отсчёта горизонтально вдоль поверхности стола (OX) и другую – перпендикулярно к ней (OY). Укажем на рисунке все силы, действующие на груз и доску в условиях данной задачи. Далее запишем уравнения движения груза и доски в проекциях на выбранные оси координат:

$$F_{тр}^{(1)} = ma_1, \tag{1}$$

$$F - F_{тр}^{(1)} - F_{тр}^{(2)} = Ma_2, \tag{2}$$

$$mg - F_{р1} = 0, \tag{3}$$

$$Mg + P - F_{р2} = 0. \tag{4}$$

В уравнении (2) учтено, что по 3-му закону Ньютона силы трения, действующие между грузом и доской, равны по величине и противоположны по направлению. По той же причине равны модули сил P и $F_{р1}$:

$$P = F_{р1}. \tag{5}$$

Пусть приложенная к доске сила F такова, что груз не скользит по поверхности доски, – тела движутся совместно. Это позволяет записать очень простое уравнение кинематической связи:

$$a_1 = a_2 = a. \tag{6}$$

В уравнениях (1) и (2) сила $F_{тр}^{(1)}$ – сила трения покоя, а $F_{тр}^{(2)}$ – трения скольжения. Последняя по *закону Кулона для трения скольжения* имеет значение

$$F_{тр}^{(2)} = F_{тр}^{ск} = \mu_2 F_{р2}. \tag{7}$$

Условие совместного движения тел, очевидно, означает, что сила F имеет значение меньше искомого, так как с ростом этой силы растёт ускорение системы и должна увеличиваться сила $F_{тр}^{(1)}$, обеспечивающая ускорение грузу (см. уравнение (1)). При некотором значении ускорения, а значит и силы F, сила $F_{тр}^{(1)}$ достигает максимального для трения покоя величины $\mu_1 F_{р1}$ и дальнейшее увеличение F приведёт к соскальзыванию груза. Это-то значение силы F_{min} и требуется определить по условию задачи.

Подставляя в уравнения движения значения сил трения $\mu_1 F_{р1}$ и $\mu_2 F_{р2}$, получаем искомую пороговую величину силы F, при которой ещё возможно движение без проскальзывания:

$$F_{пор} = (\mu_1 + \mu_2)(M + m)g \; .$$

Доска выскользнет из под груза, если сила F превысит найденное пороговое значение:

$$F > (\mu_1 + \mu_2)(M + m)g \; .$$

Задачи для самостоятельного решения.

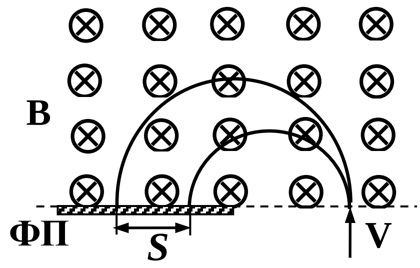
2.6. Воздушный шар массы M опускается с постоянной скоростью. Балласт какой массы Δm надо выбросить, чтобы шар начал подниматься с той же скоростью? Подъемную силу F шара считать известной и постоянной.

2.7. Оценить частоту вращения и ускорение электрона в атоме водорода в модели Бора, приняв радиус орбиты r = 10^{-10} *м*. Заряд электрона e = $1{,}6\cdot10^{-19}$ *Кл*, масса электрона m_e = $9{,}1\cdot10^{-31}$ *кг*. Электрическая постоянная системы СИ ε_0 = $8{,}85\cdot10^{-12}$ *Ф/м*.

2.8. Электрон движется в магнитном поле, индукция которого B = $2\cdot10^{-3}$ *Тл*, по винтовой линии с радиусом R = 2 *см* и шагом h = 5 *см*. Определить скорость электрона.

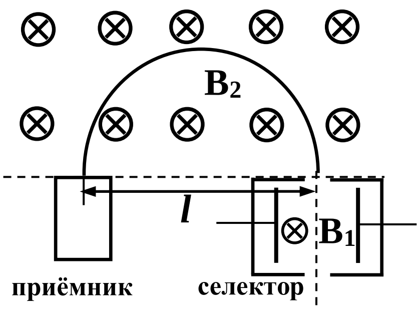
2.9. Каковы нормальное и тангенциальное ускорения электрона, который движется в совпадающих по направлению электрическом и магнитном полях? Рассмотреть два случая: 1) скорость электрона направлена вдоль полей и 2) скорость электрона направлена перпендикулярно к ним.

2.10. Однозарядные ионы изотопов калия с молярными



массами μ_1 = 39 *г/моль* и μ_2 = 41 *г/моль* ускоряются электрическим полем с разностью потенциалов U = 300 *В* и попадают в однородное магнитное поле, перпендикулярное направлению их движения. Индукция магнитного поля $B = 8\cdot10^{-2}$ *Тл*. Найти: *а*) на каком расстоянии S друг от друга ионы попадут на фотопластинку (см. рисунок), *б*) какой из ионов раньше достигнет фотопластинки, если в магнитное поле они влетают одновременно. Взаимодействием ионов пренебречь.

2.11. В масс-спектрометре Бэйнбриджа расстояние между выходной щелью селектора скоростей и входной щелью прибора, регистрирующего ионы, l = 400 *мм*. Индукция магнитного поля $B_1 = B_2$ = 50 *мТл*. При плавном изменении напряженности электрического поля селектора наблюдаются пики ионного тока при значениях напряженности E_1 = 120 *В/см* и E_2 = 160 *В/см*. Определить атомные массы A_1 и A_2 соответствующих ионов, полагая их однозарядными. Идентифицировать эти ионы (т.е. указать, какому химическому элементу они соответствуют).



3. *Динамика движения твердого тела.*

- При **поступательном движении** твердого тела все его точки движутся по одинаковым траекториям и в любой момент времени имеют одинаковые кинематические характеристики. Следовательно, в этом случае достаточно описать движение *центра масс* тела, используя второй закон Ньютона так же, как это рекомендовалось в предыдущем разделе.

  - ***Центр масс*** тела – это точка, координаты которой определяются равенством:

$$\mathbf{r}_c = \frac{\sum_{i=1}^{n} \Delta m_i \mathbf{r}_i}{\sum_{i=1}^{n} \Delta m_i}. \tag{3.1}$$

где r_i – радиус вектор i – го малого элемента, на которые можно разбить тело, Δm_i – масса элемента. Очевидно масса тела $m = \sum_{i=1}^{n} \Delta m_i$, тогда $x_c = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{n} m_i x_i$; $y_c = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{n} m_i y_i$; $z_c = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{n} m_i z_i$.

Скорость центра масс:

$$V_c = \dot{\mathbf{r}}_c = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{n} \Delta m_i V_i = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{n} \mathbf{p}_i. \tag{3.2}$$

В инерциальной системе отсчёта центр масс тела движется также как материальная точка массы m под действием всех внешних сил приложенных к телу (теорема о центре масс):

$$m\mathbf{a}_c = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{F}_i. \tag{3.3}$$

- Для анализа **вращательного и плоского движений** твёрдого тела вводятся новые понятия.

  - *Момент силы* $\mathbf{F}$ *относительно точки* пространства O:

$$\mathbf{N} = [\mathbf{r},\mathbf{F}], \tag{3.4}$$

где $\mathbf{r}$ – радиус-вектор проведенный из точки O в точку приложения силы $\mathbf{F}$.

- *Момент импульса материальной точки относительно точки O*:

$$\mathbf{M} = [\mathbf{r},\mathbf{p}] = [\mathbf{r},\Delta m\mathbf{V}]. \qquad (3.5)$$

- *Момент импульса твёрдого тела* (*совокупность материальных точек*) *относительно точки O*:

$$\mathbf{M} = \sum_i^n [\mathbf{r}_i, \mathbf{p}_i] = \sum_i^n [\mathbf{r}_i, \Delta m_i \mathbf{V}_i], \qquad (3.6)$$

где $\mathbf{r}_i$ – радиус вектор i – го элемента ТТ массой Δm_i, проведённый из точки O.

- В *инерциальной системе отсчета* производная по времени от момента импульса твёрдого тела относительно неподвижной точки пространства O равна суммарному моменту внешних сил, действующих на это тело, относительно той же точки O *):

$$\frac{d\mathbf{M}}{dt} = \sum_{i=1}^n \mathbf{N}^{внеш}. \qquad (3.7)$$

- При описании ***вращения*** ТТ ***вокруг неподвижной оси*** векторы моментов сил $\mathbf{N}^{внеш}$ и импульса $\mathbf{M}$ можно спроецировать на некоторую ось OZ, содержащую точку O. Указанные проекции называют ***моментами относительно оси***. Это позволяет перейти к скалярной форме **уравнения моментов**:

$$\frac{dM_z}{dt} = \sum_{i=1}^n N_{zi}^{внеш}. \qquad (3.8)$$

Можно показать, что $M_z = \left(\sum_{i=1}^n \Delta m_i R_i^2\right)\omega = I_z \omega$. Здесь I_z – *момент инерции твердого тела* относительно оси OZ, который находится суммированием моментов инерции малых элементов,

*) Это утверждение повторяет “уравнение моментов” для системы МТ, доказательство которого см., например, П.К. Кашкаров, А.И. Ефимова «Механика и электромагнетизм» § 4.2 (стр. 28 – 30).

составляющих ТТ:

$$I_z = \sum_{i=1}^{n} \Delta m_i R_i^2. \tag{3.9}$$

где R_i – расстояние от i – ой точки до оси OZ.

С учётом этого равенство (3.8) приобретает вид ***уравнения динамики вращательного движения твёрдого тела***:

$$I_z \beta = \sum_{i=1}^{n} N_{zi}^{внеш} \ . \tag{3.10}$$

Здесь β = $\dot{\omega}$ – угловое ускорение. Записанный закон является аналогом второго закона Ньютона, но для вращательного движения ТТ.

- При любом разбиении **плоского движения** ТТ на поступательное и вращательное ось вращения ориентирована перпендикулярно плоскостям, в которых происходит движение точек ТТ. Однако при наличии внешних сил эта ось движется с ускорением и уравнение, полученное для оси, неподвижной относительно инерциальной СО, вообще говоря, неприменимо. В единственном случае, когда ось проходит через центр масс тела, уравнение (3.10) сохраняет свою форму и для плоского движения:

$$I_{zc} \beta = \sum_{i=1}^{n} N_{zcc}^{внеш} \ , \tag{3.10 а}$$

где дополнительный индекс “c” отражает отмеченное выше условие выбора оси вращения. Поступательная компонента движения описывается уравнением (3.3)

- Как мы видели, при анализе как вращательного, так и плоского движения используется момент инерции ТТ относительно оси. В ряде случаев для вычисления моментов инерции тел оказывается полезной теорема «о параллельных осях» (**теорема Гюйгенса-Штейнера**). Её содержание состоит в следующем: если известен момент инерции твёрдого тела относительно оси, **проходящей через его центр масс** I_c, то момент инерции относительно любой **параллельной** оси OZ равен

$$I_z = I_c + md^2, \tag{3.12}$$

где m – масса тела, а d – расстояние между осями.

Для однородных **тел вращения** момент инерции относительно оси симметрии OZ удобно вычислять с помощью формулы:

$$I_z = \frac{\pi\rho}{2}\int_0^h r^4(z)dz. \tag{3.13}$$

Здесь ρ – плотность тела; $r(z)$ – уравнение образующей тела вращения. Эта зависимость определяется формой тела. Интеграл вычисляется вдоль оси тела в пределах его высоты h.

- При решении задач на динамику вращательного и плоского движения твёрдого тела нужно, прежде всего,

✓ выполнить все пункты методических рекомендаций предыдущего раздела;

✓ если одно или несколько тел задачи совершают вращательное движение относительно неподвижной в инерциальной системе отсчёта оси, то для этих тел необходимо записать соответствующий закон динамики (3.10);

✓ если тело совершает плоское движение, то законы динамики записываются для вращения относительно оси, проходящей через центр масс тела и для ускорения центра масс тела (3.10 и 3.3).

Далее следует записать

✓ уравнения кинематической связи, которое определяет соотношение между линейными ускорениями центров масс тел и угловыми ускорениями тел, совершающих вращательное или плоское движения.

✓ Решить полученную систему уравнений, найдя искомые величины.

Примеры решения задач

3.1. Найти момент инерции тонкого кольца относительно оси, лежащей **в плоскости кольца** и проходящей через его центр. Масса кольца m = 0,2 *кг*, диаметр кольца D = 0,6 *м*.

Решение.

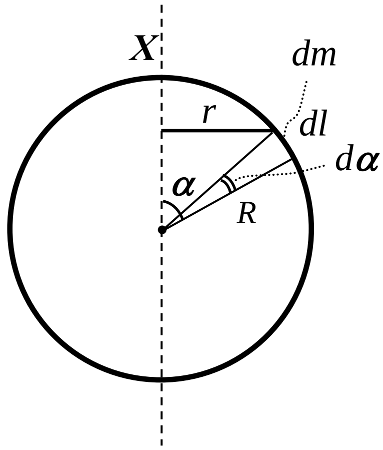
Предложим два способа решения задачи. Первый основан на прямом использовании определения момента инерции, второй – на применении теоремы о моменте инерции плоских тел (см. задачу 3.7) и результате вычисления момента инерции кольца относительно оси, перпендикулярной его плоскости (см. задачу 3.6).

а) Разобьём кольцо на малые элементы массы Δm_i – участки дуги окружности. Положение элемента удобно характеризовать углом, который образует радиус-вектор, соединяющий центр кольца и данный элемент массы с осью. По определению момент инерции кольца относительно оси OX равен:

$$I_x = \sum_{i=1}^{N} \Delta m_i r_i^2 ,$$

где r_i – расстояние от оси до i-го элемента массы тела. При увеличении числа элементов разбиения N уменьшаются величины Δm_i и можно перейти к пределу $\sum_{i=1}^{N} \Delta m_i r_i^2 \to \int_{\Omega} r^2 dm$, где интегрирование ведется по всему объёму тела. Расстояние от оси до элемента массы равно (см. рис.):

$$r = R\cdot\sin\alpha\,.$$



Величина dm легко выражается через плотность материала кольца и геометрические параметры элемента массы (см. рис.):

$$dm = \rho dl = \rho R d\alpha\,.$$

Здесь ρ – линейная плотность кольца (масса, приходящаяся на единицу его длины).

Как мы видим, интеграл по объёму тела сводится к обычному определённому – по всем значениям угла α, характеризующим все элементы тела, т.е. от 0 до 2π. Итак,

$$I = \int_{\Omega} r^2 dm = \rho R^3 \int_0^{2\pi} \sin^2\alpha\, d\alpha = \rho R^3 \cdot \frac{1}{2} \cdot 2\pi = \rho\pi R^3\,.$$

Далее учтём, что масса всего кольца $m = \rho l = \rho 2\pi R$, и запишем окончательно:

$$I = \frac{mR^2}{2} = \frac{mD^2}{8}\,.$$

б) Тот же результат можно получить и не проводя интегрирования. Нужно учесть, что момент инерции кольца, относительно оси, проходящей через его центр перпендикулярно плоскости кольца (ось OZ), равен

$$I_z = mR^2.$$

Моменты инерции, относительно любой оси проходящей через его центр и лежащей в плоскости кольца, очевидно, одинаковы (например, взаимно перпендикулярные оси OX и OY). Тогда, используя теорему о моменте инерции плоских тел, получаем:

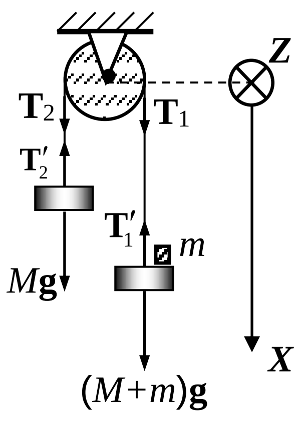
$$I_z = I_x + I_y = 2I_x = 2I_y \quad \Rightarrow \quad I_x = \frac{I_z}{2} = \frac{mR^2}{2} = \frac{mD^2}{8} = 0{,}009\ кг{\cdot}м^2.$$

Задача

3.2. «Машина Атвуда» (прибор для изучения законов равнопеременного движения) представляет собой систему с двумя грузами одинаковой массы M, связанными нитью перекинутой через массивный блок радиуса R (см. рис.). Если на один из грузов положить небольшой грузик m, то система придёт в ускоренное движение. Пусть экспериментально измеренное ускорение первого груза оказалось равным a. Определить по этим данным момент инерции блока I. Считать, что невесомая и нерастяжимая нить не скользит по блоку, а сам блок вращается без трения.

Решение

Выберем инерциальную систему отсчета, связанную с Землёй. Укажем все силы, действующие на грузы и блок. Т.к. нам предстоит рассмотреть *поступательное* движение грузов и *вращательное* движение блока, одну координатную ось направим вертикально вниз (OX), а другую (OZ) – перпендикулярно плоскости рисунка от нас вдоль оси блока*). Тогда в проекциях на эти оси соответствующие уравнения движения будут иметь вид:



$$(M+m)a_{1x} = (M+m)g - T_1' \qquad (1)$$

$$Ma_{2x} = Mg - T_2' \qquad (2)$$

(2й закон Ньютона),

*) На рисунке оси вынесены вправо.

$$I_z \beta_z = (T_1 - T_2) \cdot R \tag{3}$$

(уравнение динамики вращательного движения барабана). Здесь I_z – момент инерции блока относительно оси $\boldsymbol{Z}$.

Знак проекций моментов сил $\mathbf{T}_1$ и $\mathbf{T}_2$ выбран с учетом направления оси Z: проекция вектора момента силы $\mathbf{T}_1$ относительно любой точки на этой оси положительна, а силы $\mathbf{T}_2$ – отрицательна.

Сила натяжения $\mathbf{T}'_2$, с которой нить действует на груз, равна по модулю силе $\mathbf{T}_2$, с которой нить действует на блок. Также обстоит дело и с силами $\mathbf{T}'_1$ и $\mathbf{T}_1$. Это следует из условия *невесомости* нити. Уравнения кинематической связи можно получить, выразив длину нити через координаты тел системы:

$$L = x_1 + \pi R + x_2.$$

Дифференцируя это равенство дважды по времени и учитывая *нерастяжимость* нити (L = $const$), получаем связь между проекциями линейных ускорений грузов:

$$a_{1x} = -\,a_{2x} = a. \tag{4}$$

Для того, чтобы вышеприведенная система уравнений была полной, необходимо связать линейное ускорение поступательно движущихся грузов с угловым ускорением вращающегося блока. Т.к. в соответствии с выбором направления оси Z момент силы $\mathbf{T}_1$ обеспечивает блоку положительную проекцию углового ускорения β_z, то проекция ускорения первого груза также положительна a_{1x} > 0. Вспомним из кинематики, как связано тангенциальное ускорение точки при движении по окружности с её угловым ускорением:

$$a_\tau = \beta \cdot R\ .$$

Нить не скользит по поверхности блока, поэтому её точки имеют то же самое ускорение. Линейное ускорение точек нити на её вертикальных участках имеет такое же значение. А в силу нерастяжимости нити мы можем и для ускорений грузов окончательно записать *уравнение кинематической связи*:

$$a = \beta \cdot R\,. \tag{5}$$

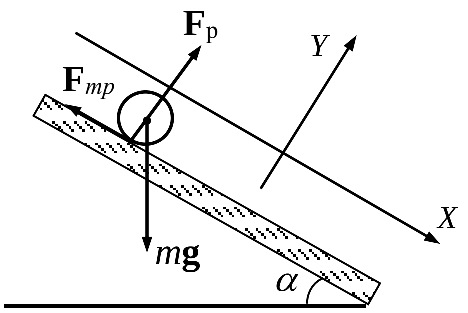
Совместное решение уравнений (1) – (5) приводит к искомому результату для момента инерции блока:

$$I_z = \left(\frac{g}{a}m - m - 2M\right)R^2\,.$$

Задача

3.3. Найти ускорение центра масс шара массой m, скатывающегося по наклонной плоскости, образующей угол α с горизонтом. Коэффициент трения между поверхностью шара и наклонной плоскостью равен μ.

Решение



Выберем инерциальную систему отсчета, связанную с Землей. Одну из осей (X) неподвижной декартовой системы координат направим вдоль направления качения шара, т.е. параллельно плоскости, две другие – перпендикулярно к ней (см. рис.).

Силы, действующие на шар, изображены на рисунке. Уравнения динамики поступательного движения имеют вид:

$$ma_x = mg \cdot \sin\alpha - F_{тр}\,, \tag{1}$$

$$ma_y = F_р - mg \cdot \cos\alpha\,, \qquad a_y = 0, \tag{2}$$

где a_x и a_y – соответствующие проекции ускорения центра масс шара. Относительно оси, проходящей через центр масс перпендикулярно плоскости качения, момент имеет только сила трения:

$$I_c\beta = F_{mp}\cdot R. \tag{3}$$

Для дальнейшего необходимо уточнить характер движения шара. Если проскальзывание отсутствует, то F_{mp} является силой трения покоя и $0 \leq F_{mp} \leq \mu F_{\text{р}}$, где μ – коэффициент трения скольжения. Следовательно F_{mp} представляет собой, наряду с a_x, $F_{\text{р}}$ и β неизвестную величину. Для полноты системы необходимо добавить ещё одно уравнение. Отсутствие проскальзывания позволяет связать линейное и угловое ускорения шара: $a_x = \beta \cdot R$.

Решая полученную систему, получаем:

$$a_x = \frac{mg\sin\alpha}{m + I_c/R^2} = \frac{5}{7}g\sin\alpha.$$

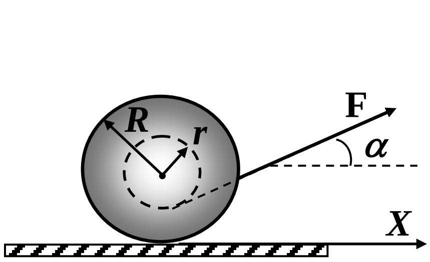
При наличие проскальзывания величины a_x и β больше не связаны. Дополнительным уравнением является выражение для силы трения скольжения:

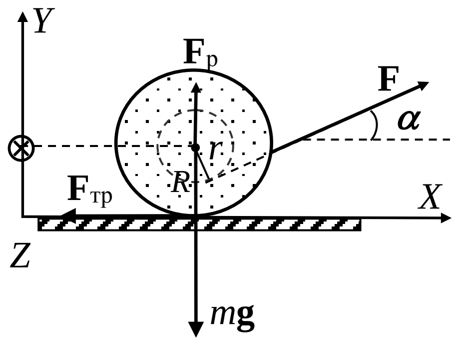
$$F_{mp} = \mu F_{\text{р}} = \mu\cdot mg\cdot\cos\alpha,$$

$$a_x = g(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)$$

$$\beta = \frac{5\mu g\cos\alpha}{2R}.$$

3.4. (**Задача о «послушной катушке»**) На горизонтальной поверхности лежит катушка с намотанной на нее нитью. Катушка движется по поверхности без проскальзывания. Найти ускорение центра масс катушки. Массу катушки m, ее момент инерции I относительно собственной оси и угол α считать заданными. При каком угле α катушка останется неподвижной?





Решение

Укажем все силы, действующие на катушку. Выберем инерциальную систему отсчета, связанную с Землёй. Т.к. катушка может совершать **плоское движение**, представим его как совокупность *поступательного* и *вращательного*. Направим одну из координатных осей этой системы отсчёта вдоль горизонтальной поверхности (OX), вторую – вертикально вверх (OY). Так как моменты всех сил приложенных к телу и его возможное угловое ускорение направлены вдоль оси катушки, направим третью координатную ось OZ перпендикулярно плоскости рисунка от нас через центр катушки.

Запишем уравнения движения катушки в проекциях на выбранные оси координат (a_x – ускорение центра масс катушки):

$$ma_x = F\cos\alpha - F_{\text{тр}}, \tag{1}$$

$$0 = F_{\text{р}} + F\sin\alpha - mg \tag{2}$$

(2й закон Ньютона, поступательное движение);

$$I_z\beta_z = F_{mp}\cdot R - F\cdot r \tag{3}$$

(уравнение динамики вращательного движения катушки). Здесь I_z – момент инерции блока относительно оси Z. Обратим внимание на знаки проекций моментов сил и углового ускорения на ось Z, а также на **согласованность** знаков проекций линейного и углового ускорений катушки – положительный знак проекции линейного ускорения соответствует ускоренному вращению катушки по часовой стрелке, т.е. положительной проекции линейного ускорения оси катушки a_x.

Условие отсутствия проскальзывания катушки позволяет связать проекции этих ускорений:

$$a_x = \beta_z \cdot R\ . \qquad (5)$$

Совместное решение уравнений (1) – (5) позволяет определить искомое ускорение центра катушки

$$a_x = \frac{F}{m + I/R^2} \cdot \left(\cos\alpha - \frac{r}{R}\right). \qquad (6)$$

Проанализируем полученный результат. Видно, что знак проекции определяется соотношением величин $\cos\alpha$ и $\frac{r}{R}$. При малых углах наклона "тянущей" нити, когда $\cos\alpha > \frac{r}{R}$, катушка катится с ускорением вправо. Если же $\cos\alpha < \frac{r}{R}$ (наклон нити большой), ускорение направлено влево. Наконец, при $\alpha = \arccos\left(\frac{r}{R}\right)$ ускорение катушки равно нулю и при соответствующих начальных условиях она может оставаться неподвижной.

Задачи для самостоятельного решения.

3.5. Найти момент инерции тонкого стержня относительно оси, проходящей через его середину и образующей угол α со стержнем. Масса стержня m, его длина l.

3.6. Вывести формулу для вычисления момента инерции тонкого обруча относительно оси, проходящей через центр обруча перпендикулярно его плоскости.

3.7. Доказать, что для любого плоского тела $I_z = I_x + I_y$, где X,

Y и Z – взаимно перпендикулярные оси, причем оси X и Y лежат в плоскости тела, а ось Z перпендикулярна телу. I_x, I_y и I_z – моменты инерции относительно осей X, Y и Z соответственно.

3.8. Вывести формулу для вычисления момента инерции однородного диска относительно оси, проходящей через его центр и направленной перпендикулярно плоскости диска. Масса диска m, радиус R.

3.9. Вычислить момент инерции тонкого однородного диска относительно оси, проходящей через центр диска и лежащей **в его плоскости**. Масса диска m = 2 *кг*, радиус диска R = 0,4 *м*.

3.10. Показать, что момент инерции двухатомной молекулы относительно оси, проходящей через центр масс молекулы перпендикулярно ее оси, можно вычислять по формуле $I_z = \mu l^2$, где $\mu = \dfrac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$ – “приведенная масса молекулы”, а l – расстояние между атомами (“длина молекулы”).

3.11. * Вывести формулу для вычисления момента инерции однородного сплошного конуса относительно его оси симметрии. Масса конуса m, радиус основания R.

3.12. * Вывести формулу для вычисления момента инерции однородного шара относительно оси, проходящей через его центр. Масса шара m, радиус R.

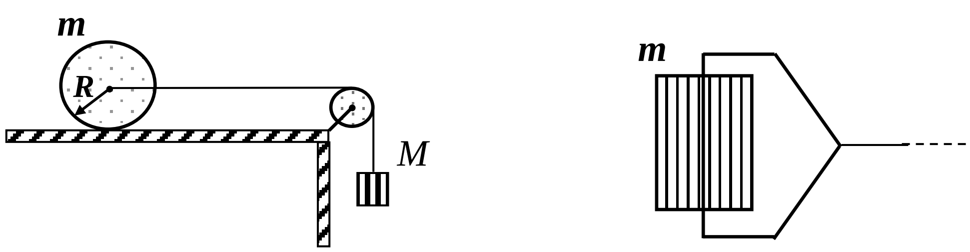
3.13. Вычислить момент инерции и момент импульса земного шара. Воспользоваться справочными данными о параметрах земного шара.

3.14. Однородный круглый диск диаметром d = 10 *см* и массой m = 1 *кг* вращается вокруг своей оси, делая ν = 100 *об/мин*. Постоянная сила трения, будучи приложена к ободу диска, останавливает его за время τ = 1 *мин*. Найти величину этой силы.

3.15. На барабан массой M = 9 *кг* намотан шнур, к концу которого привязан груз массой m = 2 *кг*. Найти ускорение груза и силу натяжения шнура. Барабан считать однородным цилиндром. Трением на оси цилиндра пренебречь.

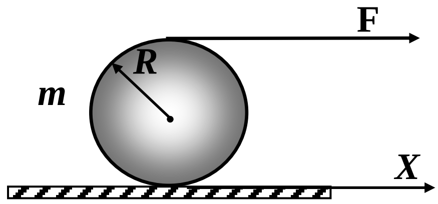
3.16. Для определения момента инерции махового колеса радиуса R = 0,5 *м* относительно оси проходящей через центр масс, колесо обмотали тонкой проволокой, к которой привязали гирю массой m = 8 *кг*. Продолжительность опускания гири с высоты h = 2 *м* при разматывании проволоки составила τ = 2 *с*. Найти момент инерции махового колеса, пренебрегая трением.

3.17. Сплошной цилиндр m = 1 *кг* насажен на ось. К оси цилиндра прикреплена невесомая нить, которая перекинута через блок. К концу нити привязан груз массы M = 2 *кг* (см. рис.). Считая,



что цилиндр катится без проскальзывания, найти: *а*) ускорение груза, *б*) величину силы трения, действующей на цилиндр. При каком значении коэффициента трения не будет происходить проскальзывания?

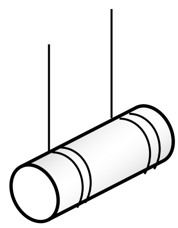
3.18. * Конец веревки, намотанной на сплошной цилиндр, тянут с силой F. Радиус цилиндра R, масса m. При каком значении коэффициента трения скольжения μ цилиндр не будет проскальзывать?



3.19. В условиях задачи 3.4 найти силу трения между катушкой и столом.

3.20. * На горизонтальной плоскости лежит катушка, масса которой m = 50 *г*, а момент инерции относительно ее оси $I = 5 \cdot 10^{-6}$ *кг·м*^{2}. На катушку намотана невесомая и нерастяжимая нить. Радиус внешнего слоя витков r = 2 *см*, радиус торцов катушки R = 3 *см* (*см. рисунок к задаче* 3.4). Коэффициент трения скольжения между катушкой и плоскостью μ = 0,2. Как ведет себя катушка, если сила F, с которой тянут за нить, и угол α имеют следующие значения: *а*) F = 0,128 *Н* и α = 30º; *б*) F = 0,1 *Н* и α = 48,2º; *в*) F = 0,1 *Н* и α = 30º и *г*) F = 0,1 *Н* и α = 60º.

3.21. Однородный сплошной цилиндр массы m = 1 *кг* висит в горизонтальном положении на двух намотанных на него невесомых нитях. Цилиндр отпускают без толчка. *а*) За какое время τ цилиндр опустится на высоту h = 50 *см*? *б*) Какое натяжение T испытывает при опускании цилиндра каждая из нитей?

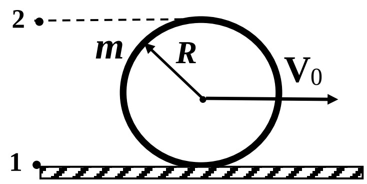


3.22. * Однородный стержень массы m горизонтально подвешен к потолку посредством двух вертикальных нитей, прикрепленных к концам стержня. Найти натяжение одной из нитей сразу же после обрыва другой.

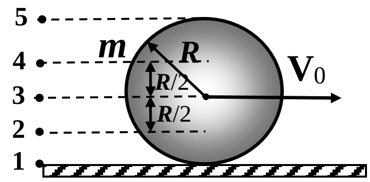
3.23. * Гироскоп одного из авиагоризонтов характеризуется следующими данными: масса m = 5 *кг*; момент инерции относительно собственной оси I_z = $8{\cdot}10^{-3}$ *кг·м*^{2}; гироскоп вращается вокруг собственной оси с частотой ν = 20000 *об/мин*. Определить период прецессии, вызванной тем, что центр тяжести гироскопа отстоит от точки опоры на расстояние l = 0,25 *см*.

3.24. * Найти угловую скорость прецессии наклоненного волчка, прецессирующего под действием силы тяжести. Волчок имеет собственный момент инерции I_z, угловую скорость вращения ω. Расстояние от точки опоры до центра тяжести волчка равно l.

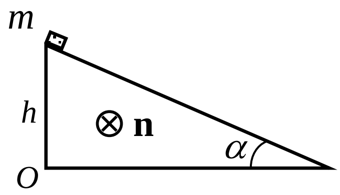
3.25. * Доказать соотношение $\mathbf{M}_O = \mathbf{M}_C + [\mathbf{R},\mathbf{P}]$, где $\mathbf{M}_O$ момент импульса системы материальных точек относительно начала О лабораторной системы отчета (Л-система); $\mathbf{M}_C$ – момент импульса относительно центра масс С (собственный момент импульса), $\mathbf{R}$ – радиус-вектор центра масс в Л-системе, $\mathbf{P}$ – суммарный импульс системы точек, определенный в Л-системе.



3.26. Обруч радиуса R и массы m катится без проскальзывания с постоянной скоростью $\mathbf{V}_0$ по горизонтальной плоскости. Найти модуль момента импульса обруча $\mathbf{M}(t)$, относительно точек 1, 2 (см. рис).



3.27. Однородный цилиндр радиуса R и массы m катится без проскальзывания с постоянной скоростью $\mathbf{V}_0$ по горизонтальной плоскости. Найти модуль момента импульса цилиндра $\mathbf{M}(t)$, относительно точек $1, 2, 3, 4, 5$ (см. рис).



3.28. Небольшой брусок массы m соскальзывает с вершины наклонной плоскости. Записать выражение для:

a) момента результирующей силы, действующей на брусок, относительно точки *O*, $б$) момента импульса бруска $\mathbf{M}(t)$, относительно точки *O*.

3.29. Небольшой мячик массы m брошен под углом α к горизонту с начальной скоростью $\mathbf{V}_0$. Записать выражение для:
a) момента силы, действующей на мячик, относительно точки бросания, $б$) момента импульса мячика $\mathbf{M}(t)$, относительно той же точки. Сопротивлением воздуха пренебречь.

4. *Работа силы, мощность, энергия*

- ***А*) Работа силы.**

  - *Элементарной работой* называется скалярное произведение вектора силы на вектор малого перемещения МТ $d\mathbf{l}$*):

$$dA = (\mathbf{F}, d\mathbf{l}) = F\cos\alpha\, dl\,. \qquad (4.1)$$

Работа силы на конечном участке траектории 1 – 2 может быть найдена интегрированием вдоль траектории L движения МТ:

$$A_{12} = \int_L (\mathbf{F}, d\mathbf{l}) = \int_L F\cos\alpha\, dl\,. \qquad (4.2)$$

Учитывая связь малого перемещения с мгновенной скоростью МТ $d\mathbf{l} = \mathbf{V}dt$, выражение (4.2) может быть записано в виде:

$$A_{12} = \int_{t_1}^{t_2} (\mathbf{F}, \mathbf{V})dt\,. \qquad (4.3)$$

  - Скалярное произведение векторов силы и скорости позволяет определить *мощность силы* W:

$$W(t) = \mathbf{F}(t)\cdot\mathbf{V}(t)\;. \qquad (4.4)$$

Очевидно, если векторы $\mathbf{F}$ и $\mathbf{V}$ перпендикулярны, мощность силы равна нулю, и работа не совершается.

Мощность можно определить и как работу, совершаемую в единицу времени:

$$W(t) = \frac{dA}{dt}\;. \qquad (4.5)$$

- Если МТ движется по окружности, то элементарная работа, совершаемая при малом угловом перемещении $d\boldsymbol{\alpha}$:

$$dA = (\mathbf{N}, d\boldsymbol{\alpha}) = (\mathbf{N}, \boldsymbol{\omega})\,dt\,,$$

*) Малое перемещение $d\mathbf{l}$ совпадает с приращением радис-вектора $d\mathbf{r}$ МТ, однако в дальнейшем символом $d\mathbf{r}$ мы будем обозначать только перемещения в ***радиальном направлении*** при рассмотрении силовых полей, обладающих центральной или осевой симметрией.

а при повороте радиус-вектора на конечный угол:

$$A_{12} = \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} (\mathbf{N}, d\boldsymbol{\alpha}) = \int_{t_1}^{t_2} (\mathbf{N}, \boldsymbol{\omega}) dt \,. \tag{4.6}$$

- ***Б*) Потенциальная энергия.**
  - Силы, работа которых *не зависит от формы траектории* движения МТ, а определяется лишь начальным и конечным положением МТ, называются *потенциальными или* ***консервативными***. К этому классу относятся гравитационные, упругие и электростатические силы.

Для таких сил работа при перемещении МТ по замкнутой кривой L равно нулю. Математически это можно записать следующим образом:

$$\oint_L (\mathbf{F}, d\mathbf{l}) = 0 \,. \tag{4.7}$$

Для потенциальных сил можно ввести скалярную функцию координат $U(x,y,z)$, частные производные которой определяют вектор силы $\mathbf{F}(x,y,z)$:

$$\mathbf{F} = -\left(\frac{\partial U}{\partial x} \mathbf{e}_x + \frac{\partial U}{\partial y} \mathbf{e}_y + \frac{\partial U}{\partial z} \mathbf{e}_z \right) \equiv -\mathbf{grad}\, U \,. \tag{4.8}$$

Такая функция U называется ***потенциальной энергией МТ в поле сил.*** Работа, совершаемая потенциальной силой при элементарном перемещении МТ, равна:

$$dA = (\mathbf{F}, d\mathbf{l}) = -\left(\frac{\partial U}{\partial x} dx + \frac{\partial U}{\partial y} dy + \frac{\partial U}{\partial z} dz \right) \equiv -dU \,. \tag{4.9}$$

Для случая перемещения на конечное расстояние работа потенциальной силы определится через разность потенциальных энергий в начальном и конечном положениях МТ:

$$A_{12} = -\int_1^2 dU = U(\mathbf{r}_1) - U(\mathbf{r}_2) \equiv U_1 - U_2 \,. \tag{4.10}$$

Отметим, что измеряемые в опытах физические величины – сила и работа силы – равны производной и разности значений потенциальной энергии. Следовательно, функция $U(x,y,z)$ определена с точностью до константы. Однако, если принять значение функции $U(x,y,z)$ равным нулю в некоторой точке с координатами x_0, y_0, z_0, то работа, совершаемая силовым полем по перемещению МТ в указанное положение

$$A_{10} = U(x,y,z) - U(x_0,y_0,z_0) = U(x,y,z), \qquad (4.11)$$

будет целиком определяться введенной таким образом функцией $U(x,y,z)$. При этом говорят, что потенциальная энергия *нормирована* в точке x_0, y_0, z_0.

- ***В*) Кинетическая энергия.**

Если сила совершает работу при перемещении МТ под действием только этой силы, то происходит изменение модуля скорости. Можно доказать, что работа равна в этом случае:

$$A_{12} = \frac{mV_2^2}{2} - \frac{mV_1^2}{2}. \qquad (4.12)$$

Введем понятие *кинетической энергии МТ*, определив ее как *половину произведения массы точки на квадрат ее скорости*:

$$T = \frac{mV^2}{2}. \qquad (4.13)$$

Тогда, изменение кинетической энергии МТ движущейся под действием силы определяется работой этой силы (равнодействующей):

$$\int_1^2 dT \equiv T_2 - T_1 = \int_1^2 dA \equiv A_{12}. \qquad (4.13)$$

Кинетическую энергию материальной точки можно связать также с её импульсом:

$$T = \frac{p^2}{2m}.$$

Кинетическая энергия – аддитивная величина. Для системы материальных точек:

$$T = \sum_{i=1}^{N} \frac{m_i V_i^2}{2}\ .$$

Если механическая система представляет собой твердое тело, вращающееся вокруг неподвижной оси OZ, то его полная кинетическая энергия:

$$T = \sum_i \frac{\Delta m_i V_i^2}{2} = \frac{\omega^2}{2} \sum_i \Delta m_i R_i^2 = \frac{I_z \omega^2}{2}, \quad \text{или} \quad T = \frac{M_z^2}{2I_z}. \tag{4.14}$$

Если тело совершает плоское движение:

$$T = \frac{mV_0^2}{2} + \frac{I_z \omega^2}{2}. \tag{4.15}$$

• Задачи этого раздела, как правило, связаны с нахождением конкретного выражения для потенциальной энергии силового поля или, наоборот, с определением векторной функции $\mathbf{F}(x,y,z)$ по известной зависимости потенциальной энергии от координат (формула 4.8).

Примеры решения задач

4.1. Доказать, что любая *центральная сила* является потенциальной.

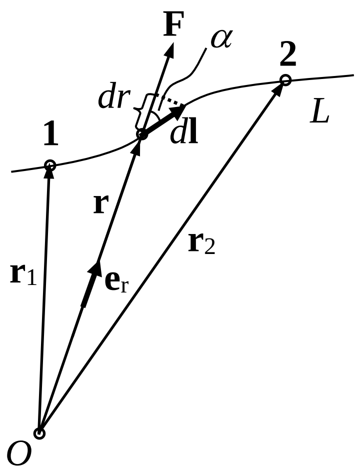
Решение

Напомним, что сила, действующая на МТ, называется центральной, если ее величина зависит только от расстояния r между МТ и некоторым центром O, а направлена она вдоль прямой, проведенной от этого центра к МТ. Математически это свойство можно описать следующим образом:

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = \mathbf{F}(r) = F_{\mathrm{r}}(r)\cdot \mathbf{e}_{\mathrm{r}} \equiv F_{\mathrm{r}}(r)\cdot \frac{\mathbf{r}}{r}.$$

Здесь F_{r} – означает ***проекцию*** вектора $\mathbf{F}$ на направление $\mathbf{r}$, $\mathbf{e}_{\mathrm{r}}$ – единичный вектор, задающий радиальное направление от центра поля.

Найдем работу, совершаемую центральной силой при перемещении МТ из положения 1 в положение 2:



$$A_{12} = \int_L (\mathbf{F}, d\mathbf{l}) = \int_L F_{\mathrm{r}}(r)(\mathbf{e}_{\mathrm{r}}, d\mathbf{l}).$$

Скалярное произведение $(\mathbf{e}_{\mathrm{r}}, d\mathbf{l}) = dl{\cdot}\cos\alpha$ равно *приращению модуля радиус-вектора* $\mathbf{r}$, т.е. dr (см. рис.). С учетом этого ***криволинейный*** интеграл вдоль траектории L сводится просто к ***определенному*** интегралу от скалярной функции $F_{\mathrm{r}}(r)$:

$$A_{12} = \int_{r_1}^{r_2} F_{\mathrm{r}}(r)dr = U(r_1) - U(r_2), \text{ где } U(r) = -\int F_{\mathrm{r}}(r)dr. \qquad (4.16)$$

То есть работа силы по перемещению МТ может быть выражена через разность значений некоторой скалярной функции, соответствующих начальному и конечному положению МТ. Следовательно, первообразная функции $F_{\mathrm{r}}(r)$ представляет в данном случае выражение для потенциальной энергии МТ в поле центральной силы.

Задача

4.2. Найти потенциальную энергию МТ, находящейся в центральном силовом поле вида: $\mathbf{F} = -F_0 \cdot \exp(-r/r_0)\cdot \mathbf{e}_{\mathrm{r}}$, где F_0 и r_0 – положительные константы.

Решение

Используем общее выражение (4.16), связывающее силу и потенциальную энергию взаимодействия в центральном силовом поле:

$$U(r) = F_0 \int e^{-r/r_0} dr + C = -F_0 r_0 e^{-r/r_0} + C.$$

Если положить, что $U(r \to \infty) = 0$, то получим $U(r) = -F_0 \cdot r_0 \cdot e^{-r/r_0}$.

Задача

4.3. Потенциальная энергия частицы, находящейся в центрально-симметричном силовом поле, имеет вид:

$$U(r) = a/r^2 - b/r,$$

где a и b – положительные константы. *а*) Найти значение r_0, соответствующее равновесному положению частицы, *б*) выяснить, устойчиво ли это положение, *в*) найти максимальное значение силы притяжения, *г*) изобразить графики зависимости $U(r)$ и $F_r(r)$ – проекции силы на радиус-вектор $\mathbf{r}$.

Решение

а) Силовое поле центрально-симметрично, т.е. энергия и сила взаимодействия частицы с полем зависят только от расстояния до центра этого поля. Для рассмотрения такого взаимодействия удобно использовать сферическую систему координат. Определим силу, воспользовавшись соотношением (4.5) и учитывая отсутствие зависимости от направления (θ, φ), так как поле центрально-симметрично:

$$\mathbf{F} = -\frac{\partial U}{\partial r}\mathbf{e}_r = \left(\frac{2a}{r^3} - \frac{b}{r^2}\right)\mathbf{e}_r.$$

В положении равновесия, действующая на частицу сила должна быть равна нулю. Приравнивая к нулю выражение в скобках, получаем соответствующее равновесное расстояние:

$$r_0 = \frac{2a}{b}.$$

б) Устойчиво ли это положение? Можно определить направление силы при малом отклонении частицы из найденного положения равновесия. Положение устойчиво, если сила направлена *в сторону этого положения*. Однако так как данное расстояние соответствует экстремуму потенциальной энергии взаимодействия $\left(\frac{\partial U}{\partial r} = 0\right)$, проще выяснить характер этого экстремума. Положение устойчиво, если потенциальная энергия минимальна и неустойчиво в противном случае. Определим знак второй производной потенциальной энергии при $r = r_0$:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial r^2} = \left(\frac{6a}{r^4} - \frac{2b}{r^3}\right)\Bigg|_{r_0} = \frac{1}{r_0^3} \cdot b = \frac{b^4}{8a^3} > 0.$$

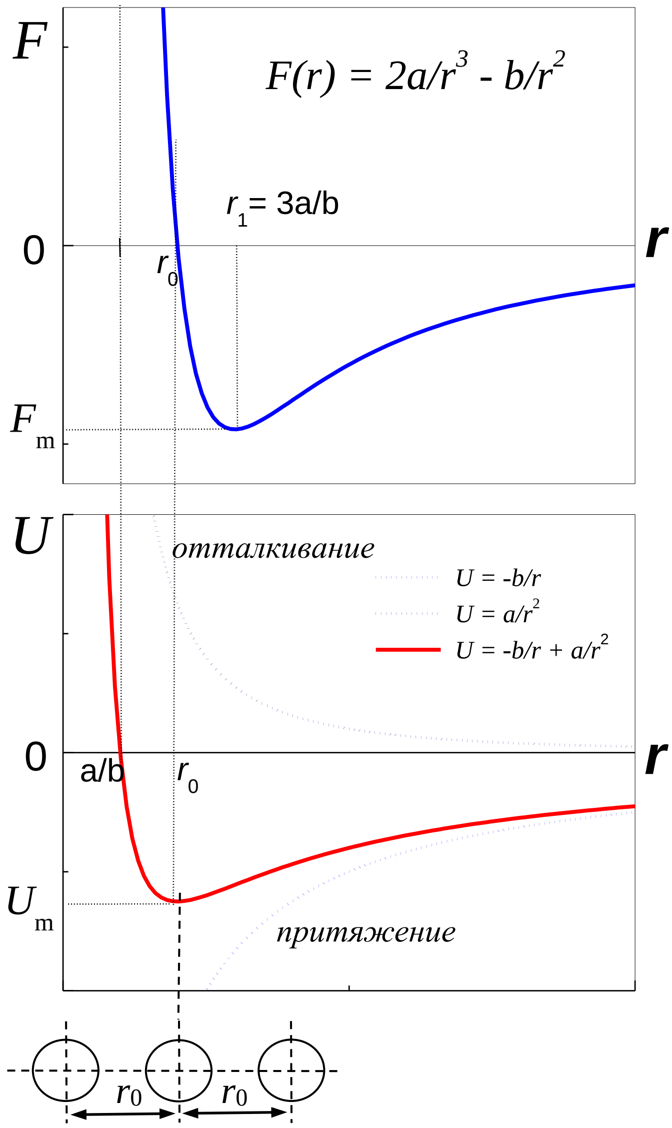
Следовательно, в этой точке функция $U(r)$ имеет минимум – положение равновесия устойчиво.

в) Для нахождения экстремума силы взаимодействия продифференцируем радиальную проекцию силы F_r и приравняем её к нулю:

$$\frac{\partial F}{\partial r} = \left(\frac{6a}{r^4} - \frac{2b}{r^3}\right)\Bigg|_{r_1} = 0. \quad \Rightarrow \quad r_1 = \frac{3a}{b}.$$

Т.к. при данном расстоянии $F_r(r_1) = \left(\frac{2a}{r^3} - \frac{b}{r^2}\right)\Bigg|_{r_1} = -\frac{b^3}{27a^2} < 0$ можно утверждать, что это расстояние соответствует максимальной **силе притяжения** (сила направлена к центру поля). Значение этой силы равно $F_{\max} = \frac{b^3}{27a^2}$.

г) Представим графически полученные результаты:



Если полная энергия частицы $U + T$, находящейся в таком поле, невелика, то частица совершает колебательное движение вблизи равновесного положения[*)]. При бóльших энергиях частица может удалиться от положения равновесия на расстояния, значительно превышающие r_0, и её взаимодействие с полем становится пренебрежимо малым.

[*)] Рассмотренный пример моделирует поведение атома вблизи узла кристаллической решётки, а при повышении энергии (например, нагрев вещества) – возможность плавления и испарения.

Задачи для самостоятельного решения.

4.4. Тело массой m движется под действием постоянной силы F. Найти зависимость его кинетической энергии T от времени, если начальная скорость тела равна нулю.

4.5. Маховик вращается с постоянной скоростью, делая ν_0 = 10 *об/с*; его кинетическая энергия $T_0 = 8 \cdot 10^3$ *Дж*. За какое время постоянный вращающий момент сил N = 50 *Н·м*, приложенный к этому маховику, увеличит его угловую скорость в два раза?

4.6. Какую работу надо совершить, чтобы увеличить частоту оборотов маховика от 0 до 120 *об/мин*? Массу маховика m = 0,5 т можно считать распределённой по ободу диаметром D = 1,5 *м*. Трение не учитывать.

4.7. Определить потенциальную энергию U сжатой пружины как функцию ее деформации x, считая, что упругая сила пропорциональна третьей степени величины деформации с коэффициентом пропорциональности β.

4.8. Потенциальная энергия частицы имеет вид $U = (x/y - y/z)\cdot a$, где a – константа. Найти силу, действующую на частицу как функцию координат.

4.9. * Найти потенциальную энергию небольшого тела массы m на различных расстояниях r от центра Земли. Величину потенциальной энергии на бесконечно большом удалении считать равной нулю. Рассмотреть случаи $r > R$ и $r < R$ (R – радиус Земного шара).

4.10. * Подсчитать гравитационную энергию U шара радиуса R, равномерно заполненного веществом с постоянной объемной плотностью ρ. Гравитационную постоянную G считать известной.

4.11. * Горизонтальная пружина, на конце которой прикреплено тело известной массы m, сжата силой F и находится в покое. Один конец пружины закреплен. Внезапно сила F меняет свое направление на противоположное. Определить, пренебрегая массой пружины, во сколько раз получающееся при этом наибольшее растяжение пружины l_2 больше ее первоначального сжатия l_1.

4.12. * При движении иона в ускорителе по круговой траектории радиуса R его кинетическая энергия возрастает пропорционально пройденному пути s ($T = bs$). Найти зависимость от s силы F, действующей на ион.

5. *Законы сохранения импульса, энергии и момента импульса. Элементы гидродинамики.*

- **Закон сохранения механической энергии.**

Механическая система может быть представлена совокупностью n материальных точек (частиц) с массами $m_1, \dots m_n$, координатами $\mathbf{r}_1,\dots,\mathbf{r}_n$ и скоростями $\mathbf{V}_1,\dots,\mathbf{V}_n$. Между ними действуют внутренние силы $\mathbf{F}_{ij}$. Пусть внешние силы $\mathbf{F}_i$, действующие со стороны тел, не включенных в систему, ***зависят только от координат – стационарные поля внешних сил.*** Под полной механической энергией системы будем понимать сумму кинетической и потенциальной энергий этих частиц:

$$\mathcal{E}(\mathbf{r}_1,\dots,\mathbf{r}_n,\mathbf{V}_1,\dots,\mathbf{V}_n) = T(\mathbf{V}_1,\dots,\mathbf{V}_n) + U^{вз}(\mathbf{r}_1,\dots,\mathbf{r}_n) + U^{внеш}(\mathbf{r}_1,\dots,\mathbf{r}_n). \quad (5.1)$$

При этом потенциальная энергия обусловлена как взаимодействием частиц друг с другом – $U^{вз}(\mathbf{r}_1,\dots,\mathbf{r}_n)$, так и с ***внешними стационарными полями*** – $U^{внеш}(\mathbf{r}_1,\dots,\mathbf{r}_n)$.

Если внутренние и внешние силы ***консервативны*** (см. с. 49), тогда для любых двух состояний системы механическая энергия неизменна:

$$\mathcal{E}_2 - \mathcal{E}_1 = 0\,, \qquad \mathcal{E} = const\,. \quad (5.2)$$

Отметим, что присутствие неконсервативных сил, которые ***не совершают работы***, также не приведет к нарушению соотношений (5.2). Поэтому закон сохранения энергии в механике может быть сформулирован в наиболее общем виде так[*)]:

Если в системе тел и на систему действуют только консервативные силы, то полная механическая энергия этой системы постоянна во времени.

[*)] Механическая энергия, очевидно, также **сохраняется для изолированной системы тел ($\mathbf{F}_i = 0$) в отсутствии внутренних неконсервативных сил.**

При наличии неконсервативных сил (внутренних или внешних) величина $\mathcal{E}$ будет изменяться со временем, и это изменение определяется работой указанных сил:

$$\mathcal{E}_2 - \mathcal{E}_1 = A_{12}^{нк} . \tag{5.3}$$

- **Закон сохранения импульса**.

Импульс механической системы (системы n материальных точек) определяется как векторная сумма импульсов частиц, образующих систему:

$$\mathbf{P} = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{p}_i = \sum_{i=1}^{n} m_i \mathbf{V}_i . \tag{5.4}$$

Исходя из законов Ньютона, можно доказать, что *производная по времени импульса такой системы равна сумме внешних сил, действующих на систему*:

$$\frac{d\mathbf{P}}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{F}_i^{внеш} . \tag{5.5}$$

Отсюда очевидно вытекает условие, при котором сохраняется импульс системы:

$$\sum_{i=1}^{n} \mathbf{F}_i^{внеш} = 0 . \tag{5.6}$$

Итак, ***если векторная сумма внешних сил, действующих на систему, в любой момент времени равна нулю, то полный импульс этой системы постоянен во времени***.

Закон сохранения импульса оперирует векторными величинами, поэтому, если существует неподвижная ось (например, ось OX), для которой *сумма проекций всех внешних сил в любой момент времени равна нулю, то сохраняется компонента импульса вдоль этой оси*. Математически это можно записать так:

$$P_x = P_{x0} = const \quad , \quad \text{если } \sum_{i=1}^{n} F_{ix}^{внеш} = 0 .$$

Сам вектор $\mathbf{P}$ и другие его компоненты (P_y и P_z в нашем примере) могут изменяться со временем.

Закон сохранения импульса предсказывает возможность ускорения отдельных тел системы за счет действия внутренних сил при обязательном сохранении полного импульса механической системы. Речь идет о так называемом *реактивном движении*, которое возникает при отделении от тела его частей, обладающих определенной скоростью $\mathbf{u}$ относительно этого тела. Такое движение описывается уравнением Мещерского

$$m(t)\frac{d\mathbf{V}}{dt} = -\mu\mathbf{u} + \mathbf{F}^{внеш}, \tag{5.7}$$

где $\mu = \dfrac{dm}{dt}$ – темп изменения массы тела, $\mathbf{F}^{внеш}$ – равнодействующая внешних сил, действующих на тело.

- **Закон сохранения момента импульса.**

Для системы частиц (*в частности, и для твёрдого тела*) справедливо уравнение моментов (см. п.3):

$$\frac{d\mathbf{M}}{dt} = \sum_{j=1} \mathbf{N}_j^{внеш}, \text{ где } \mathbf{M} = \sum_{i=1}^{n} [\mathbf{r}_i, \mathbf{p}_i]; \qquad \mathbf{N}_j^{внеш} = [\mathbf{r}_j, \mathbf{F}_j^{внеш}].$$

Отсюда следует формулировка закона сохранения момента импульса: ***если в любой момент времени сумма моментов внешних сил, действующих на тела системы, относительно неподвижной точки пространства равна нулю, то полный момент импульса этой системы постоянен во времени.***

Приведенный закон является векторным. Следовательно, даже в случае $\sum_j \mathbf{N}_j^{внеш} \neq 0$, неизменной оказывается величина *проекции момента импульса* системы на некоторую неподвижную ось, для которой равна нулю алгебраическая *сумма проекций моментов* внешних сил. То есть,

$$\text{если } \sum_{i=1}^{n} N_{zi}^{внеш} = 0, \quad \text{то} \quad M_z = M_{z0} = const \, . \tag{5.8}$$

В частности, для твердого тела, вращающегося относительно неподвижной оси OZ, $M_z = I_z\omega$, и при соблюдении условия (5.8) величина M_z будет постоянной и при возможных изменениях момента инерции I_z. Подчеркнем, что кинетическая энергия при этом непостоянна, ибо $T = \dfrac{M_z^2}{2I_z}$ (см. 4.14).

Изменение величины T при вариациях I_z определяется работой внутренних ***неконсервативных*** сил в механической системе.

Применение законов сохранения может существенно упростить решение ряда задач по сравнению с динамическим подходом. Для некоторых задач это единственно возможный путь. Речь идёт о ситуациях, когда силы, действующие между телами на определённом интервале времени, неизвестны (например, при столкновении тел).

- **Элементы гидродинамики.**

Простейшей моделью является стационарное (***ламинарное***) течение ***несжимаемой*** жидкости или газа, в котором отсутствуют силы трения между слоями, характеризуемые ***вязкостью***. Для любого сечения тонкой *трубки тока* при таком течении справедливы уравнения Бернулли

$$p + \rho g h + \frac{\rho V^2}{2} = const, \quad (5.9)$$

и неразрывности струи:

$$SV = const. \quad (5.10)$$

Здесь p – давление в движущейся жидкости или газе, ρ – плотность жидкости (газа), h – высота данного сечения площади S относительно произвольно выбранного уровня, V – скорость частиц жидкости в этом сечении. Уравнение Бернулли можно применять для реальной жидкости или газа[*)], если выполнено условие:

$$\frac{\rho V L}{\eta} >> 1, \quad (5.11)$$

где L – характерный линейный размер сечения трубы, например её радиус R, η – коэффициент вязкости жидкости. Безразмерная величина в левой части равенства (5.11) носит название ***числа Рейнольдса*** Re. При выполнении условия (5.11) влияние вязкости невелико. Однако течение остается ламинарным только при числах Рейнольдса меньше критического значения:

$$Re_{кр} = \frac{\rho V R}{\eta} \approx 1000. \quad (5.12)$$

При протекании по трубе вязкой жидкости или газа в условиях ламинарности течения (Re < 1000) *переносимый в единицу времени через поперечное сечение трубы объём жидкости* Q (***поток***) определяется формулой Пуазейля:

$$Q = \frac{p_1 - p_2}{l} \cdot \frac{\pi R^4}{8\eta}. \quad (5.13)$$

В этом соотношении первая дробь имеет смысл *перепада давления на единицу длины* трубы l, R – радиус трубы.

[*)] Газ можно считать несжимаемым при скоростях потока много меньше скорости звука.

- Приступая к решению задач этого раздела, следует

✓ выполнить рекомендации раздела 2 данного пособия;

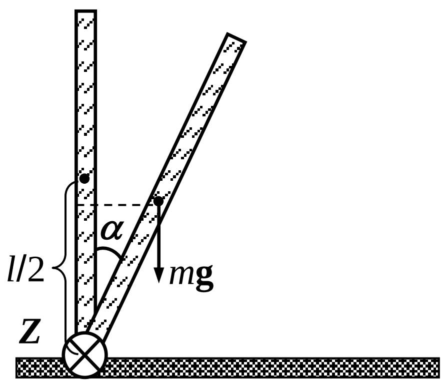
✓ выбирать направления осей системы координат инерциальной СО следует с учётом требований $\sum_{i=1}^{n} F_{ix}^{внеш} = 0$ или $\sum_{j=1}^{n} N_{zj}^{внеш} = 0$ соответствующих законов сохранения.

✓ Проанализировать, какие из законов сохранения или гидродинамические соотношения применимы в данных условиях.

Только после этого можно записывать соответствующие равенства.

Примеры решения задач

5.1. Вертикальный столб длины l падает, поворачиваясь вокруг опирающегося на землю нижнего конца. Какова линейная скорость центра масс столба в момент падения на землю?



Решение

Ответ на вопрос задачи можно искать двумя способами. В первом используется закон сохранения механической энергии, во втором – теорема о кинетической энергии. Конечно, отличие этих подходов определяется лишь выбором системы тел, включаемых в рассматриваемую систему.

а) Пусть система состоит из столба и Земли, на поверхность которой столб опирается нижним концом. Тогда сила тяготения между этими телами – внутренняя сила системы, а сама система замкнута (внешние силы не действуют). Так как сила гравитационного взаимодействия консервативна, а сопротивлением воздуха мы будем пренебрегать, то полная механическая энергия системы не изменяется во времени вплоть до момента падения столба на землю (неупругий удар). Запишем равенство исходной энергии системы и механической энергии столба в произвольный момент времени до падения:

$$mg\frac{l}{2} = mg\frac{l}{2}\cos\alpha + \frac{I_z\omega^2}{2}. \qquad (1)$$

Здесь учтено, что столб – твёрдое тело, совершающее при падении чисто вращательное движение относительно оси, проходящей через точку его опоры перпендикулярно плоскости рисунка (ось Z). Принято (нормировка потенциальной энергии), что нулевое значение потенциальной энергии гравитационного взаимодействия система имеет, когда центр масс столба оказывается на поверхности земли (столб упал).

Равенство (1) позволяет найти зависимость угловой скорости падающего столба от угла его отклонения от вертикального положения α:

$$\omega = \sqrt{\frac{mgl}{I_z}(1-\cos\alpha)}. \qquad (2)$$

Если считать столб однородным тонким стержнем, то его момент инерции относительно выбранной оси равен $I_z = \frac{ml^2}{3}$ и равенство (2) запишется в виде:

$$\omega = \sqrt{\frac{3g}{l}(1-\cos\alpha)}. \qquad (3)$$

Линейная скорость центра масс стержня равна

$$V_c = \omega r = \omega \cdot \frac{l}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{3gl(1-\cos\alpha)} \,. \qquad (4)$$

В момент падения скорость центра масс

$$V_c = \frac{1}{2}\sqrt{3gl} \,. \qquad (5)$$

б) По теореме о кинетической энергии её изменение равно работе над телом внешней силы

$$\Delta T = A_{12}. \qquad (6)$$

Посмотрим, какой результат даёт применение этой теоремы к рассматриваемому случаю. В процессе падения столба его кинетическая энергия увеличивается благодаря действию момента силы притяжения Землёй. Проекция момента этой силы на ось Z равна $N_z = mg\frac{l}{2}\sin\alpha$. Работа силы при повороте твёрдого тела относительно оси согласно (4.6) равна

$$A_{12} = \int\limits_{\alpha_1}^{\alpha_2} N_z d\alpha = mg\frac{l}{2}\int\limits_{\alpha_1}^{\alpha_2}\sin\alpha\, d\alpha = mg\frac{l}{2}(-\cos\alpha)\Big|_{\alpha_1}^{\alpha_2}.$$

При падении столба угол меняется от 0 до $\pi/2$. Следовательно:

$$A_{12} = mg\frac{l}{2}(-\cos\alpha)\Big|_0^{\pi/2} = mg\frac{l}{2} \,. \qquad (7)$$

Изменение кинетической энергии равно её значению в момент падения столба:

$$\Delta T = \frac{I_z\omega^2}{2} \,. \qquad (8)$$

Сравнивая правые части выражений (7) и (8) получаем максимальную угловую скорость падения

$$\omega = \sqrt{\frac{mgl}{I_z}} = \sqrt{\frac{3g}{l}} \,,$$

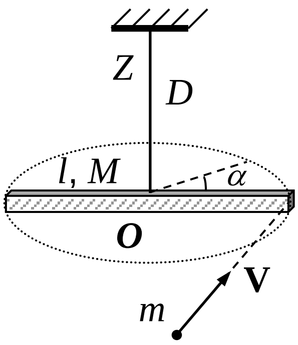
и искомую линейную скорость центра масс столба:

$$V_c = \omega r = \sqrt{\frac{3g}{l}} \cdot \frac{l}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{3gl}\,. \qquad (8)$$

Как видим, результат не отличается от ранее ранее полученного (4).

Задача

5.2. (Крутильный баллистический маятник). К потолку на тонкой проволоке подвешен однородный деревянный стержень массы M = 400 *г* (рис.). Модуль кручения проволоки*) равен D = 0,3 *Н·м/рад*. В конец стержня попадает пуля массы m = 10 *г*, летевшая горизонтально и перпендикулярно стержню. С какой скоростью летела пуля, если пуля застряла в стержне, и он повернулся на максимальный угол α_0 = 0,8 *рад*?



Решение

Внешние силы, действующая на тела системы пуля–маятник – силы тяжести и реакции проволоки. Момент первой силы относительно точки O – вектор, лежащий в горизонтальной плоскости. Поэтому проекция этого момента на ось Z равна нулю. Т.о., момент импульса системы должен сохраняться вплоть до появления момента сил кручения подвеса, т.е. до начала поворота стержня. Запишем соответствующее равенство:

$$mV \cdot \frac{l}{2} = \left[I_z + m\left(\frac{l}{2}\right)^2 \right] \cdot \omega\,. \qquad (1)$$

Здесь учтено, что момент инерции – аддитивная величина,

*) Коэффициент пропорциональности между возникающим вращательным моментом упругих сил и углом закручивания подвеса.

равная сумме момента инерции стержня I_z и пули $m\left(\frac{l}{2}\right)^2$ относительно оси Z. Вспомним, что момент инерции тонкого стержня I_z относительно оси, проходящей через его середину перпендикулярно к стержню равен (см. задачу 3.4 при $\alpha = \pi/2$):

$$I_z = \frac{ml^2}{12}. \qquad (2)$$

Это позволяет определить начальную угловую скорость вращения маятника сразу после соударения с пулей:

$$\omega = \frac{6mV}{(3m+M)l}. \qquad (3)$$

Механическая энергия системы при этом **не сохраняется** – часть её переходит во внутреннюю в процессе **абсолютно неупругого** соударения (**действуют неконсервативные силы**).

Определить максимальный угол поворота маятника, однако можно, используя как раз закон сохранения механической энергии, но после неупругого соударения, когда в системе действуют только консервативные силы:

$$\frac{\left[I_z + m\left(\frac{l}{2}\right)^2\right]\cdot\omega^2}{2} = \frac{D\alpha_0^2}{2}. \qquad (4)$$

Здесь в левой части – кинетическая энергия вращающегося твёрдого тела (маятника с застрявшей пулей) сразу после окончания неупругого соударения. Считаем, что удар очень короткий и маятник не успевает повернуться за время соударения. В правой – потенциальная энергия системы, запасённая в результате деформации кручения упругого подвеса (аналог энергии деформированной пружины $\frac{kx^2}{2}$). Значение этой энергии можно получить, рассчитав работу против момента упругих сил $M_z = D\alpha$ при повороте тела на угол α_0:

$$A = \int_0^{\alpha_0} M_z d\alpha = \int_0^{\alpha_0} D\alpha\, d\alpha = \frac{D\alpha_0^2}{2}\,. \qquad (5)$$

Учтено, что максимальное закручивание проволоки до угла α_0 определяется обращением в 0 кинетической энергии вращательного движения маятника*). Используя равенства (2 – 4) приходим к искомому результату для скорости пули:

$$V = \frac{\alpha_0}{m}\sqrt{D\left(\frac{M}{3}+m\right)} = 16\ м/с.$$

Задача

5.3. Используя закон сохранения энергии, найти линейную скорость движения центра масс цилиндра, скатывающегося по наклонной плоскости без проскальзывания с высоты H.

Решение

Движение будем рассматривать относительно системы отсчета, связанной с Землей. В механическую систему включим цилиндр, наклонную плоскость и Землю. Далее нужно выяснить, сохраняется ли механическая энергия в этой системе. Сила тяжести $m\mathbf{g}$ - потенциальна, сила реакции опоры $\mathbf{F}_р$ всегда перпендикулярна скорости цилиндра и работы не совершает. При отсутствии проскальзывания точка приложения силы трения $\mathbf{F}_{тр}$ неподвижна, поэтому работа этой силы также равна нулю.

*) Конечно, математически тождественную равенству (4) запись можно трактовать и как результат применения к маятнику теоремы о кинетической энергии $\Delta T = A_{12}$ (см. решение предыдущей задачи).

Следовательно, механическая энергия системы постоянна. Так как масса Земли несравненно больше массы цилиндра, будем считать Землю неподвижной. Тогда запись закона сохранения механической энергии системы имеет вид:

$$\mathcal{E} = \frac{mV_c^2}{2} + \frac{I_c\omega^2}{2} + mg \cdot y = const\,.$$

Величину $\mathcal{E}$ определим из начальных условий: при t = 0 имеем $y(0) = H$, $V_c(0) = 0$, $\omega(0) = 0$. Получаем уравнение:

$$mg(H - y) = \frac{mV_c^2}{2} + \frac{I_c\omega^2}{2}\,.$$

С учетом связи $V_c = R\omega$ и выражения для момента инерции цилиндра $I_c = \dfrac{mR^2}{2}$ находим скорость центра масс цилиндра в нижней точке плоскости (y = 0): $V_c = \sqrt{\dfrac{4}{3}gH}$.

Задача

5.4. Человек массой m переходит из центра вращающейся с угловой скоростью ω круглой горизонтальной платформы радиусом R и массой M на ее край. Найти угловую скорость вращения системы в новом состоянии и изменение кинетической энергии. Человека принять за МТ. Трением в оси платформы пренебречь.

Решение

Момент внешних сил относительно оси вращения OZ N_z = 0, следовательно, момент импульса системы “платформа + человек” M_z постоянен во времени.

$$I_{пл}\omega = I_{пл}\omega_1 + mR^2\omega_1\,, \tag{1}$$

$$I_{пл} = \frac{MR^2}{2}, \qquad (2)$$

$$\omega_1 = \frac{I_{пл}\omega}{I_{пл} + mR^2} = \frac{M\omega}{M + 2m}, \qquad (3)$$

$$\Delta T = \frac{M_z^2}{2}\left(\frac{1}{I_{пл} + mR^2} - \frac{1}{I_{пл}}\right) = -\frac{mMR^2\omega^2}{M + 2m}. \qquad (4)$$

Механическая энергия системы уменьшилась, благодаря наличию неконсервативных сил трения, совершающих отрицательную работу в процессе перемещения человека.

Задача

5.5. Определить вторую космическую скорость, т.е. скорость, которую необходимо сообщить телу для того, чтобы оно удалилось на бесконечно большое расстояние от Земли.

Решение:

На бесконечно большом расстоянии от Земли гравитационным взаимодействием ракеты с Землей можно пренебречь. Будем считать, что потенциальная энергия системы тел ракета – Земля в этом случае равна нулю. Тогда закон сохранения полной механической энергии для нее может быть записан в виде:

$$\frac{mV_{\mathrm{II}}^{2}}{2} + U_0 = 0,$$

где U_0 – потенциальная энергия взаимодействия ракеты с Землей у поверхности Земли.

Величина U_0 определяется работой силы тяготения при перемещении тела с поверхности Земли ($r = R$) на бесконечно удаленное расстояние: $U_0 = \int_R^\infty F_{\mathrm{r}} dr$ (см. 4.11), где R – радиус Земли. Проекция силы тяготения F_{r} определяется из закона всемирного тяготения: $F_{г} = -G\dfrac{mM}{r^2}$, где m и M – массы ракеты и Земли, r – расстояние от центра Земли до ракеты. Тогда

$$U_0 = -GmM\int_R^{\infty}\frac{dr}{r^2} = -GmM\left(-\frac{1}{r}\right)\Bigg|_R^{\infty} = -G\frac{mM}{R} = -mgR.$$

Здесь использовано равенство $g = G\dfrac{M}{R^2}$ – ускорение свободного падения у поверхности Земли.

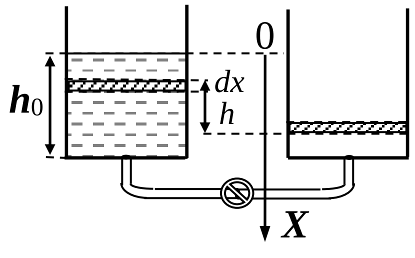
Как мы видим, *потенциальная энергия притяжения величина отрицательная*. Окончательно из закона сохранения энергии получаем: $V_{\text{II}} = \sqrt{2Rg}.$

Задача

5.6. * Два одинаковых цилиндрических бака соединены узкой трубкой с краном посредине. Радиус баков R = 20 *см*, радиус трубки r = 1 *мм*. Длина трубки l = 1 *м*. Проходное отверстие крана совпадает с сечением трубки. В один из баков налита вода до высоты h = 50 *см*, второй бак был вначале пустой. В момент времени t = 0 кран открывают. Определить: 1) характер течения воды в трубке в первые секунды, 2) время τ, по истечении которого разность уровней воды в баках уменьшается в e раз. Вязкость воды принять равной $\eta = 1\cdot10^{-3}$ *Па·с*.

***Решение*:**

Характер течения воды в трубке определяется **числом Рейнольдса**: $Re = \dfrac{\rho V r}{\eta}$. (1)



Значение максимальной скорости течения воды в трубке V_{max} можно получить, используя **формулу Пуазейля**:

$$Q_0 = \frac{(p_1 - p_2)}{l} \cdot \frac{\pi r^4}{8\eta} = \frac{\rho g h_0 \cdot \pi r^4}{8\eta l}. \qquad (2)$$

С другой стороны поток Q равен произведению средней скорости истечения жидкости на площадь поперечного сечения трубки $Q_0 = V_{max} \cdot \pi r^2$. Выражая отсюда V_{max}, получаем максимальное значение числа Рейнольдса для течения воды в условиях данной задачи:

$$Re_{max} = \frac{\rho^2 g h_0 \pi r^3}{8\eta^2 l} \approx 600 < 1000 \text{ – т.е. течение ламинарное.} \qquad (3)$$

Объем воды dQ, протекающий по трубке за время dt при произвольном значении разность уровней воды в баках h определяется по формуле Пуазейля:

$$dQ = \frac{\rho g h \pi r^4}{8\eta l} dt, \qquad (4)$$

Этот объем связан с изменением *уровня воды* dx в левом баке равенством $dQ = \pi R^2 dx$. Изменение *разности уровней* в баках равно $dh = -2dx$, поэтому

$$dQ = -\frac{\pi R^2 dh}{2}. \qquad (5)$$

Приравнивая правые части равенств (4) и (5), получаем дифференциальное уравнение:

$$\frac{\rho g h \pi r^4}{8\eta l} dt = -\frac{\pi R^2 dh}{2}.$$

В результате разделения переменных имеем:

$$\frac{dh}{h} = -\frac{\rho g r^4}{4R^2 \eta l} dt.$$

После интегрирования: $\ln h = -\dfrac{\rho g r^4}{4R^2 \eta l} t + C$, где C – постоянная интегрирования. Потенцируя последнее уравнение, получаем:

$$h = Ae^{-\alpha t}; \text{ где } \alpha = \frac{\rho g r^4}{4R^2 \eta l},$$

$A = e^C$ – новая константа, которая находится из начальных условий. При $t = 0$, $h = h_0$, отсюда $A = h_0$. Окончательно имеем:

$$h = h_0 \cdot e^{-\alpha t}.$$

Отсюда $\tau = 1/\alpha = \dfrac{4R^2 \eta l}{\rho g r^4} = 1{,}6 \cdot 10^4\ с \approx 4{,}5\ час.$

Задачи для самостоятельного решения.

5.7. Два протона с энергией $T = 0{,}5$ $МэВ$ каждый летят навстречу друг другу и испытывают «лобовое столкновение». До какого минимального расстояния r_{min} они могут сблизиться, если учитывать только электрическое взаимодействие между ними?

5.8. Груз положили на чашку весов без толчка. Сколько делений n_0 покажет стрелка весов при первоначальном отбросе, если после успокоения качаний она показывает $n_1 = 5$ делений. Весы можно представить себе в виде пружинного динамометра.

5.9. Движущаяся частица претерпевает абсолютно упругое столкновение с покоящейся частицей такой же массы. Доказать, что после столкновения, если оно не было лобовым, частицы разлетятся под прямым углом друг к другу. Как будут двигаться частицы после центрального удара?

5.10. Навстречу друг другу летят две частицы с массами m_1 и m_2. Между ними происходит неупругий удар. Известно, что кинетическая энергия первой частицы в $n = 20$ раз больше, чем у второй. При каком соотношении масс после удара частицы будут двигаться в сторону частицы с меньшей энергией?

5.11. Может ли произойти ионизация атома ^{133}Cs ударом атома ^{16}O с кинетической энергией T_0 = 4 *эВ*? Энергия ионизации $\varepsilon_{ион}$ = 3,9 *эВ*.

5.12. В ядерной физике часто бывает нужно уменьшить скорость нейтронов, выделяющихся при ядерных реакциях. Это происходит, например, при упругом ударе нейтрона о медленно движущееся (практически – неподвижное) ядро углерода (графит) или ядро дейтерия (“тяжелый водород”). Во сколько раз уменьшится скорость нейтрона при упругом лобовом столкновении нейтрона с поящимся ядром углерода? Принять, что масса ядра углерода в n = 12 раз больше массы нейтрона. После лобового столкновения направление движения нейтрона меняется на противоположное.

5.13. Решить предыдущую задачу для случая соударения нейтрона с ядром дейтерия, массу которого можно принять равной удвоенной массе нейтрона.

5.14. Обруч и диск одинаковой массы катятся без проскальзывания с одинаковой скоростью движения их центров масс. Кинетическая энергия обруча равна при этом T_1 = 40 *Дж*. Найти кинетическую энергию диска T_2.

5.15. Шар массой m = 1 *кг*, катящийся без скольжения, ударяется о стенку и откатывается от нее. Скорость шара до удара о стенку V_0 = 11 *см/с*, после удара V = 9 *см/с*. Найти количество тепла Q, выделившееся при ударе.

5.16. Однородный стержень длиной l = 0,85 *м* может свободно вращаться вокруг горизонтальной оси, проходящей через его конец. Какую минимальную скорость необходимо сообщить нижнему концу стержня, чтобы он сделал полный оборот вокруг оси. В исходном положении стержень покоился.

5.17. Стержень, описанный в предыдущей задаче, отклонили до горизонтального положения и отпустили. Определить скорость центра масс стержня в момент прохождения им положения равновесия?

5.18. * Однородный стержень длины $\boldsymbol{l}$ может вращаться без трения вокруг горизонтальной оси, отстоящей на расстоянии $l/3$ от одного из концов стержня. Стержень, занимавший сначала горизонтальное положение, отпустили без толчка. Найти ***модуль линейного ускорения*** опускающегося конца стержня в момент, когда стержень составляет с горизонтом угол α.

5.19. Однородному цилиндру сообщают начальный импульс, в результате чего он катится без проскальзывания вверх по наклонной плоскости с начальной скоростью $\mathbf{V}_0$. Какова скорость цилиндра на высоте h от основания? На какую максимальную высоту поднимется цилиндр? Как изменятся результаты для шара?

5.20. * Стержень длины l падает, скользя одним концом по гладкой горизонтальной поверхности. В начальный момент стержень занимал вертикальное положение и покоился. Найти скорость центра масс стержня в момент его приземления.

5.21. * Однородный стержень длиной l подвешен в вертикальном положении и может свободно вращаться вокруг горизонтальной оси, проходящей через его конец. Горизонтально летевшая пуля попадает в стержень и застревает в нем. На каком расстоянии x от верхнего конца должна находиться точка попадания пули, чтобы импульс системы "пуля – стержень" остался неизменным сразу после удара.

5.22. * Линейка массы m = 100 *г* и длины l = 30 *см* лежит на гладком столе. По линейке наносят удар в точке, отстоящей от её центра на расстояние a = 5 *см*. При этом линейке "мгновенно" сообщается импульс $p = 6{\cdot}10^{-2}$ *кг·м/с*. Найти расстояние от центра линейки до точки O линейки, которая не "почувствует" удара[*)]. Как движется линейка сразу после удара?

5.23. Человек массы m = 60 *кг* стоит на краю покоящейся горизонтальной платформы массы M = 120 *кг*, имеющей форму однородного диска. Платформа может вращаться без трения относительно оси, проходящей через ее центр. На какой угол повернется платформа, если человек пойдет вдоль края платформы и, обойдя ее, вернется на прежнее место?

5.24. На стуле, который может свободно вращаться вокруг вертикальной оси и обычно используется при лекционных демонстрациях под названием «скамьи Жуковского», сидит экспериментатор. Опишите, как будет двигаться скамья с экспериментатором в следующих случаях:

[*)] Т.е. ее мгновенная скорость будет равна нулю в момент удара.

а) Экспериментатор неподвижен, в руках у него – ось, на которую насажено велосипедное колесо, которое может вращаться вокруг этой оси с малым трением. Экспериментатор поднимает колесо над головой и, удерживая ось одной рукой в вертикальном положении, другой рукой раскручивает колесо. *б*) Раскрутив таким образом колесо, наклоняет ось, придав ей горизонтальное положение. *в*) Экспериментатор наклоняет ось еще ниже, придав ей вертикальное направление, противоположное исходному (*а*).

5.25. В системе, описанной в предыдущей задаче, неподвижному экспериментатору дают в руки раскрученное колесо так, что, удерживая колесо над головой, он остается неподвижным. Как будет двигаться экспериментатор, если он *а*) повернет ось колеса горизонтально? *б*) повернет её вниз? Ответы необходимо обосновать.

5.26. * На старте установлена ракета массой M для запуска в вертикальном направлении. Каким должен быть расход топлива в единицу времени μ, чтобы обеспечить ракете начальное ускорение $2g$? (g – ускорение свободного падения). Скорость истечения газов из сопла относительно ракеты считать постоянной и равной u.

5.27. * Найти скорость ракеты в тот момент, когда ее масса за счет сгорания топлива уменьшилась в e = 2,7 раза по сравнению с ее значением на старте. Начальная скорость ракеты равна нулю. Скорость газовой струи относительно ракеты равна u, постоянна и направлена против движения ракеты. Влиянием внешних сил пренебречь.

5.28. С поверхности Земли вертикально вверх запускают ракету массой M_0 = 1 *кг*. Масса газов, вылетающих из ракеты за единицу времени μ = 0,1 *кг/с*. Какой должна быть скорость газов относительно ракеты u, чтобы она могла оторваться от Земли?

5.29. Цилиндрический сосуд высоты h = 0,5 *м* и радиуса R = 10 *см* наполнен доверху водой. В дне сосуда открывается отверстие радиуса r = 1 *мм*. Пренебрегая вязкостью воды, определить время τ, за которое вся вода вытечет из сосуда.

5.30. * В условиях предыдущей задачи найти закон движения уровня воды в сосуде $h(t)$ и зависимость скорости его движения от времени $V(t)$.

5.31. Площадь поршня шприца S_1 = 4 *см*^{2}, а площадь отверстия S_2 = 1 *мм*^{2}, ход поршня l = 40 *мм*. Пренебрегая вязкостью воды и трением поршня о стенки, определить, сколько времени будет вытекать из шприца вода, если давить на поршень с постоянной силой $F = 5$ *Н*.

5.32. По горизонтальной трубе радиуса R = 12,5 *мм* течет вода. Поток воды через сечение трубы Q = 3·10^{-5} *м*^{3}*/с*. Определить: 1) характер течения, 2) перепад давления на единицу длины трубы $\mathrm{d}p/\mathrm{d}l$. Вязкость воды принять равной η = 1·10^{-3} *Па·с*.