МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В. Ломоносова

С.Н. Козлов, А.В. Зотеев, А.Н. Невзоров

ЗАДАЧИ
ПО КУРСУ ОБЩЕЙ ФИЗИКИ
С РЕШЕНИЯМИ

Колебания и волны.
Оптика



СОДЕРЖАНИЕ

Часть II. КОЛЕБАНИЯ И ВОЛНЫ. ОПТИКА

Раздел первый. *КОЛЕБАНИЯ И ВОЛНЫ*

§14. Общие свойства гармонических колебаний 142

§15. Свободные незатухающие колебания простых систем ... 148

§16. Свободные колебания связанных осцилляторов. Колебания молекул 158

§17. Свободные затухающие колебания 169

§18. Вынужденные механические колебания при гармоническом внешнем воздействии 180

§19. Вынужденные колебания в электрических цепях. Переменный ток 188

§20. Волны упругие и электромагнитные 199

Раздел второй. *ВОЛНОВАЯ ОПТИКА*

§21. Интерференция света 209

§22. Дифракция Френеля 220

§23. Дифракция Фраунгофера на щели 227

§24. Дифракционная решётка 235

§25. Поляризация света 241

Ответы к задачам для самостоятельного решения 252

Справочные материалы 270

Часть II. КОЛЕБАНИЯ И ВОЛНЫ. ОПТИКА

Раздел первый. *КОЛЕБАНИЯ И ВОЛНЫ*

§14. *Общие свойства гармонических колебаний*

Материальная точка совершает гармонические колебания, если её отклонение от положения равновесия зависит от времени по закону:

$$\xi(t) = A\cdot\cos(\omega t + \varphi_0). \qquad (14.1)$$

Параметр A называется амплитудой, ω – циклической (круговой) частотой колебаний, $(\omega t + \varphi_0)$ – фазой, а φ_0 – начальной фазой колебаний. Величина $T = 2\pi/\omega$ называется периодом колебаний.

Дифференцируя $\xi(t)$ по времени, получим зависимости проекций скорости колеблющейся по гармоническому закону материальной точки и её ускорения от времени:

$$\dot{\xi}(t) = -\omega A\cdot\sin(\omega t + \varphi_0) = \omega A\cdot\cos(\omega t + \varphi_0 + \pi/2), \qquad (14.2)$$

$$\ddot{\xi}(t) = -\omega^2 A\cdot\cos(\omega t + \varphi_0) = \omega^2 A\cdot\cos(\omega t + \varphi_0 + \pi). \qquad (14.3)$$

Из равенств (14.2) и (14.3) следует, что *амплитуда скорости* при колебательном движении равна $\upsilon_{max} = \omega A$, а ускорение точки в любой момент времени пропорционально её отклонению от положения равновесия:

$$\ddot{\xi}(t) = -\omega^2\cdot\xi(t). \qquad (14.4)$$

Обобщая, отметим, что если при решении какой-то физической задачи некоторая величина (например, координата тела в механике или заряд конденсатора в электричестве) окажется пропорциональной её второй производной по времени с обратным знаком, то эта величина зависит от времени по гармоническому закону (14.1). Причём коэффициент пропорциональности между величиной и её второй производной определяется *частотой собственных колебаний* $\omega_0^2 = -\ddot{\xi}/\xi$ (здесь и в дальнейшем для частоты ***собственных незатухающих колебаний*** какого-либо осциллятора мы будем использовать именно обозначение ω_0).

При решении конкретной физической задачи *частота собственных гармонических колебаний* определяется только свойствами осциллятора (такими, как масса колеблющегося тела, коэффициент жёсткости пружины, электроёмкость конденсатора, индуктивность катушки в колебательном контуре и т.п.). Амплитуду колебаний A и начальную фазу φ_0 можно определить, ис-

пользуя два начальных условия – начальное отклонение от положения равновесия и начальную скорость точки.

Решим несколько задач, которые помогут лучше понять общие свойства гармонических колебаний.

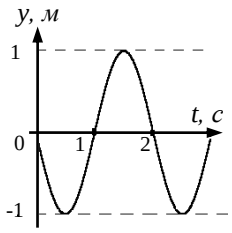


Рис. 14.1

14.1. Закон движения материальной точки $y = y(t)$ вдоль оси Y задан графиком, представленным на рис. 14.1. Опишите зависимость координаты от времени уравнением вида $y(t) = A\cdot\cos(\omega_0 t + \varphi_0)$, подобрав значения параметров A, ω_0 и φ_0.

Решение

Из рисунка видно, что максимальное отклонение точки от положения равновесия и, следовательно, амплитуда колебаний $A = 1$ *м*. Период колебаний $T = 2$ *с*, отсюда $\omega_0 = 2\pi/T = \pi$ *рад*/*с*. Наконец, в начальный момент времени ($t = 0$) $y(0) = \cos\varphi_0 = 0$. Это может быть при $\varphi_{01} = \pi/2$ и $\varphi_{02} = 3\pi/2$. Однако проекция начальной скорости точки на ось Y, как это видно из рисунка, меньше нуля $\upsilon_{0y} \equiv \dot{y}(0) < 0$. Поскольку $\dot{y}(0) = -\omega A\cdot\sin(\varphi_0)$, а $\sin(\pi/2) > 0$, правильным является именно значение $\varphi_0 = \pi/2$.

Ответ: $y(t) = 1\cdot\cos(\pi\cdot t + \pi/2)$ *м*.

Предлагаем самостоятельно определить, как записать закон движения этой же точки, используя функцию синус, а не косинус.

14.2. Частица совершает свободные гармонические колебания вдоль оси X. В некоторый момент времени t_1 смещение частицы от положения равновесия равно $x_1 = 0{,}3$ *м*, проекция её скорости $\upsilon_1 = -4$ *м*/*с* и ускорения $a_1 = -30$ *м*/*с*^{2}. Определите амплитуду и частоту колебаний частицы.

Решение

По условию координата частицы меняется со временем по закону $x(t) = A\cdot\cos(\omega_0 t + \varphi_0)$. В момент времени t_1 смещение частицы от положения равновесия $x_1 = A\cdot\cos(\omega_0 t_1 + \varphi_0)$, проекция её скорости $\upsilon_1 = -\omega_0 A\cdot\sin(\omega_0 t_1 + \varphi_0)$, а ускорения $a_1 = -\omega_0^2\cdot A\cdot\cos(\omega_0 t_1 + \varphi_0)$. При гармонических колебаниях $a_x = -\omega_0^2\cdot x$, и из второго равенства находим собственную частоту колебаний $\omega_0 = \sqrt{-a_1 / x_1}$.

Поскольку $\cos^2(\omega_0 t_1 + \varphi_0) + \sin^2(\omega_0 t_1 + \varphi_0) = 1$, приходим к равенству $(x_1/A)^2 + [\upsilon_1/(A\omega_0)]^2 = (1/A)^2(x_1^2 - x_1 \cdot \upsilon_1^2/a_1) = 1$ и получаем амплитуду рассматриваемых колебаний $A = x_1 \cdot \sqrt{1 - \upsilon_1^2/(a_1 x_1)}$.

Ответ: $A = x_1 \cdot \sqrt{1 - \upsilon_1^2/(a_1 x_1)} = 0{,}5$ *м*; $\omega_0 = \sqrt{-a_1/x_1} = 10$ *рад/с*.

14.3. Тело, прикреплённое упругой пружиной к стене, находится на гладкой горизонтальной поверхности. В начальный момент времени его смещают вдоль оси X на расстояние $x_0 = 5$ *см* вправо и толкают со скоростью $\upsilon_0 = 10$ *см/с* влево. Период собственных незатухающих колебаний тела $T = 3{,}14$ *с*. Определите, через какое минимальное время τ тело будет проходить положение равновесия.

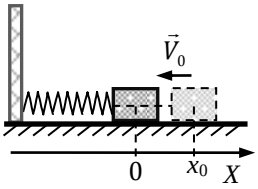


Рис. 14.2

Решение

Запишем второй закон Ньютона для тела, совершающего малые колебания на пружине:

$m\ddot{x} = -k \cdot x$,

где m – масса тела, k – коэффициент упругости пружины. Отсюда следует, что $\ddot{x} = -\omega_0^2 \cdot x$, где $\omega_0^2 = k/m$ – частота собственных незатухающих колебаний. Это дифференциальное уравнение гармонических колебаний, общее решение которого имеет вид: $x = A\cdot\cos(\omega_0 t + \varphi_0)$. Из начальных условий получаем: $x_0 = A\cdot\cos(\varphi_0)$, $\upsilon_0 = -A\omega_0\cdot\sin\varphi_0$; $\sin^2\varphi_0 + \cos^2\varphi_0 = (\upsilon_0/A\omega_0)^2 + (x_0/A)^2 = 1$. Следовательно,

$$A = \sqrt{x_0^2 + (\upsilon_0 T/2\pi)^2} \text{ и } \cos(\varphi_0) = x_0/A = 1\Big/\sqrt{1 + [\upsilon_0 T/(2\pi x_0)]^2} = \sqrt{2}/2.$$

Перемещение тела от начального положения до равновесного равно по модулю x_0. В равновесном положении $x = 0$ и $0 = A\cdot\cos(\omega_0 t + \varphi_0)$. Первый раз тело окажется в положении равновесия при значении фазы: $\omega_0\cdot\tau + \varphi_0 = \pi/2$. Это произойдёт в момент времени $\tau = (\pi/2 - \varphi_0)/\omega_0 = T/4 - T\cdot\varphi_0/2\pi$. При этом $\varphi_0 = \pi/4$.

Ответ: $\tau = T/4 - (T/2\pi)\cdot\arccos\left[1\Big/\sqrt{1 + [\upsilon_0 T/(2\pi x_0)]^2}\right] = T/8 \cong 0{,}39$ *с*.

14.4. Монета лежит на горизонтальной подставке, совершающей вертикальные колебания по закону: $y(t) = A\cdot\sin(\omega t)$, где $\omega = 10\ c^{-1}$. При каких амплитудах этих колебаний движение монеты будет гармоническим? На какой максимальной высоте H относительно среднего положения подставки окажется монета в течение первого периода колебаний подставки, если $A = 0{,}2\ м$. Ускорение свободного падения считайте равным $g = 10\ м/с^2$.

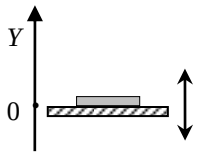


Рис. 14.3

Решение

По второму закону Ньютона для монеты $ma_y = N - mg$, где N – сила реакции опоры, действующая на монету со стороны подставки вверх (по оси Y), a_y – вертикальная проекция ускорения монеты. Движение монеты будет гармоническим до тех пор, пока она не отрывается от подставки. При гармоническом движении монеты проекция её ускорения равна $a_y = \ddot{y} = -\omega^2 A\cdot\sin(\omega t)$.

При постепенном увеличении амплитуды началу отрыва монеты от подставки соответствует условие $N = 0$ при достижении порогового значения $A = g/\omega^2$. При этом движение монеты всё ещё происходит по гармоническому закону (монета теряет контакт с подставкой пока только в верхних точках траектории); при бóльших амплитудах $A > g/\omega^2$ движение монеты уже не будет гармоническим. В частности, в условиях данной задачи пороговое значение амплитуды равно $A_{пор} = 0{,}1\ м$. При бóльших амплитудах монета начнёт подскакивать над подставкой.

Определим, на какой максимальной высоте окажется монета в течение первого периода колебаний подставки при $A > g/\omega^2$. Моменту отрыва t_1 монеты от подставки соответствует условие $\sin(\omega t_1) = g/(\omega^2 A)$. В этот момент координата монеты $y_1 = A\cdot\sin(\omega t_1) = g/\omega^2$, а проекция её скорости $\upsilon_1 = \dot{y}(t_1) = \omega A\cdot\cos(\omega t_1) = \omega A\cdot\sqrt{1-\sin^2(\omega t_1)} = \omega A\cdot\sqrt{1-[g/(A\omega^2)]^2}$. Начиная с этого момента, монета летит, как брошенное вверх со скоростью υ_1 тело. Максимальную высоту, на которую поднимется монета (от этой точки), легко определить, например, пользуясь законом сохранения механической энергии: $h = \upsilon_1^2/(2g) = \omega^2 A^2/(2g) - g/(2\omega^2)$. Максимальная высота подъёма монеты от среднего положения $H = h + y_1$.

Ответ: $H = \omega^2 A^2/(2g) + g/(2\omega^2) = 25\ см$.

Задачи для самостоятельного решения

14.5. Материальная точка колеблется вдоль оси X по закону: $x(t) = A\cdot\cos(\omega_0 t)$. Постройте зависимости: $x_1(t) = A\cdot\cos(\omega_0 t + \pi/2)$, $x_2(t) = A\cdot\cos(\omega_0 t + \pi)$ и $x_3(t) = A\cdot\sin(\omega_0 t + \pi)$.

14.6. Частица движется по гармоническому закону – см. рис. 14.4. Считая, что в начальный момент времени её смещение от положения равновесия равно половине максимального опишите её движение законами вида $x(t) = A\cdot\cos(\omega t + \varphi_0)$ и $A\cdot\sin(\omega t + \widetilde{\varphi}_0)$.

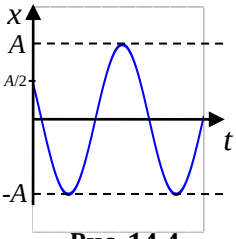


Рис. 14.4

14.7. Шарик падает на пол с высоты h. Если удар шарика о пол упругий, будет ли движение шарика (*а*) колебательным, (*б*) периодическим и (*в*) гармоническим? Что изменится, если удары шарика о пол неупругие?

14.8. Вектор, длина которого равна A, вращается против часовой стрелки с угловой скоростью ω_0. В начальный момент вектор составляет угол φ_0 с осью X. По какому закону изменяется проекция этого вектора на ось X?

14.9. Частица колеблется вдоль оси X по закону: $x(t) = A\cdot\cos(\omega t)$. Постройте графики зависимостей: *а*) $x(t)$, $\dot{x}(t)$, $\ddot{x}(t)$ и *б*) $\dot{x}(x)$, $\ddot{x}(x)$.

14.10. Рыбка перемещается вдоль стенки аквариума по закону: $x(t) = 0{,}2\cdot\cos(\pi t)$ *м*. Найдите среднее значение модуля скорости $\langle \upsilon \rangle$ и модуль средней скорости $|\langle \vec{\upsilon} \rangle|$ рыбки за один цикл.

14.11. Частица колеблется по закону: $x(t) = 2\cdot\cos(\pi t/3)$ *м*. Найдите среднюю скорость $\langle \vec{\upsilon} \rangle$ частицы и средний модуль скорости $\langle \upsilon \rangle$ за время: *а*) от 1 *с* до 2 *с*; *б*) от 2 *с* до 4 *с*.

14.12. Студент движется между химическим и физическим факультетами МГУ по закону $x(t) = 100\cdot\cos(\omega t)$ *м*. Его максимальная скорость при этом равна $\upsilon_{max} = \pi$ *м/с*. Определите, за какое время τ он проходит расстояние от химфака до памятника Ломоносову (*а*)? Какими будут модуль его средней скорости $|\langle \vec{\upsilon} \rangle|$ (*б*) и средний модуль скорости $\langle \upsilon \rangle$ за один полный цикл движения (*в*)?

14.13. При изучении гармонических колебаний наблюдают за координатой теневой проекции на ось X шарика, равномерно движущегося по окружности радиуса R = 0,6 *м* в горизонтальной плоскости. При этом от одного крайнего положения на экране до другого она смещается за время τ = 1,57 с. Определите, какова при этом максимальная скорость движения проекции υ_{max}.

14.14. В средней части траектории проекции из предыдущей задачи на экране отмечена полоса шириной $d = R$. Определите, за какое время Δt проекция пересекает эту полосу?

14.15*. Грузик на пружинке с коэффициентом жёсткости k совершает гармонические колебания с амплитудой A. Площадь его фазовой траектории (зависимости импульса грузика от его координаты) равна S [*)]. Определите период колебаний грузика.

14.16. Амплитуда колебаний грузика на пружинке возросла в два раза. Во сколько раз увеличились энергия колебаний (*а*) и площадь его фазовой траектории (зависимость $\dot{x}$ от x) (*б*) [*)].

14.17*. Зависимость проекции скорости тела массы m = 1 *кг* от его координаты x представляет собой эллипс с полуосями a = 1 *м* и b = 0,628 *м/с*. Изобразите зависимости координаты и импульса тела от времени. Чему равен период колебаний тела?

14.18*. Два тела массами m_1 = 1 *кг* и m_2 = 2 *кг* находятся на гладкой горизонтальной поверхности и связаны пружиной ($k = 1{,}5 \cdot 10^2$ *Н/м*), длина которой L = 12 *см*. Пружину сжимают на величину ΔL = 6 *см* и без толчка отпускают. Какова частота возникших колебаний? Определите амплитуды колебаний каждого тела.

14.19*. Грузик подвешен на нерастяжимой нити, верхний конец которой перемещают по вертикали по закону: $y(t) = A \cdot \sin(\omega t)$. Величину A постепенно увеличивают. Начиная с каких значений амплитуды $A > A_{пор}$, колебания грузика станут негармоническими? В каких точках траектории начнётся отклонение от гармонического закона колебаний грузика?

14.20*. Брусок находится на горизонтальной подставке (см. рис. 14.5), которая начинает вибри-

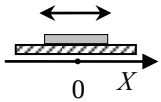


Рис. 14.5

[*)] Фазовая траектория – эллипс с площадью S = π·a·b, где *a* и *b* – его полуоси.

ровать в горизонтальной плоскости по закону $x(t) = A\cdot\sin(\omega t)$. При какой минимальной амплитуде колебаний подставки движение бруска перестаёт быть гармоническим, если коэффициент трения между ним и подставкой равен μ?

14.21*. Шайба находится на горизонтальной подставке, которая может вибрировать в вертикальном и горизонтальном направлениях (см. рис. 14.6) по гармоническому закону с одной и той же частотой. При движении подставки в вертикальном направлении шайба начинает отрываться от подставки при амплитуде колебаний подставки A_1, а при горизонтальном движении шайба начинает соскальзывать при амплитуде A_2. Каков коэффициент трения шайбы о подставку?

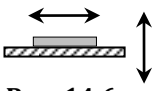


Рис. 14.6

14.22*. Брусок лежит на поверхности клина (см. рис. 14.7), составляющей с горизонтом угол $\alpha = 30^\circ$. Коэффициент трения между бруском и клином $\mu = 0{,}7$. Клин начинает вибрировать вдоль его ребра по закону $A\cdot\cos(10t)$ (*м*). При какой минимальной амплитуде A_{min} колебаний клина брусок начнёт скользить по его поверхности?

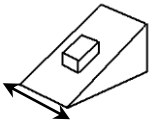


Рис. 14.7

§15. *Свободные гармонические колебания одномерных механических и электрических осцилляторов*

При отсутствии потерь энергии в системе колебания могут оказаться гармоническими. Это происходит тогда, когда процессы в ней допускают описание дифференциальным уравнением вида

$$\ddot{\xi} + \kappa\cdot\xi = 0\,. \qquad (15.1)$$

Здесь функция $\xi(t)$ – отклонение какой-либо величины, характеризующей систему, от равновесного значения. Множитель κ – постоянный коэффициент. Уравнение (15.1) называется ***дифференциальным уравнением гармонического осциллятора***. Именно к такому виду можно привести уравнения, описывающие *малые* свободные колебания в хорошо известных простейших колебательных системах *в отсутствии потерь энергии*: грузика на пружине, математического маятника и колебательного (*LC*-) контура. Как следует из уравнения (14.4), константа κ равна квадрату

частоты собственных гармонических (незатухающих) колебаний системы $\kappa = \omega_0^2$. Покажем, каким образом можно находить этот важный параметр ω_0 на примере несколько более сложных колебательных систем. Продемонстрируем, кроме того, как определяются амплитуда *A* и начальная фаза φ_0 из *начальных условий конкретной задачи*, т.е. способа возбуждения колебаний в системе.

15.1. Найдите частоту малых свободных колебаний ω_0 *физического маятника* – тела произвольной формы, закреплённого на горизонтальной оси, не проходящей через его центр тяжести (рис. 15.1). Момент инерции тела относительно этой оси равен *J*, его масса *m*, а расстояние от оси до центра тяжести тела равно *b*.

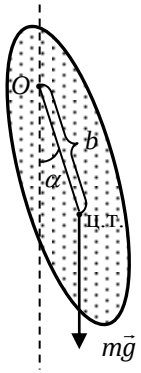


Рис. 15.1

Решение

При отклонении тела от положения устойчивого равновесия (при котором ось вращения и центр тяжести находятся на одной вертикали) возникает момент силы тяжести, действующей на тело, направленный против вектора его углового смещения $\vec{\alpha}$. Уравнение динамики вращательного движения твёрдого тела относительно закреплённой оси имеет вид:

$$J \cdot \ddot{\alpha} = -mgb \cdot \sin\alpha .$$

Знак минус здесь обусловлен тем, что знаки проекций момента силы тяжести и углового смещения $\vec{\alpha}$ при любом положении тела противоположны. Как мы видим, данное дифференциальное уравнение *не является линейным*. Однако при малых углах ($\alpha << 1$) $\sin\alpha \approx \alpha$[*)] и уравнение приобретает знакомую форму (15.1):

$$\ddot{\alpha} + \frac{mgb}{J} \cdot \alpha = 0 .$$

Сравнивая это равенство с уравнением (15.1), получаем частоту собственных незатухающих колебаний физического маятника:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{mgb}{J}} .$$

[*)] Заметим, что если углы отклонения не превышают 0,1 *рад* (5,7°), то отличие $\sin\alpha$ от радианной меры угла α составляет не более 0,2%.

В частном случае математического маятника массы m и длины l с учётом $b = l$ и $J = ml^2$ получим известный результат:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}\,.$$

Какова длина математического маятника, собственная частота которого совпадает с частотой данного физического маятника? Ответ легко получить, приравняв полученные значения:

$$\sqrt{\frac{mgb}{J}} = \sqrt{\frac{g}{l_{пр}}}\,, \quad \Rightarrow \qquad l_{пр} = \frac{J}{mb}\,.$$

Это так называемая ***приведённая длина*** физического маятника.

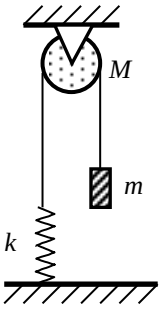


Рис. 15.2

15.2. В устройстве, показанном на рис. 15.2, блок представляет собой сплошной однородный цилиндр массой $M = 8$ *кг*, который может вращаться вокруг оси без трения. Масса груза $m = 6$ *кг*. Жёсткость пружины $k = 1000$ *Н/м*. Груз удерживают в положении, при котором пружина не растянута. Найдите закон движения груза после его освобождения (без толчка). Проскальзывание нити по блоку отсутствует, а сама нить невесома и нерастяжима.

Решение

Выберем систему отсчёта, в которой одна координатная ось направлена вертикально вниз (*OX*), а другая (*OZ*) – перпендикулярно плоскости рисунка от нас (см. рис. 15.3). Пусть начало отсчёта на оси *OX* соответствует положению груза при недеформированной пружине. В этом случае координата x груза будет одновременно равна величине деформации пружины. Уравнение движения груза в проекции на ось *OX* можно записать так:

$$m\ddot{x} = mg - T_1\,. \qquad (1)$$

Уравнение динамики вращательного движения массивного блока в проекции на ось *OZ* имеет вид:

$$J \cdot \ddot{\alpha} = (T_1 - T_2) \cdot R\,, \qquad (2)$$

где J – момент инерции блока относитель-

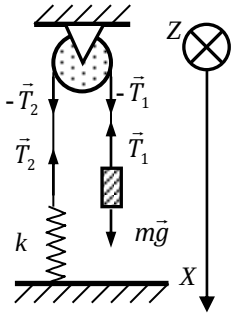


Рис. 15.3

но оси *OZ*, равный

$$J = \frac{MR^2}{2}. \qquad (3)$$

Модуль силы натяжения нити T_2 равен, по третьему закону Ньютона, силе упругости деформированной пружины:

$$T_2 = kx. \qquad (4)$$

Наконец для линейного ускорения груза и углового ускорения блока с учётом условий нерастяжимости нити и отсутствия её проскальзывания по блоку выполняется уравнение кинематической связи:

$$\ddot{x} = R \cdot \ddot{\alpha}. \qquad (5)$$

Совместное решение уравнений (1) – (5) приводит к равенству:

$$\ddot{x} + \frac{2k}{2m+M}\left(x - \frac{mg}{k}\right) = 0. \qquad (6)$$

После замены переменной на $\xi = x - \frac{mg}{k}$ мы приходим к уравнению гармонического осциллятора, в котором роль ω_0^2 играет величина $\frac{2k}{2m+M}$. Изменения ξ подчиняются гармоническому закону $\xi(t) = A \cdot \cos(\omega_0 t + \varphi_0)$, а координата груза:

$$x(t) = \frac{mg}{k} + A \cdot \cos(\omega_0 t + \varphi_0). \qquad (7)$$

Это, конечно, тоже гармоническое колебание вблизи положения равновесия $x_0 = \frac{mg}{k}$ с частотой $\omega_0 = \sqrt{\frac{2k}{2m+M}}$.

Покажем, каким образом можно определить амплитуду A и начальную фазу φ_0 колебаний груза, если известен способ возбуждения колебаний в системе – то есть начальные условия.

Начальные условия движения в задаче таковы:

$$x(0) = 0, \qquad \dot{x}(0) = 0.$$

Используя общий вид решения (7), получим:

$$x(0) = 0 = \frac{mg}{k} + A \cdot \cos\varphi_0; \qquad \dot{x}(0) = 0 = -A\omega_0 \cdot \sin\varphi_0.$$

Из второго уравнения следует, что $\varphi_0 = 0$, и после подстановки этого значения в первое находим:

$$A = -\frac{mg}{k}.$$

Таким образом, окончательно закон движения груза можно записать в виде:

$$x(t) = \frac{mg}{k} \cdot \left(1 - \cos\sqrt{\frac{2k}{2m+M}} \cdot t\right).$$

15.3. Два шарика, массы которых m_1 и m_2, могут скользить без трения по тонкому горизонтальному стрежню (см. рис. 15.4). Шарики связаны невесомой пружинкой жёсткости k[*]. Первоначально шарики смещают в противоположных направлениях и отпускают без толчка. Определите частоту ω_0 возникающих колебаний и максимальную относительную скорость шаров, если их первоначальное относительное смещение $\xi(0) = \xi_0$.

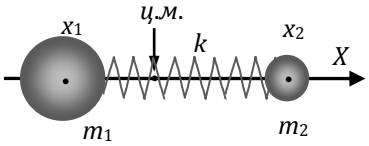


Рис. 15.4

Решение

Направим координатную ось *OX* системы отсчёта вдоль стержня вправо. Если координаты шариков до деформации пружины обозначить x_{10} и x_{20}, то очевидно, длина недеформированной пружины равна

$l_0 = x_{20} - x_{10}$.

Уравнение движения грузов по оси *OX* можно записать в виде:

$$m_1\ddot{x}_1 = k(x_2 - x_1 - l_0), \quad (1)$$

$$m_2\ddot{x}_2 = -k(x_2 - x_1 - l_0). \quad (2)$$

Величина, записанная в скобках, равна деформации пружины в процессе колебаний.

С математической точки зрения трудность решения данной системы дифференциальных уравнений состоит в том, что в каждое уравнение входят обе неизвестные функции – $x_1(t)$ и $x_2(t)$. Для преодоления этой трудности вычтем из уравнения (2) уравнение (1), поделив предварительно каждое на соответствующую массу:

[*] Такая система моделирует свободную двухатомную молекулу.

$$\ddot{x}_2 - \ddot{x}_1 = -\left(\frac{k}{m_2} + \frac{k}{m_1}\right)(x_2 - x_1 - l_0)\,.$$

Если ввести теперь новую переменную $\xi = x_2 - x_1 - l_0$, то уравнение приобретает вид (15.1), в котором роль ω_0^2 выполняет множитель $\left(\frac{k}{m_2} + \frac{k}{m_1}\right)$. Собственная частота, таким образом, может быть записана в виде:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{\mu}}\,,$$

где $\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$ называется *приведённой массой* системы (молекулы). Поскольку $(x_2 - x_1)$ – это длина пружины в процессе колебаний, очевидно, смысл введенной нами переменной ξ – деформация пружины (***равная относительному смещению шариков***) при колебаниях. Она-то и меняется по гармоническому закону с частотой ω_0. Отметим, что центр масс системы в указанных условиях покоится. Исходя из начальных условий:

$$\xi(0) = \xi_0, \qquad \dot{\xi}(0) = 0\,,$$

находим окончательно $\xi(t) = \xi_0 \cdot \cos(\omega_0 t)$.

Тогда относительная скорость движения шариков:

$$\dot{\xi}(t) = -\xi_0 \cdot \omega_0 \cdot \sin(\omega_0 t) = -\upsilon_{max} \cdot \sin(\omega_0 t)\,.$$

А максимальная относительная скорость отсюда равна

$$\upsilon_{\max} = \xi_0 \cdot \omega_0 = \xi_0 \cdot \sqrt{\frac{k}{\mu}}\,.$$

Задачи для самостоятельного решения

15.4. Рассмотрим ситуацию, моделирующую процесс столкновения атома и молекулы. Первоначально система, описанная в задаче 15.3, неподвижна и пружинка не деформирована. Первому шарику сообщается импульс $p_0 = m_1\upsilon_0$ в сторону второго (удар налетающего атома). Определите скорость υ_c центра масс системы, и частоту ω_0 возникающих колебаний.

15.5. В условиях задачи 15.4 определите: *а*) амплитуду A изменения деформации пружины, *б*) энергии поступательного $W_{\text{пост}}$ и колебательного $W_{\text{кол}}$ движений системы.

15.6. Потенциальная энергия частицы массы m в одномерном силовом поле зависит от её координаты x по закону $U(x)=U_0\cdot[1-\cos(ax)]$, где U_0 и a – постоянные. Найдите частоту малых колебаний этой частицы около положения равновесия.

15.7. Груз массой m = 0,2 *кг*, подвешенный на пружине жёсткостью k = 20 *Н/м*, лежит на подставке так, что пружина не деформирована. Подставку убирают, и груз начинает двигаться. Найдите закон движения груза и его максимальную скорость.

15.8. С горизонтальной закреплённой пружиной, жёсткость которой k = 25 *Н/м*, связано тело массой M = 1 *кг*, лежащее на абсолютно гладком столе. В это тело попадает и застревает в нём пуля массой m = 10 *г*, летевшая вдоль оси пружины со скоростью υ = 200 *м/с*. Определите период и амплитуду возникших колебаний. Найдите зависимость координаты тела от времени, прошедшего после попадания пули в тело.

15.9. Пластилиновый шарик массой m падает с высоты h на чашу пружинных весов и прилипает к ней (рис. 15.5). Определите зависимость координаты чаши от времени после соударения. Масса чаши и пружины пренебрежимо малы, жёсткость пружины k.

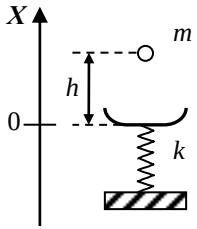


Рис. 15.5

15.10. К потолку на тонкой проволоке подвешен однородный диск массы m = 0,2 *кг* и радиуса R = 20 *см* (рис. 15.6). Модуль кручения проволоки*) равен D = 0,1 *Н·м/рад*. Определите: *а*) частоту ω_0 малых крутильных колебаний диска, *б*) амплитуду A и начальную фазу φ_0 колебаний, если в начальный момент диск повернули на угол α = 0,2 *рад* и сообщили ему начальную угловую скорость $\Omega = 1$ *рад/с* в направлении поворота.

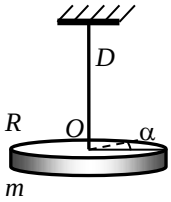


Рис. 15.6

15.11. Два диска закреплены соосно на одном тонком стержне (рис. 15.7) с модулем

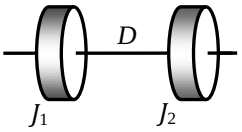


Рис. 15.7

*) D – коэффициент пропорциональности между возникающим вращательным моментом упругих сил N и углом закручивания проволоки α.

кручения D = 1,5 *Н·м/рад*. Радиус дисков одинаков и равен R = 0,2 *м*. Массы дисков равны m_1 = 1 *кг* и m_2 = 3 *кг*. Диски поворачивают в противоположные стороны и отпускают. *а*) Чему равна частота ω_0 малых крутильных колебаний дисков? *б*) Какой будет частота, если один из дисков (например, второй) закрепить.

15.12. Физический маятник представляет собой шар радиуса R = 20 *см*, висящий на тонком невесомом стержне длины $l = R$. В начальный момент времени маятник вывели из положения равновесия, сообщив ему угловую скорость Ω = 0,25 *рад/с*. Найдите зависимость от времени угла отклонения маятника от вертикали.

15.13. Цилиндрический поплавок высоты h = 2 *см* плавает на поверхности воды. Определите период малых колебаний поплавка по вертикали, которые возникают, если его слегка погрузить в воду и отпустить. Плотность материала поплавка ρ = 800 *кг/м*^{3}, плотность воды ρ_0 = 1000 *кг/м*^{3}.

15.14*. В стеклянную U-образную трубочку налита ртуть так, что длина всего столбика ртути равна l = 20 *см*. После заполнения трубочку слегка наклонили, и возвратили в вертикальное положение, отчего ртуть начала колебаться. Определите период T_0 этих колебаний, пренебрегая трением.

15.15. На середине натянутой струны длины l = 1 *м* укреплён шарик массой m = 50 *г*. Найдите частоту малых поперечных колебаний этого шарика. Модуль силы натяжения струны считайте постоянным и равным T = 20 *Н*. Массой струны и силой тяжести, действующей на шарик можно пренебречь.

15.16*. Неподвижный груз массы m, висящий на пружине, растягивает её на величину x_1. Груз дополнительно оттягивают вниз на расстояние x_0 и сообщают ему скорость υ, направленную вертикально вверх. Найдите закон движения груза относительно его положения при нерастянутой пружине $x = x(t)$.

15.17**. Небольшой шарик массой m = 30 *г*, подвешенный на нерастяжимой диэлектрической нити на высоте h = 10 *см* от большой горизонтальной проводящей пластины, совершает малые колебания. После того как шарику сообщили некоторый заряд q, период колебаний изменился в n = 2 *раза*. Найдите этот заряд.

15.18*. Доску положили на два быстро вращающихся навстречу друг другу (в противоположных направлениях) цилиндрических ролика (рис. 15.8). Расстояние между осями роликов $l = 80$ *см*, коэффициент трения скольжения между доской и роликами $\mu = 0{,}16$. Докажите, что доска будет совершать гармонические колебания и найдите их частоту ω_0.

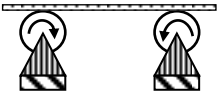


Рис. 15.8

15.19*. Маленький упругий шарик подвешен на нити длиной l у стены, образующей с вертикалью угол α (см. рис. 15.9). Его отклонили от положения равновесия на угол $\beta > \alpha$ и отпустили. Считая, что $\beta << 1$ найдите период колебаний шарика, пренебрегая временем соударения шарика со стенкой. Будут ли колебания гармоническими?

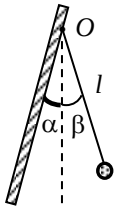


Рис. 15.9

15.20. Однородный стержень длиной $l = 15$ *см* подвешен на горизонтальной оси, перпендикулярной к стержню и проходящей через один из его концов. Стержень отклонили от вертикали на угол $\alpha_0 = 0{,}07$ *рад* ($\approx 4°$) и отпустили без толчка. Найдите зависимость от времени угла отклонения стержня от вертикали $\alpha(t)$. Считайте, что трением можно пренебречь.

15.21. Конденсатор с электроёмкостью C, заряженный до напряжения u_0, замыкают на катушку с индуктивностью L. Пренебрегая активным сопротивлением в цепи, найдите закон изменения со временем заряда конденсатора $q(t)$. Чему равна амплитуда I_0 силы тока в контуре?

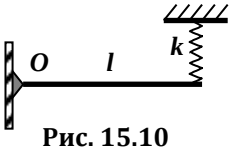


Рис. 15.10

15.22. Однородный стержень массы $m = 1$ *кг* совершает малые колебания вокруг горизонтальной оси шарнира, проходящей через точку O. Правый конец стержня подвешен на невесомой пружине жёсткости $k = 300$ *Н/см* (см. рис. 15.10). Пренебрегая силами трения, найдите частоту малых колебаний стержня ω_0, если в положении равновесия он горизонтален.

15.23. Определите, чему равна максимальная скорость в процессе малых продольных колебаний тела массы

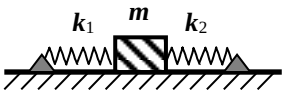


Рис. 15.11

$m = 0{,}2$ *кг* в системе, показанной на рис. 15.11, если тело первоначально отклонили от положения равновесия на $x_0 = 1$ *см* и отпустили без толчка. Жёсткости пружин равны $k_1 = 12$ *Н/м* и $k_2 = 8$ *Н/м*, а их массы пренебрежимо малы. В положении равновесия пружины не деформированы. Найдите также закон движения тела $x = x(t)$. Считайте, что трением можно пренебречь.

15.24. В системе, показанной на рис. 15.12 груз удерживают в положении, при котором пружины не деформированы. В момент времени $t = 0$ груз отпустили без толчка. Масса груза $m = 3$ *г*, жёсткости пружин равны $k_1 = 2$ *Н/м* и $k_2 = 1$ *Н/м.* Найдите зависимость координаты груза от времени. Массы пружин пренебрежимо малы.

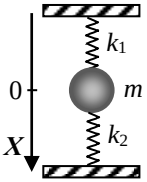


Рис. 15.12

15.25*. Сплошной однородный цилиндр массы $m = 1$ *кг* совершает малые колебания под действием пружины с жёсткостью $k = 150$ *Н/м* (рис. 15.13). Найдите частоту этих колебаний при отсутствии проскальзывания цилиндра по горизонтальной опоре. Масса пружины пренебрежимо мала.

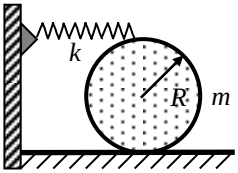


Рис. 15.13

15.26**. Грузик массы $m = 0{,}3$ *кг* может скользить без трения вдоль горизонтального стержня в установке, изображённой на рис. 15.14. Грузик соединён двумя одинаковыми пружинками жёсткостью $k = 15$ *Н/м*, с точками *A* и *B* установки. Установка вращается с постоянной угловой скоростью $\Omega = 6$ *рад/с* вокруг вертикальной оси, проходящей через середину стержня. *а*) Найдите частоту малых колебаний грузика. *б*) При какой угловой скорости Ω колебания не возникнут? *Указание к решению*: Уравнение движения удобно записать в неинерциальной СО, в которой на грузик помимо силы упругости действует центробежная сила инерции равная произведению его массы на центростремительное ускорение.

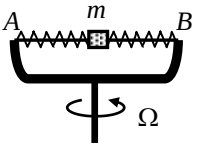


Рис. 15.14

15.27**. В кабине самолета подвешен маятник. Когда самолет летит без ускорения, маятник качается с частотой ω_0. Какова будет частота колебаний маятника, если самолет взлетает с ускорением $\vec{a}$, направленным под углом α к горизонту? Отдельно рассмотрите случай, когда $a = g$ и $\alpha = 0$. *Указание к решению*: Эту задачу также удобно решать в неинерциальной СО, связанной с самолётом.

§16. *Свободные колебания связанных осцилляторов*

Любая система из N связанных одномерных осцилляторов может быть описана системой N дифференциальных уравнений, в каждое из которых в общем случае входит более чем одна функция времени. Например, недиссипативная система, состоящая из двух одинаковых механических осцилляторов, между которыми имеется упругое взаимодействие (рис. 16.1), в соответствии со вторым законом Ньютона описывается двумя уравнениями:

$$m\ddot{\xi}_1 = -k\xi_1 + k_1(\xi_2 - \xi_1), \tag{16.1}$$

$$m\ddot{\xi}_2 = -k\xi_2 - k_1(\xi_2 - \xi_1). \tag{16.2}$$

Здесь ξ_1 и ξ_2 – отклонения левого и правого тела от положений равновесия, k и k_1 – коэффициенты упругости крайних и средней пружин, соответственно. Эти уравнения в общем случае не являются дифференциальными уравнениями гармонических колебаний. В каждое из них входят две неизвестные функции времени – $\xi_1(t)$ и $\xi_2(t)$. Можно, однако, преобразовать эту систему таким образом, чтобы в каждое уравнение входила только одна новая функция времени и её вторая производная. В рассматриваемом случае такое преобразование легко провести, складывая и вычитая из второго первое уравнения (16.1) и (16.2). В результате такой процедуры получаем:

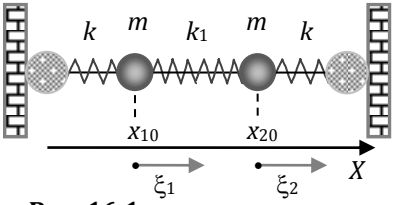


Рис. 16.1

$$m\ddot{\xi}_I = -k\xi_I, \qquad \text{где } \xi_I = \xi_1 + \xi_2; \tag{16.3}$$

$$m\ddot{\xi}_{II} = -(k + 2k_1)\xi_{II}, \qquad \text{где } \xi_{II} = \xi_2 - \xi_1. \tag{16.4}$$

Дифференциальные уравнения (16.3) и (16.4) имеют вид уравнений гармонических колебаний. Их решения – так называемые ***нормальные колебания***, или ***моды*** колебаний:

$$\xi_I = A_I \cdot \cos(\omega_I t + \varphi_{0I}), \text{ где } \omega_I = \sqrt{\frac{k}{m}}; \tag{16.3, a}$$

$$\xi_{II} = A_{II} \cdot \cos(\omega_{II} t + \varphi_{0II}), \text{ где } \omega_{II} = \sqrt{\frac{k + 2k_1}{m}}. \tag{16.4, a}$$

Соответствующие новые переменные ξ_I и ξ_{II} называются ***нормальными координатами***. Движение каждого из осцилляторов, как следует из (16.3) и (16.4), представляет собой наложение *мод*:

$$\xi_1 = (\xi_I - \xi_{II})/2; \quad \xi_2 = (\xi_I + \xi_{II})/2. \tag{16.5}$$

Если в рассматриваемой системе возбуждена только первая мода ($\xi_{II} = 0$), то $\xi_1 = \xi_2 = \xi_I/2$ и оба осциллятора на рис. 16.1 совершают *синфазные* гармонические колебания с частотой ω_I (при этом средняя пружина «не работает» и частота ω_I совпадает с собственной частотой одного свободного осциллятора). При возбуждении только второй моды ($\xi_I = 0$) из (16.5) следует, что $\xi_1 = -\xi_2 = -\xi_{II}/2$, т.е. осцилляторы совершают гармонические колебания с частотой ω_{II}, двигаясь в *противофазе*. *В общем случае колебательное движение каждого осциллятора представляет собой суперпозицию двух нормальных гармонических колебаний с частотами* ω_I *и* ω_{II}. Амплитуды (A_I и A_{II}) и начальные фазы (φ_I и φ_{II}) нормальных колебаний можно определить из начальных условий конкретной физической задачи – начальных смещений и начальных скоростей каждого осциллятора.

Несколько труднее определять нормальные координаты и частоты нормальных колебаний для несимметричных систем связанных осцилляторов. Например, для системы, показанной на рис. 16.2, исходные уравнения динамики таковы:

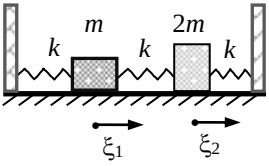


Рис. 16.2

$$m\ddot{\xi}_1 = -k\xi_1 + k(\xi_2 - \xi_1), \qquad (16.6)$$

$$2m\ddot{\xi}_2 = -k\xi_2 - k(\xi_2 - \xi_1). \qquad (16.7)$$

Разделив первое равенство на m, а второе на $2m$, и обозначая отношение $k/m = a$, получаем:

$$\ddot{\xi}_1 = -2a\cdot\xi_1 + a\cdot\xi_2, \qquad (16.6, a)$$

$$\ddot{\xi}_2 = -a\cdot\xi_2 + a\xi_1/2. \qquad (16.7, a)$$

Будем искать нормальные координаты $\xi_{I,II}$ в виде линейной комбинации ξ_1 и ξ_2:

$$\xi_{I,II} = \xi_1 + n\cdot\xi_2, \qquad (16.8)$$

где n – искомые постоянные коэффициенты (разные для разных мод). Умножим (16.7, *a*) на n и сложим почленно (16.6, *a*) и (16.7, *a*):

$$\ddot{\xi}_1 + n\ddot{\xi}_2 = -a(2 - n/2)\xi_1 - a(n-1)\xi_2. \qquad (16.9)$$

Для того чтобы равенство (16.9) было уравнением гармонических колебаний, необходимо, чтобы коэффициент перед ξ_2 был в n раз больше, чем перед ξ_1:

$$a(n-1) = na(2 - n/2), \text{ или иначе } n^2 - 2n - 2 = 0. \qquad (16.10)$$

Из этого уравнения получаем два возможных значения n, соответствующие двум нормальным колебаниям:

$$n_{\rm I} = 1 + \sqrt{3} \qquad \text{и} \qquad n_{\rm II} = 1 - \sqrt{3}\,. \tag{16.11}$$

Поскольку $(\ddot{\xi}_1 + n\ddot{\xi}_2) = -\omega^2(\xi_1 + n\xi_2)$, из уравнения (16.9) следует, что $a(2 - n/2) = \omega^2_{\rm I,II}$ (здесь $\omega_{\rm I,II}$ – собственные частоты соответствующих нормальных колебаний). Используя (16.11), получаем квадраты частот двух мод:

$$\omega_{\rm I}^2 = (3-\sqrt{3})\cdot\frac{k}{2m} \text{ и } \omega_{\rm II}^2 = (3+\sqrt{3})\cdot\frac{k}{2m}\,. \tag{16.12}$$

Нормальные координаты равны при этом:

$$\xi_{\rm I} = \xi_1 + n_{\rm I}\xi_2\,; \qquad \xi_{\rm II} = \xi_1 + n_{\rm II}\xi_2. \tag{16.8,\textit{а}}$$

Если в системе возбуждена только первая мода ($\xi_{\rm II} = 0$), то при этом из (16.8, *а*) и (16.11) следует, что отношение амплитуд колебаний двух осцилляторов $C_{\rm I} = (\xi_1/\xi_2)_{\rm I} = -\,n_{\rm II} = \left(\sqrt{3}-1\right) \cong 0{,}73$. Аналогично, при возбуждении только второй моды $C_{\rm II} = (\xi_1/\xi_2)_{\rm II} = -\,n_{\rm I} = -\left(\sqrt{3}+1\right) \cong -\,2{,}73$. Первой (низкочастотной) моде, как и для симметричной системы (рис. 16.1), соответствует синфазное движение обоих осцилляторов, второй (высокочастотной) – противофазное. Однако амплитуды колебаний двух осцилляторов теперь разные.

При возбуждении в системе только одной моды колебания отдельных осцилляторов происходят по гармоническому закону либо в фазе, либо в противофазе. Поэтому определить частоты нормальных колебаний можно следующим *общим методом*.

Будем искать решения уравнений (16.6, *а*) и (16.7, *а*) в виде:

$$\xi_1 = A\cdot\cos(\omega t), \quad \xi_2 = B\cdot\cos(\omega t), \tag{16.13}$$

где A и B – амплитуды колебаний, ω – искомая частота нормальных колебаний. После подстановки (16.13) в (16.6, *а*) и (16.7, *а*) получаем два уравнения с двумя неизвестными (ω и $C = A/B$):

$$\omega^2 C = 2aC - a, \tag{16.6, \textit{б}}$$

$$\omega^2 = a - aC/2. \tag{16.7, \textit{б}}$$

Решения уравнений (16.6, *б*) и (16.7, *б*) для частот нормальных мод ($\omega_{\rm I}$ и $\omega_{\rm II}$) и отношений амплитуд колебаний отдельных осцилляторов $C_{\rm I}$ и $C_{\rm II}$ совпадают с полученными ранее. Поскольку $C_{\rm I} = -\,n_{\rm II}$, а $C_{\rm II} = -\,n_{\rm I}$, легко найти линейные комбинации координат осцилляторов ξ_1 и ξ_2, соответствующие двум колебательным модам (16.8).

Покажем, что аналогично решаются задачи, в которых требуется найти колебательные характеристики системы связанных электрических контуров. Пусть, например, нужно определить, как изменяются со временем заряды на конденсаторах в системе, состоящей из двух одинаковых *LC*-контуров. Связь между контурами осуществляется через конденсатор C_1 (рис. 16.3).

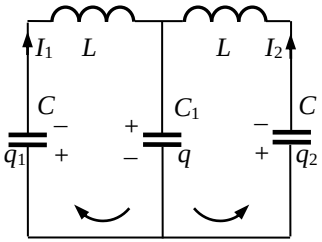


Рис. 16.3

Совершая обходы в указанных направлениях по двум малым контурам и, используя второе правило Кирхгофа, получаем:

$$-L\frac{dI_1}{dt}=\frac{q_1}{C}+\frac{q}{C_1}, \qquad (16.14)$$

$$-L\frac{dI_2}{dt}=\frac{q_2}{C}+\frac{q}{C_1}. \qquad (16.15)$$

Здесь q_1, q_2 и q – заряды на левом, правом и среднем конденсаторах, соответственно; I_1 и I_2 – силы токов через левый и правый конденсаторы. Поскольку $I_1=\frac{dq_1}{dt}\equiv\dot{q}_1$, а $I_2=\frac{dq_2}{dt}\equiv\dot{q}_2$, система уравнений (16.14) и (16.15) преобразуется к виду:

$$\ddot{q}_1 + q_1/(LC) + q/(LC_1) = 0, \qquad (16.14, a)$$

$$\ddot{q}_2 + q_2/(LC) + q/(LC_1) = 0. \qquad (16.15, б)$$

Заменим заряд среднего конденсатора, используя закон сохранения зарядов: $q_1 + q_2 = q$. После этого вычтем, а затем сложим почленно эти уравнения. Мы получим два независимых дифференциальных уравнения, описывающих нормальные колебания:

$$\ddot{q}_{II} + q_{II}/(LC) = 0, \qquad (16.16)$$

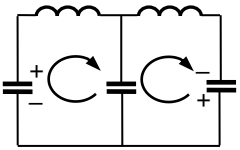
$$\ddot{q}_{I} + q_{I}/(LC) + 2q_{I}/(LC_1) = 0. \qquad (16.17)$$

Уравнения полностью (16.16) и (16.17) аналогичны уравнениям (16.3) и (16.4) соответственно. Здесь *нормальные координаты* $q_I = q_1 - q_2$ и $q_{II} = q_1 + q_2$. Решения уравнений (16.16) и (16.17) представляют собой *нормальные колебания* вида:

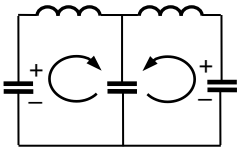
$$q_I(t) = Q_I\cdot\cos(\omega_I t + \varphi_{0I}), \text{ где } \omega_I=\frac{1}{\sqrt{LC}}, \qquad (16.16, a)$$

$$q_{II}(t) = Q_{II}\cdot\cos(\omega_{II}t + \varphi_{0II}),\ \text{где}\ \omega_{II} = \sqrt{\frac{1}{L}\left(\frac{1}{C} + \frac{2}{C_1}\right)}. \qquad (16.17,\ a)$$

Решения (16.16, *а*) и (16.17, *б*) аналогичны (16.3, *а*) и (16.4, *а*). Сугубо техническая разница в последовательности сложения и вычитания в процедуре перехода к нормальным колебаниям обусловлена договорённостью нумеровать моды в порядке возрастания частоты. На рис. 16.4 показаны направления токов в двух контурах в некоторый произвольный момент времени для низкочастотной (*а – синфазной*) и высокочастотной (*б – противофазной*) мод. Из рисунка видно, что для низкочастотной моды средний конденсатор C_1 вообще не перезаряжается, а для высокочастотной – заряжается в два раза больше, чем крайние конденсаторы C.



а)



б)

Рис. 16.4

Разберём ещё несколько задач по рассматриваемой теме

16.1. В начальной момент времени оба тела в системе, представленной на рис. 16.5, отклоняют по оси X на одинаковое расстояние b вправо и отпускают. Найти зависимости от времени отклонений тел от положений равновесия $\xi_1(t)$ и $\xi_2(t)$.

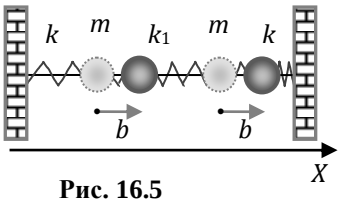


Рис. 16.5

Решение

Воспользуемся результатами решения задачи, рассмотренной в начале данного параграфа (см. (16.3) – (16.4)):

$$\xi_1 = \frac{1}{2}\,[A_I\cdot\cos(\omega_I t + \varphi_{0I}) - A_{II}\cdot\cos(\omega_{II}t + \varphi_{0II})], \qquad (16.18)$$

$$\xi_2 = \frac{1}{2}\,[A_I\cdot\cos(\omega_I t + \varphi_{0I}) + A_{II}\cdot\cos(\omega_{II}t + \varphi_{0II})]. \qquad (16.19)$$

В начальный момент времени:

$$\xi_1(0) = \frac{1}{2}\,(A_I\cdot\cos\varphi_{0I} - A_{II}\cdot\cos\varphi_{0II}) = b, \qquad (16.18,\ a)$$

$$\xi_2(0) = \frac{1}{2}\,(A_{\rm I}\cdot\cos\varphi_{0\rm I} + A_{\rm II}\cdot\cos\varphi_{0\rm II}) = b, \qquad (16.19,\ a)$$

$$\dot{\xi}_1(0) = \frac{1}{2}\,(-\omega_{\rm I}A_{\rm I}\cdot\sin\varphi_{\rm I} + \omega_{\rm II}A_{\rm II}\cdot\sin\varphi_{0\rm II}) = 0, \qquad (16.18,\ б)$$

$$\dot{\xi}_2(0) = \frac{1}{2}\,(-\omega_{\rm I}A_{\rm I}\cdot\sin\varphi_{0\rm I} - \omega_{\rm II}A_{\rm II}\cdot\sin\varphi_{0\rm II}) = 0. \qquad (16.19,\ б)$$

Суммируя (16.18, *б*) и (16.19, *б*), получаем, что $\sin(\varphi_{0\rm I,II}) = 0$, следовательно, $\varphi_{0\rm I,II} = 0$. Из (16.18, *а*) и (16.19, *а*) амплитуды мод равны $A_{\rm I} = 2b$, $A_{\rm II} = 0$. Отсюда следует, что в рассматриваемой ситуации возбуждается только первая низкочастотная (синфазная) мода. Искомые зависимости смещений двух тел от времени выглядят так:

$$\xi_1(t) = \xi_2(t) = b\cdot\cos(\omega_{\rm I}t). \qquad (16.20)$$

Собственная частота нормальных колебаний $\omega_{\rm I}$ была определена нами ранее (см. (16.3, *а*)).

16.2. В начальный момент времени оба тела задачи 16.1 отклоняют на одну и ту же величину b от положения равновесия, но *в разные стороны*. Найдём зависимости $\xi_1(t)$ и $\xi_2(t)$.

Решение

В данном случае начальные условия записываются следующим образом:

$$\xi_1(0) = \frac{1}{2}\,(A_{\rm I}\cos\varphi_{0\rm I} - A_{\rm II}\cos\varphi_{0\rm II}) = b, \qquad (16.18,\ в)$$

$$\xi_2(0) = \frac{1}{2}\,(A_{\rm I}\cos\varphi_{0\rm I} + A_{\rm II}\cos\varphi_{0\rm II}) = -b, \qquad (16.19,\ в)$$

Два других условия аналогичны (16.18, *б*) и (16.19, *б*). Как и в задаче 16.1, из них следует $\varphi_{0\rm I} = \varphi_{0\rm II} = 0$. Суммируя и вычитая (16.18, *в*) и (16.19, *в*), получаем $A_{\rm I} = 0$, $A_{\rm II} = -2b$; таким образом, в системе возбуждается только высокочастотная мода (частота – см. (16.3, *б*)):

$$\xi_1(t) = b\cdot\cos(\omega_{\rm II}t), \qquad \xi_2(t) = -b\cdot\cos(\omega_{\rm II}t). \qquad (16.21)$$

16.3. В системе, состоящей, из двух связанных механических осцилляторов (см. задачу 16.1) в начальный момент времени тело 1 смещают по оси X на $2b$ (тело 2 при этом закреплено в равновесном положении). Найти зависимости смещения каждого из тел от времени $\xi_1(t)$ и $\xi_2(t)$ после того, как их отпускают.

Решение

Используем вид решений задачи (16.3) – (16.4) и начальные условия (16.18, *б*) – (16.19, *б*), вместо условий (16.18, *а*) и (16.19, *а*), запишем:

$$\xi_1(0) = \frac{1}{2}\,(A_{\rm I}\cos\varphi_{0\rm I} - A_{\rm II}\cos\varphi_{0\rm II}) = 2b, \qquad (16.18,\ \partial)$$

$$\xi_2(0) = \frac{1}{2}\,(A_{\rm I}\cos\varphi_{0\rm I} + A_{\rm II}\cos\varphi_{0\rm II}) = 0. \qquad (16.19,\ \partial)$$

Как и в задаче 16.1, из (16.18, *б*) – (16.19, *б*) следует, что $\varphi_{0\rm I} = \varphi_{0\rm II} = 0$. Складывая и вычитая левые и правые части равенств (16.18, *д*) и (16.19, *д*), получим: $A_{\rm I} = 2b$ и $A_{\rm II} = -2b$. В искомом решении представлены в равной степени оба типа нормальных колебаний:

$$\xi_1(t) = b\cdot\cos(\omega_{\rm I}t) + b\cdot\cos(\omega_{\rm II}t), \qquad (16.22)$$

$$\xi_2(t) = b\cdot\cos(\omega_{\rm I}t) - b\cdot\cos(\omega_{\rm II}t). \qquad (16.23)$$

16.4. В системе, состоящей из двух связанных индуктивно одинаковых контуров 1 и 2 (L_1 – коэффициент взаимной индукции) в исходном состоянии ключ K разомкнут; левый конденсатор несёт заряд $2q_0$, правый – не заряжен. Найти зависимости зарядов на конденсаторах от времени после замыкания ключа K.

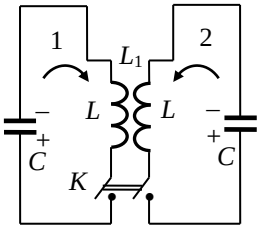


Рис. 16.6

Решение

Как и при решении задачи о контурах с ёмкостной связью, используем второе правило Кирхгофа

$$-L\frac{dI_1}{dt} - L_1\frac{dI_2}{dt} = \frac{q_1}{C}, \qquad (16.14)$$

$$-L\frac{dI_2}{dt} - L_1\frac{dI_1}{dt} = \frac{q_2}{C}. \qquad (16.15)$$

Здесь q_1, q_2 – заряды на левом и правом конденсаторах; I_1 и I_2 – силы токов в контурах 1 и 2. Далее задача решается аналогично предыдущей с той разницей, что величины ξ_1, ξ_2 и b заменяются на q_1, q_2 и q_0. Соответственно, решение имеет вид:

$$q_1(t) = q_0\cos(\omega_{\rm I}t) - q_0\cos(\omega_{\rm II}t), \qquad (16.24)$$

$$q_2(t) = q_0\cos(\omega_{\rm I}t) + q_0\cos(\omega_{\rm II}t). \qquad (16.25)$$

Частоты нормальных колебаний определяются соотношениями:

$$\omega_{\text{I}} = \frac{1}{\sqrt{(L+L_1)C}} = \frac{1}{\sqrt{LC(1+k)}} = \frac{\omega_0}{\sqrt{1+k}}, \qquad (16.26)$$

$$\omega_{\text{II}} = \frac{1}{\sqrt{(L-L_1)C}} = \frac{1}{\sqrt{LC(1-k)}} = \frac{\omega_0}{\sqrt{1-k}}, \qquad (16.27)$$

где $k = L_1/L$ – коэффициент связи между контурами.

16.5. Изобразить графически зависимости зарядов от времени $q_1(t)$ и $q_2(t)$ для задачи 16.4, если $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} = 2\pi$ *рад/с*, а коэффициент связи между контурами $k = 0{,}1$.

Решение

Зависимости $q_1(t)$ и $q_2(t)$ имеют вид (16.24, 16.25), где частоты мод равны $\omega_{\text{I}} = \frac{\omega_0}{\sqrt{1+k}}$, $\omega_{\text{II}} = \frac{\omega_0}{\sqrt{1-k}}$. Подставляя числа, получим $\omega_{\text{I}} = 0{,}95\omega_0$, $\omega_{\text{II}} = 1{,}05\omega_0$. Представим (16.24) в виде:

$$q_1(t) = 2q_0 \cdot \cos\left(\frac{\omega_{\text{II}} - \omega_{\text{I}}}{2}t\right) \cdot \cos\left(\frac{\omega_{\text{II}} + \omega_{\text{I}}}{2}t\right), \qquad (16.28)$$

$$q_2(t) = 2q_0 \cdot \sin\left(\frac{\omega_{\text{II}} - \omega_{\text{I}}}{2}t\right) \cdot \sin\left(\frac{\omega_{\text{II}} + \omega_{\text{I}}}{2}t\right). \qquad (16.29)$$

Видно (см. рис. 16.7), что эти зависимости представляют собой так называемые биения – колебания частотой ω_0 с медленно ме-

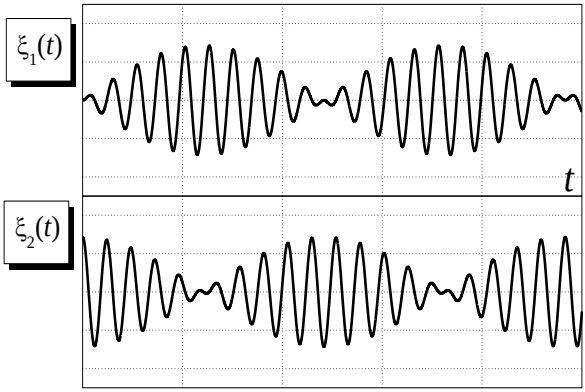


Рис. 16.7

няющейся амплитудой (частота биений $\omega_б = \frac{\omega_{II} - \omega_I}{2}$). Обратим внимание, что энергия постоянно как бы перетекает от одного контура к другому (но ***обмена энергий между модами нет***!).

16.6. Найти *общим методом* (см. стр. 160) собственную частоту колебаний двухатомной молекулы (массы атомов m_1 и m_2, коэффициент упругой связи k).

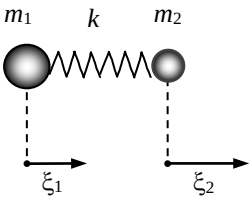


Рис. 16.8

Решение

Уравнения динамики для каждого атома выглядят так:

$$m_1 \ddot{\xi}_1 = k(\xi_2 - \xi_1), \qquad (16.30)$$

$$m_2 \ddot{\xi}_2 = -k(\xi_2 - \xi_1). \qquad (16.31)$$

Решение этой системы будем искать в виде:

$$\xi_1 = A\cdot\cos(\omega t), \quad \xi_2 = B\cdot\cos(\omega t).$$

Подставляя эти функции в исходные равенства, приходим к системе уравнений:

$$-m_1\omega^2 A = -k\cdot(B - A), \qquad (16.32)$$

$$-m_2\omega^2 B = k\cdot(B - A), \qquad (16.33)$$

Из сравнения (16.32) и (16.33) легко видеть, что $m_1\omega^2 A = -m_2\omega^2 B$ или $B = -A\cdot m_1/m_2$. После подстановки B в любое из равенств легко найти собственную частоту:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{\mu}}, \qquad \text{где } \mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}. \qquad (16.34)$$

Задачи для самостоятельного решения

16.7. Система состоит из двух одинаковых осцилляторов, связанных между собой пружинкой (см. рис. 16.1). Как нужно вывести эту систему из равновесия, чтобы колебания обоих тел после прекращения воздействия были гармоническими?

16.8. Система состоит из двух одинаковых осцилляторов, связанных между собой пружинкой (см. рис. 16.1). Параметры m, k и k_1 известны. В начальный момент времени левое тело толкают по оси X вправо со скоростью υ_0. Определите законы изменения координат каждого из тел после этого.

16.9. Для системы, описанной в предыдущей задаче, определите энергию, запасённую в каждой моде колебаний.

16.10. В системе, состоящей, из двух связанных механических осцилляторов (см. задачу 16.1) в начальный момент времени тело 1 смещают по оси X на $2b$ вправо (тело 2 при этом закреплено в равновесном положении). Изобразите зависимости от времени смещений обоих тел, если частоты двух нормальных колебаний этой системы отличаются на 10% ($\omega_{II} = 1{,}1\cdot\omega_I$).

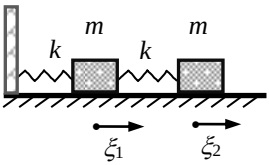
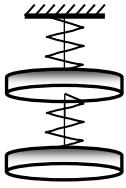


Рис. 16.9

16.11. Определите частоты нормальных колебаний и нормальные координаты для системы, показанной на рис. 16.9. Массы обоих тел равны m, а коэффициенты жёсткости обеих пружинок – k.


Рис. 16.10

16.12. Система состоит из двух одинаковых дисков, связанных пружинами (см. рис. 16.10). Модуль кручения*) пружин одинаков и равен D. Определите частоты нормальных колебаний этой системы, если момент инерции каждого диска равен J.

16.13. Два одинаковых математических маятника длиной l связаны пружиной с коэффициентом жёсткости k (см. рис. 16.11). Найдите частоты нормальных колебаний этой системы.

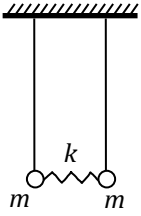


Рис. 16.11

16.14. На рис. 16.12 показана система, состоящая из двух одинаковых механических осцилляторов (величины M и k известны), связь между которыми включает блок с грузом массой m**). Блоки, нити и пружины считать невесомыми, а нити – нерастяжимыми. Найдите частоты нормальных колебаний этой системы.

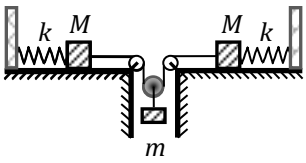


Рис. 16.12

*) См. примечание §15 на стр. 154.

**) Аналог индуктивной связи в задаче 16.4.

16.15. Два одинаковых колебательных контура связаны между собой индуктивно (L, C и L_1 известны). Найдите частоты нормальных колебаний этой системы.

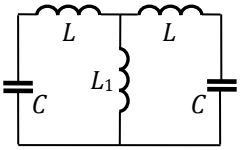


Рис. 16.13

16.16*. Связь между двумя колебательными контурами с разными электроёмкостями (рис. 16.14) конденсаторов и одинаковыми индуктивностями катушек (L) осуществляется через взаимную индукцию ($L_1 = L/2$). Найдите частоты нормальных колебаний этой системы и нормальные координаты q_{I} и q_{II}.

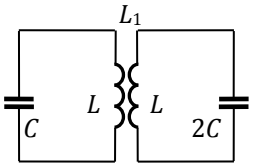


Рис. 16.14

16.17*. Параллельно конденсатору колебательного контура (L, C) подключают конденсатор другого (L_1, C_1). Сколько колебательных мод будет у этой системы? Найдите частоты её нормальных колебаний.

16.18. В схеме, представленной на рис. 16.15 левый конденсатор сначала заряжают до разности потенциалов u_0, затем замыкают сдвоенный ключ. Определите, как будут меняться со временем заряды на двух крайних конденсаторах.

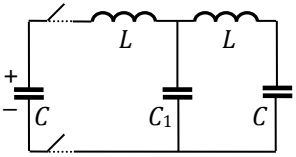


Рис. 16.15

16.19. Для системы, описанной в предыдущей задаче, найдите энергию, запасенную в каждой нормальной моде колебаний.

16.20*. В системе связанных колебательных контуров с разными индуктивностями катушек (L и $2L$) все конденсаторы имеют одинаковую электроёмкость C. Определите частоты нормальных колебаний.

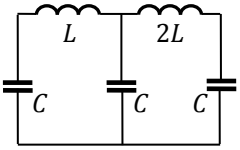


Рис. 16.16

16.21*. Известно, что частота собственных колебаний молекулы HF^{19} $\omega_0 \cong 7{,}8\cdot10^{14}$ *рад/с*. Определите частоту собственных колебаний молекулы HI^{127} (йодистый водород), если известно, что величины второй производной от поте-

нциальной энергии взаимодействия атомов в молекуле по координате вблизи минимумов отличаются для этих молекул в $n \cong 3$ *раза*. Для какой молекулы величина второй производной больше и почему?

16.22*. Оцените, во сколько раз (n) отличаются значения d^2U/dx^2 вблизи минимумов потенциальной энергии для молекул HCl^{35} и $Na^{23}Cl^{35}$, если собственные частоты колебаний этих молекул: $\omega_0(HCl) \cong 5{,}65\cdot10^{14}$ *рад/с*, а $\omega_0(NaCl) \cong 7{,}5\cdot10^{13}$ *рад/с*. Объясните причину столь большой разницы.

16.23. Определите количество мод для линейной молекулы N_2O. Назовите типы нормальных колебаний этой молекулы.

16.24*. Определите количество нормальных колебаний молекулы аммиака NH_3. Изобразите возможные типы валентных и деформационных колебаний этой молекулы.

16.25*. Найдите отношение частот синфазных и противофазных валентных колебаний линейной молекулы CO_2.

§17. *Затухающие колебания*

У реального осциллятора всегда есть потери колебательной энергии. Поэтому свободные колебания будут затухающими (а значит, не гармоническими). В этом случае в уравнение колебаний в механических системах (2-й закон Ньютона) следует добавить силу вязкого трения ($r\dot{x}$), а в уравнение колебаний в электрическом контуре (2-ое правило Кирхгофа) – падение потенциала на сопротивлении ($RI = R\dot{q}$). В результате мы приходим к дифференциальному уравнению вида:

$$\ddot{\xi} + 2\beta\cdot\dot{\xi} + \omega_0^2\xi = 0\,, \qquad (17.1)$$

где β – новая константа, называемая *коэффициентом затухания*. Например, $\beta = r/m$ в случае колебаний грузика массой m на пружине, а ω_0 по-прежнему имеет смысл собственной частоты незатухающих колебаний $\omega_0 = \sqrt{k/m}$. Для электрических колебаний в LC–контуре коэффициент затухания равен $\beta = R/L$.

Вид решения уравнения (17.1) как раз и зависит от *соотношения* констант ω_0 и β, а их значения определяются параметрами *конкретной колебательной системы*.

1) Для случая $\beta < \omega_0$ (**малое затухание**) его решением является функция:

$$\xi(t) = A_0 \cdot e^{-\beta t} \cdot \cos(\omega_c t + \varphi_0), \qquad (17.2)$$

где $\omega_c = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$ – частота затухающих колебаний. Как видим, колебания осциллятора напоминают гармонические, но с постепенно убывающей по экспоненциальному закону амплитудой. Для описания этого убывания принято использовать целый ряд величин.

а) ***Время релаксации амплитуды*** τ_A – время уменьшения амплитуды колебаний в *e* раз.

$$\frac{A_0}{A_0 e^{-\beta \tau_A}} = e, \qquad \text{откуда } \tau_A = 1/\beta. \qquad (17.3)$$

б) Число колебаний N_e, за которое амплитуда уменьшится в *e* раз:

$$N_e = \frac{\tau_A}{T} = \frac{1}{\beta T}. \qquad (17.4)$$

в) ***Логарифмический декремент затухания*** γ – логарифм отношения амплитуд двух последовательных колебаний:

$$\gamma = \ln \frac{A(t)}{A(t+T)} = \beta T = \frac{1}{N_e}. \qquad (17.5)$$

г) ***Добротность колебательной системы Q***:

$$Q = \pi \cdot N_e = \frac{\pi}{\gamma} = \frac{\pi}{\beta T}. \qquad (17.6)$$

Можно показать, что при $\beta T << 1$ добротность равна

$$Q = 2\pi \cdot \frac{W(t)}{\Delta W_T}, \qquad (17.7)$$

где – $W(t)$ энергия осциллятора в данный момент времени, ΔW_T – потери энергии за период колебаний.

2) **Большое затухание** реализуется при $\beta > \omega_0$. Решение уравнения (17.1) имеет в этом случае вид:

$$\xi(t) = A \cdot e^{-t/\tau_1} + B \cdot e^{-t/\tau_2}, \qquad (17.8)$$

где $\tau_1 = \dfrac{1}{\beta - \beta_1}$, $\tau_2 = \dfrac{1}{\beta + \beta_1}$, $\beta_1 = \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}$, A и B – константы, зависящие от начальных условий. Графически эта функция представлена на рис. 17.1 для случая $\xi(0) = 0$.

Очевидно, такой процесс уже не является периодическим.

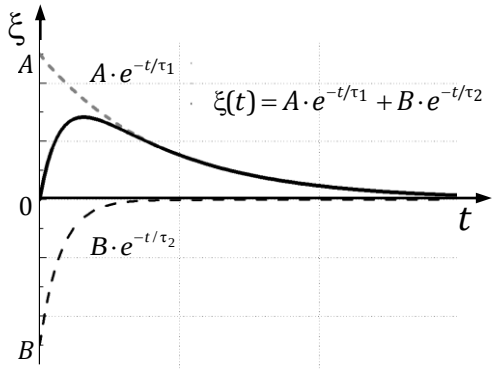


Рис. 17.1

3) Наконец, случай $\beta = \omega_0$ соответствует "**критическому режиму осциллятора**", при котором возвращение осциллятора к равновесию (релаксация) происходит по закону:

$$\xi(t) = (A + B \cdot t) \cdot e^{-\beta t}. \qquad (17.9)$$

Рассмотрим далее несколько задач, в которых реализуются разные случаи затухания свободных колебаний.

17.1. В устройстве, рассмотренном в задаче 15.2, груз движется в среде с коэффициентом сопротивления*) r = 2 *кг/с*. Масса блока M = 8 *кг*. Жёсткость пружины k = 1000 Н/*м*. Масса груза m = 6 *кг*. Запишите закон движения груза при его малых колебаниях по вертикали. Выталкивающей силой пренебречь.

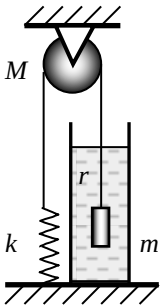


Рис. 17.2

*) коэффициент пропорциональности между силой вязкого трения, действующей на тело, и его скоростью.

Решение

Уравнения, описывающие движение системы, отличаются от уравнений, использовавшихся при решении задачи 15.2, лишь добавлением силы сопротивления среды – вязкого трения в правой части записи 2-го закона Ньютона для груза:

$m\ddot{x} = mg - T_1 - r \cdot \dot{x}$.

Использование остальных уравнений системы (см. решение задачи 15.2) позволяет привести это уравнение к виду (17.1) с константами

$$\beta = \frac{r}{2m+M} = 0{,}1\ c^{-1} \text{ и } \omega_0 = \sqrt{\frac{2k}{2m+M}} = 10\ рад/с\ .$$

В нашем случае $\beta << \omega_0$ и $\omega_c \approx \omega_0 = \sqrt{\frac{2k}{2m+M}} = 10\ рад/с$. Итак, колебания груза происходят по закону:

$$x(t) = \frac{mg}{k} + A \cdot e^{-\beta t} \cdot \cos(\omega_0 t + \varphi_0) = \left[0{,}06 + A \cdot e^{-0{,}1t} \cdot \cos(10t + \varphi_0)\right]\ м.$$

Амплитуда и начальная фаза колебаний, как обычно, определяются начальными условиями.

17.2. В условиях предыдущей задачи определить параметры затухающих колебаний в системе: *а*) время релаксации амплитуды (τ_A); *б*) число колебаний, за которое амплитуда уменьшится в *e* раз (N_e); *в*) логарифмический декремент затухания γ; *г*) добротность Q.

Решение

а) ***Время релаксации амплитуды*** τ_A:

$\tau_A = 1/\beta = 10\ c$.

б) $N_e = \frac{\tau_A}{T} = \frac{1}{\beta T}$, $\quad T = \frac{2\pi}{\omega_0} \approx 0{,}6\ c$, $\quad N_e = \frac{1}{2\pi\beta}\sqrt{\frac{2m+M}{2k}} \approx 16$.

в) ***Логарифмический декремент затухания***:

$$\gamma = \ln\frac{A(t)}{A(t+T)} = \beta T = \frac{1}{N_e} = 0{,}06\ .$$

г) ***Добротность***: $\quad Q = \pi N_e = \frac{\pi}{\gamma} = \frac{\pi}{\beta T} \approx 52$.

17.3. Сколько колебаний совершит груз в устройстве, рассмотренном в задачах 17.1 и 17.2 за то время, пока амплитуда уменьшится в $n = 23$ *раза*.

Решение

Запишем отношение амплитуд в начале колебаний и в момент времени τ_n, когда амплитуда уменьшится в n раз:

$$\frac{A_0}{A_0 e^{-\beta\tau_n}} = n\,.$$

Отсюда $\tau_n = \frac{1}{\beta}\cdot\ln(n)$.

Число колебаний до этого момента

$$N_n = \frac{\tau_n}{T} = \frac{1}{\beta T}\ln(n) = \frac{\ln(n)}{\gamma} = \frac{\ln(n)}{\pi}\cdot Q\,.\quad N_{23} = \frac{\ln 23}{\pi}\cdot Q \approx Q \approx 52\,.$$

Таким образом, оказалось, что *добротность равна числу колебаний осциллятора, за которое амплитуда уменьшается в* 23 *раза*.

17.4. Для колебательной системы, рассмотренной в предыдущих задачах (17.1–17.3), определите относительное отличие (уменьшение) собственной частоты затухающих колебаний ω_c по сравнению с частотой колебаний незатухающих ω_0.

Решение

Относительное уменьшение частоты свободных затухающих колебаний по сравнению с незатухающими можно рассчитать так:

$$\frac{\omega_0 - \omega_c}{\omega_0} = 1 - \frac{\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}}{\omega_0} = 1 - \sqrt{1 - \left(\frac{\beta}{\omega_0}\right)^2} =$$

$$= 1 - \sqrt{1 - \left(\frac{\beta}{\omega_0}\right)^2} = 1 - \sqrt{1 - \left(\frac{\beta T}{2\pi}\right)^2} = 1 - \sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}\,.$$

Воспользуемся далее формулой для приближенного вычисления корня $\sqrt{1+\delta} \approx 1 + \frac{1}{2}\delta$, справедливой для случая $\delta << 1$:

$$\frac{\omega_0 - \omega_c}{\omega_0} \approx 1 - \left(1 - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4Q^2}\right) = \frac{1}{8Q^2} \approx 5\cdot 10^{-5}\ \text{(т.е. 0,005 %)}.$$

17.5. При каком значении коэффициента вязкости r в устройстве, рассмотренном в задачах 17.1–17.3, реализуется ***критический режим*** колебаний. Определите зависимость смещения от времени в критическом режиме, если в начальный момент времени тело в положении равновесия толкают вниз со скоростью $\upsilon_0 = 1$ *м/с*.

Решение

Критический режим колебаний реализуется при $\beta = \omega_0 = 10\ c^{-1}$. Для рассматриваемой колебательной системы:

$$r = \beta \cdot (2m + M) = \omega_0 \cdot (2m + M) = 200\ кг/с.$$

Общее решение для критического режима, как мы знаем, может быть записано в виде:

$$\xi(t) = (A + B \cdot t) \cdot e^{-\beta t}.$$

Начальные условия выглядят так: $\xi(0) = 0$, $\dot{\xi}(0) = \upsilon_0$. Отсюда определяем коэффициенты:

$$A = 0, \qquad \upsilon_0 = -\beta A + B, \quad \Rightarrow \qquad B = \upsilon_0.$$

Окончательно получаем зависимость смещения груза от времени: $\xi(t) = \upsilon_0 \cdot t \cdot e^{-\beta t}$.

17.6. В условиях предыдущей задачи (17.5) найдите максимальное отклонение груза от положения равновесия. Докажите, что оно пропорционально начальной скорости грузика.

Решение

Анализируя функцию $\xi(t) = \upsilon_0 \cdot t \cdot e^{-\beta t}$ на экстремум, легко показать, что в критическом режиме система достигает максимального отклонения от положения равновесия за время $t_{max} = \dfrac{1}{\beta} = 0{,}1\,c.$ В этот момент отклонение оказывается *пропорциональным начальной скорости* толчка[*]:

$$\xi_{max} = \upsilon_0 \cdot \frac{1}{\beta e}.$$

[*] Такой режим реализуется обычно в «баллистических приборах» (например, в «баллистических гальванометрах»).

На рис. 17.3 приведена зависимость отклонения грузика от положения равновесия в критическом режиме для случаев, рассмотренных в задачах 17.5 и 17.6.

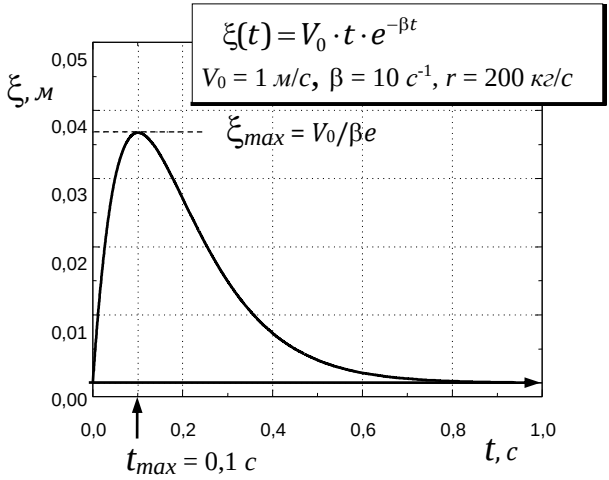


Рис. 17.3

В представленных выше задачах (17.1–17.6) затухание колебаний обусловлено наличием *вязкого трения*. Колебания в системе с "***сухим трением***" рассмотрим на примере следующей задачи.

17.7. На горизонтальном столе лежит брусок массы m = 0,5 *кг*, прикреплённый горизонтальной пружиной к стене. Коэффициент трения скольжения бруска о поверхность стола равен μ = 0,1. Брусок сместили по оси X так, что пружина растянулась на x_0 = 6,3 *см*, и затем отпустили. Коэффициент жёсткости пружинки k = 100 *Н/м*, а её масса пренебрежимо мала. Найдите закон движения $x(t)$ и постройте график этой зависимости (*а*); найдите также число колебаний, которое совершит брусок до остановки (*б*).

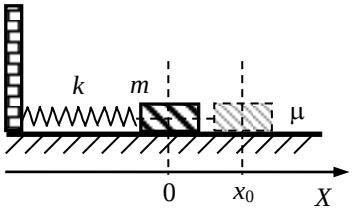


Рис. 17.4

Решение

Главное отличие этой задачи от предыдущих состоит в том,

что в рассматриваемом случае нельзя написать единое уравнение, описывающее движение бруска *в любой момент времени.* Ведь сила сухого трения, оставаясь постоянной по модулю, меняет направление при изменении направления движения и при этом не зависит от скорости. Это приводит к тому, что для движения бруска вправо и влево придётся записывать и решать разные дифференциальные уравнения. Пусть $x = 0$ соответствует положению тела при недеформированной пружине.

1. При движении бруска из начального положения ***влево*** ($\dot{x} < 0$) можно записать уравнение:

$$m\ddot{x} = -kx + \mu \cdot mg\,.$$

Откуда $$\ddot{x} + \frac{k}{m}\left(x - \frac{\mu mg}{k}\right) = 0\,.$$

Обозначим $\frac{\mu mg}{k} = \xi_0$ и, после стандартной замены переменной $\xi = x - \xi_0$, получим уравнение *гармонического осциллятора* (15.1). Решение *для этого этапа движения* (обозначим его $x^{(1)}$) имеет вид:

$$x^{(1)}(t) = \xi_0 + A_1 \cdot \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}} \cdot t\right),$$

где $A_1 = x_0 - \xi_0$ (с учётом начальных условий). Подстановка численных данных задачи даёт:

$$\xi_0 = 0{,}5\ см, \quad A_1 = 5{,}8\ см, \qquad \sqrt{\frac{k}{m}} = 10 \cdot \sqrt{2} \approx 14{,}1\ \ рад/с.$$

Отметим, кроме того, что к концу этого этапа (в момент остановки тела перед началом обратного движения) координата тела окажется равной:

$$x^{(1)}(T/2) = x_1 = \xi_0 - A_1 = -x_0 + 2\xi_0 = -5{,}3\ см.$$

Эта координата будет *начальной* для следующего этапа движения. Как можно заметить, максимальное отклонение бруска от начала координат уменьшилось на $2\xi_0$.

2. При последующем движении бруска от положения с координатой x_1 ***вправо*** ($\dot{x} > 0$) направление силы трения (и, соответственно, знак слагаемого $\mu \cdot mg$) изменятся:

$$m\ddot{x} = -kx - \mu \cdot mg\,.$$

Совершенно аналогично приходим к решению *для второго*

этапа движения (обозначим его $x^{(2)}$):

$$x^{(2)}(t) = -\xi_0 + A_2 \cdot \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}} \cdot t\right).$$

Отметим, что отсчёт времени в этой записи закона движения следует начинать *от начала данного этапа*. При этом $A_2 = x_1 + \xi_0 = -4{,}8$ *см*. Частота колебаний, конечно, прежняя.

К концу второго этапа движения координата тела окажется равной:

$$x^{(2)}(T/2) = x_2 = -\xi_0 + A_2 = x_0 - 4\xi_0 = 4{,}3 \text{ см}.$$

Эта координата по истечению одного цикла колебаний уже на $4\xi_0$ меньше исходной. Понятно, что и в дальнейшем будет происходить подобное *затухание* колебаний. Закон уменьшения амплитуды колебаний, однако, иной, чем в случае вязкого трения, а само полное решение представляет собой как бы сшитые «куски» гармонических функций с одинаковым периодом, но уменьшающейся со временем *по линейному закону* амплитудой. Кроме того, каждый из «кусков» сдвинут вверх или вниз относительно оси времени на одинаковую величину ξ_0. Вид этого решения для рассматриваемой задачи представлен на рисунке 17.5.

Ещё одной важной особенностью этой задачи является прекращение колебаний после того, как максимальное отклонение тела от положения равновесия $x^{(n)}$ окажется по модулю меньше ξ_0

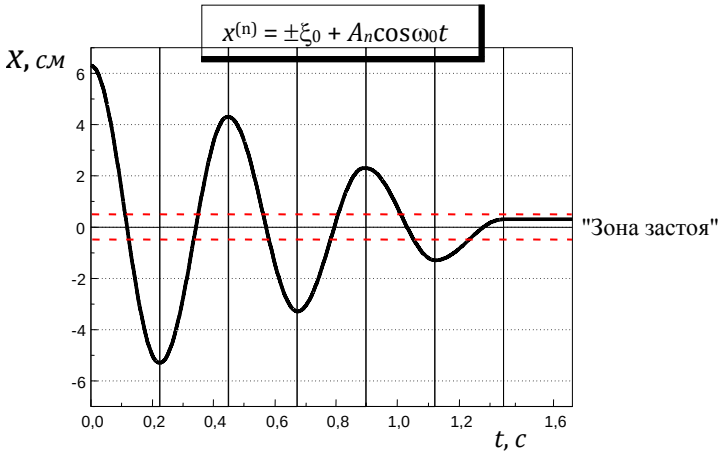


Рис. 17.5

(при этом сила упругости не сможет «перебороть» силу трения покоя и брусок «застрянет»). На рисунке эта область помечена пунктирными линиями и названа *зоной застоя*. В условиях нашей задачи это произойдет на шестом этапе движения, т.е. по завершению его 3-го цикла.

Задачи для самостоятельного решения

17.8*. В колебательной системе, описанной в задаче 17.7, использована пружина и брусок, про которые известно, что если брусок подвесить на этой пружине, то она растянется на $a = 5$ *см*. Определите, какая часть первоначальной энергии пружины перейдет в тепло при таком же, как и в задаче 17.5, способе возбуждения колебаний в системе ($x_0 = 6{,}3$ *см*, $\upsilon_0 = 0$).

17.9*. В колебательной системе, представленной на рис. 17.6, использованы две **одинаковые** пружины и груз, про которые известно, что если брусок подвесить на одной из этих пружин, то она растянется на $a = 10$ *см*. Коэффициент трения скольжения бруска о поверхность стола равен $\mu = 0{,}1$. Первоначально брусок отводят влево на $x_0 = 5{,}3$ *см* и отпускают без толчка. Массы пружинок и трение пренебрежимо малы. В положении равновесия ($x = 0$) пружинки не деформированы. Определите координату груза после его остановки.

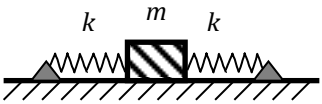


Рис. 17.6

17.10. В процессе свободных затухающих колебаний пружинного маятника, рассмотренного в задаче 17.1, оказалось, что за время $\tau_1 = 12$ *с* амплитуда колебаний груза уменьшается в $n_1 = 10$ *раз*. За какое время τ_2 амплитуда уменьшится в $n_2 = 1000$ *раз*?

17.11. Определите зависимость смещения тела m от времени для пружинного маятника в вязкой среде, рассмотренного в задаче 17.1, если коэффициент вязкости среды увеличен до значения $r = 400$ *кг/с*. Начальная скорость тела $\upsilon(0) = \upsilon_0 = 1$ *м/с*.

17.12. В процессе свободных слабо затухающих колебаний пружинного маятника в вязкой среде за время $\tau = 22$ *с* амплитуда колебаний уменьшается в $\eta = 3$ *раза*. *а*) Найдите коэффициент затухания колебаний β. *б*) За какое время τ_A амплитуда колеба-

ний уменьшается в *e* раз?

17.13. За время, в течение которого система совершает $N = 100$ колебаний, их амплитуда уменьшается в $\eta = 9$ *раз*. Определите добротность такой колебательной системы Q.

17.14. Амплитуда затухающих электромагнитных колебаний в колебательном контуре уменьшается в *e* раз за $\tau = 10$ *мс*. Частота этих колебаний равна $\nu_c = 10^2$ *Гц*. Определите собственную частоту в данном контуре ν_0 в отсутствии затухания.

17.15. Определите добротность Q электрического колебательного контура, состоящего из конденсатора с электроёмкостью $C = 0{,}1$ *мкФ*, катушки индуктивности $L = 10$ *мГн* и резистора с сопротивлением $R = 20$ *Ом*.

17.16. В условиях предыдущей задачи определите, какую относительную погрешность вы сделаете, вычислив добротность по приближенной формуле $Q_1 = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}$?

17.17. Добротность электрического колебательного контура равна $Q = 144$, а его собственная частота колебаний $\nu_0 = 2$ *кГц*. В контуре возбуждают свободные колебания. Определите:

а) Как меняется со временем колебательная энергия, запасённая в контуре $W = W(t)$. *б*) Какая часть η первоначальной энергии W_0 сохранится в контуре по истечении времени $\tau = 8$ *мс*?

17.18. Найдите период малых колебаний однородного диска радиуса $R = 27$ *см*, который может вращаться вокруг горизонтальной оси, перпендикулярной к его плоскости и проходящей через край диска. Логарифмический декремент затухания равен $\gamma = 1$.

17.19. Через время $\tau_1 = 40$ *с* после начала колебаний маятника амплитуда уменьшилась до $A_1 = 1$ *см.* Через какое время τ_2 амплитуда будет равна $A_2 = 0{,}1$ *см*, если начальная амплитуда колебаний этого маятника $A_0 = 10$ *см.*

17.20*. После подключения к электрической схеме измерительного прибора три последовательных крайних положения его ка-

чающейся стрелки оказались против делений $x_{1,2,3}$ = 30, 20 и 24. Считая декремент затухания постоянным, определите положение равновесия x_0 стрелки.

17.21. Музыкальный камертон имеет собственную частоту колебаний ν_c = 1000 *Гц*. Через какое время громкость его звучания уменьшится в $n = 10^6$ *раз*, если логарифмический декремент затухания равен γ = 0,0006?

17.22. Электрический колебательный контур состоит из последовательно соединённых конденсатора электроёмкости C, катушки индуктивности L, ключа и резистора с сопротивлением R, равным критическому для данного контура. При разомкнутом ключе конденсатор зарядили до напряжения u_0, после чего ключ замкнули. Найдите, как зависит сила тока I в контуре от времени t. Какова максимальная величина силы тока I_{max} и, в какой момент времени t_m она будет достигнута?

17.23. Найдите закон изменения заряда конденсатора $q(t)$ в схеме, показанной на рис. 17.7. Его первоначальный заряд был равен q_m. Параметры элементов L, C и R считайте известными. При каком значении сопротивления R этот процесс будет апериодическим?

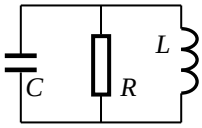


Рис. 17.7

§18. *Вынужденные колебания*

Наибольший практический интерес представляют вынужденные колебания при внешнем ***гармоническом воздействии.*** Например, в случае механической колебательной системы, когда внешняя сила (или момент сил) меняется по закону $F(t) = F_0 \cdot \cos(\Omega t)$. В этом случае в уравнении, описывающем колебательный процесс, в правой части появляется соответствующая гармоническая функция:

$$\ddot{\xi} + 2\beta \cdot \dot{\xi} + \omega_0^2 \cdot \xi = f_0 \cdot \cos(\Omega t). \qquad (18.1)$$

Здесь $f_0 = F_0/m$, а его ***частное*** решение имеет вид:

$$\xi(t) = \mathcal{A}\cos(\Omega t - \alpha). \qquad (18.2)$$

Такое колебательное движение будет происходить в системе по истечении *времени установления* вынужденных колебаний $\tau >> 1/\beta$, когда собственные колебания затухнут. Обратим внимание на то, что ***установившиеся*** вынужденные колебания происходят ***на частоте вынуждающего воздействия*** Ω и

имеют по отношению к нему ***фазовое запаздывание*** α. Амплитуда $\mathcal{A}$ и α зависят от соотношения частот вынуждающего воздействия Ω и собственных колебаний ω_0. Найдём выражения для функций $\dot{\xi}(t)$ и $\ddot{\xi}(t)$:

$$\dot{\xi}(t) = -\Omega\cdot\mathcal{A}\sin(\Omega t-\alpha) = \Omega\cdot\mathcal{A}\cos(\Omega t-\alpha+\pi/2). \qquad (18.3)$$

$$\ddot{\xi}(t) = -\Omega^2\cdot\mathcal{A}\cos(\Omega t-\alpha) = \Omega^2\cdot\mathcal{A}\cos(\Omega t-\alpha+\pi). \qquad (18.4)$$

Как видим, скорость и ускорение опережают по фазе смещение $\xi(t)$ на $\pi/2$ и π соответственно.

Весьма наглядным способом нахождения амплитуды и фазы вынужденных колебаний является построение векторной диаграммы колебаний. Каждой гармонической функции можно сопоставить вектор на плоскости, длина которого равна амплитуде колебания, а полярный угол – его фазе. Для гармонических колебаний этот вектор*) вращается относительно начала координат (точки O) против часовой стрелки с постоянной угловой скоростью Ω, равной частоте колебаний.

Для определения амплитуды вынужденных колебаний $\mathcal{A}$ и фазового сдвига α достаточно провести сложение векторов, соответствующих гармоническим функциям в левой части уравнения (18.1). Результат, в свою очередь, соответствует функции $F(t)/m$. Направим вектор $\omega_0^2\cdot\xi(t)$ по горизонтали вправо. На рисунке 18.1 представлены также векторы для функций $2\beta\cdot\dot{\xi}(t)$ и $\ddot{\xi}(t)$. Как следует из (18.3) и (18.4), они опережают по фазе $\xi(t)$ на $\pi/2$ и π соответственно. Из рис. 18.1 следует, что

$$\mathcal{A}(\Omega) = \frac{f_0}{\sqrt{\left(\omega_0^2-\Omega^2\right)^2+4\beta^2\Omega^2}}\ ; \qquad (18.5)$$

$$\mathrm{tg}\alpha = \frac{2\beta\Omega}{\omega_0^2-\Omega^2}\ . \qquad (18.6)$$

Представленные результаты определяют зависимости амплитуды и фазы вынужденных колебаний от частоты вынуждающего воздействия. Частотная зависимость амплитуды ***немонотонна*** – она имеет максимум при частоте, называемой ***резонансной***:

$$\Omega_{рез} = \sqrt{\omega_0^2-2\beta^2} = \sqrt{\omega_c^2-\beta^2}\ . \qquad (18.7)$$

*) Будем называть такие векторы «векторами-колебаний» и обозначать выделенным шрифтом.

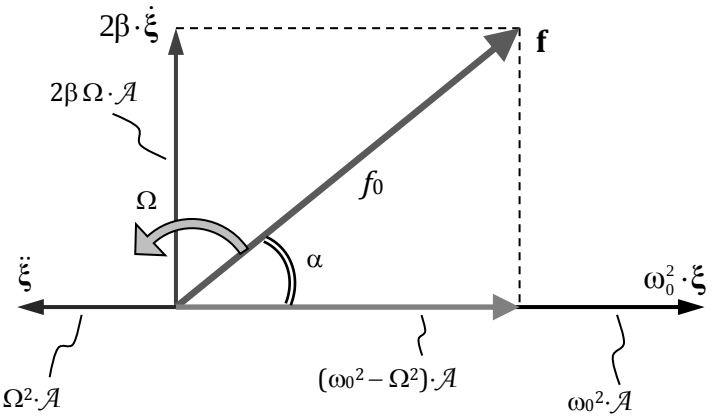


Рис. 18.1

Резонанс **– явление, которое состоит в том, что амплитуда вынужденных колебаний оказывается максимальной при частоте внешнего воздействия $\Omega_{рез}$, близкой к собственной частоте осциллятора** (определяемой равенством (18.7)).

При очень малом затухании в системе ($\beta << \omega_0$) можно пренебречь отличием резонансной частоты $\Omega_{рез}$ от собственной ω_c (и от ω_0, очевидно, тоже) и записать ряд полезных соотношений. Проделаем это на примере решения задачи для конкретной колебательной системы.

Задача

18.1. Свободные колебания железного стержня, подвешенного на пружине, происходят с частотой $\omega_c = 20$ *рад·с*$^{-1}$, причём амплитуда колебаний уменьшается в $\eta = 5$ *раз* в течение времени $t_\eta = \ln 5$ *с* $\approx 1{,}61$ *с*. Вблизи нижнего конца стержня помещена катушка, питаемая переменным током (см. рис. 18.2). Считая, что амплитуда вынуждающей силы F_0 неизменна, найдите:

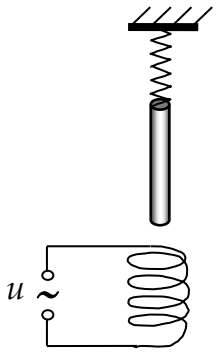


Рис. 18.2

а) коэффициент затухания β; *б*) число колебаний N_e, за которые амплитуда уменьшается в *е* раз и добротность *Q*; *в*) при какой частоте тока, протекающего через катушку $\Omega^{т}_{рез}$, колебания стержня достигнут наибольшей амплитуды?

Решение

На вопросы (*а*) – (*б*) легко ответить, исходя из наших знаний о затухающих колебаниях:

а) $\dfrac{\mathcal{A}_0}{\mathcal{A}(t_\eta)} = e^{\beta t_\eta} = \eta\ ,\quad \beta \cdot t_\eta = \ln\eta\ ,\qquad \beta = \dfrac{1}{t_\eta}\ln\eta\ = 1\ c^{-1}.$

б) $N_e = \dfrac{1}{\beta T} = \dfrac{\omega_c}{2\pi\beta}\ \approx 3{,}2,\qquad Q = \pi \cdot N_e = 10.$

При ответе на последний вопрос необходимо учесть, что частота воздействия вынуждающей силы на железный стержень в два раза больше, чем *частота тока в катушке*.

в) $\Omega^{\text{т}}_{рез} = \dfrac{1}{2}\sqrt{\omega_c^2 - \beta^2}\ \approx \dfrac{1}{2}\omega_c \approx 10\ рад{\cdot}с^{-1}.$

18.2. В системе, описанной в предыдущей задаче, стержень колеблется с амплитудой $\mathcal{A}_1$ = 1,5 *мм* при частоте тока в катушке Ω_1 = 11 $рад{\cdot}с^{-1}$. Найти:

а) амплитуду колебаний при резонансе $\mathcal{A}_{рез}$;

б) относительное отклонение резонансной частоты колебаний от собственной $\dfrac{\omega_c - \Omega_{рез}}{\omega_c}$; *в*) выразить амплитуду колебаний при низкой частоте $\mathcal{A}_{\Omega\to 0}$ (статическое отклонение) через $\mathcal{A}_{рез}$.

Решение

а) Зная амплитуду вынужденных колебаний на частоте Ω_1, можно определить величину f_0:

$$\mathcal{A}_1 = \frac{f_0}{\sqrt{\left((2\Omega_1)^2 - \omega_0^2\right)^2 + 4\beta^2(2\Omega_1)^2}} \qquad \Rightarrow$$

$$f_0 = \mathcal{A}_1 \cdot \sqrt{\left((2\Omega_1)^2 - \omega_0^2\right)^2 + 4\beta^2(2\Omega_1)^2} =$$

$$= \mathcal{A}_1 \cdot \sqrt{\left(4\Omega_1^2 - \omega_c^2 - \beta^2\right)^2 + 16\beta^2\Omega_1^2} \approx 0{,}14\ Н/кг.$$

Далее, подставляя в выражение для амплитуды (18.5) значение резонансной частоты (18.7), получаем полезное соотношение:

$$\mathcal{A}_{рез} = \frac{f_0}{2\beta\omega_c}\ . \qquad (18.8)$$

И затем находим окончательно:

$$\mathcal{A}_{рез} = \frac{\mathcal{A}_1}{2\beta\omega_c}\cdot\sqrt{\left(4\Omega_1^2 - \omega_c^2 - \beta^2\right)^2 + 16\beta^2\Omega_1^2} \approx 3{,}5 \text{ мм}.$$

б) Относительное отличие резонансной частоты колебаний $\Omega_{рез}$ от собственной ω_c равно:

$$\frac{\omega_c - \Omega_{рез}}{\omega_c} = 1 - \frac{\sqrt{\omega_c^2 - \beta^2}}{\omega_c} = 1 - \sqrt{1 - \left(\frac{\beta}{\omega_c}\right)^2} =$$

$$= 1 - \sqrt{1 - \left(\frac{\beta T}{2\pi}\right)^2} = 1 - \sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}.$$

Приближенное вычисление корня $\sqrt{1\pm\delta} \approx 1 \pm \frac{1}{2}\delta$ ($\delta << 1$) даёт:

$$\frac{\omega_c - \Omega_{рез}}{\omega_c} \approx 1 - \left(1 - \frac{1}{2}\frac{1}{4Q^2}\right) = \frac{1}{8Q^2} = 0{,}00125 \text{ (т.е. 0,125 \%)}.$$

в) Амплитуда колебаний при низкой частоте $\mathcal{A}_{\Omega\to 0}$ (*статическое отклонение*):

$$\mathcal{A}_{\Omega\to 0} = \frac{f_0}{\omega_0^2} \approx \left[\text{с учётом (5.8)}\right] \approx \frac{2\beta T \mathcal{A}_{рез}}{2\pi} = \frac{\mathcal{A}_{рез}}{Q}. \qquad (18.9)$$

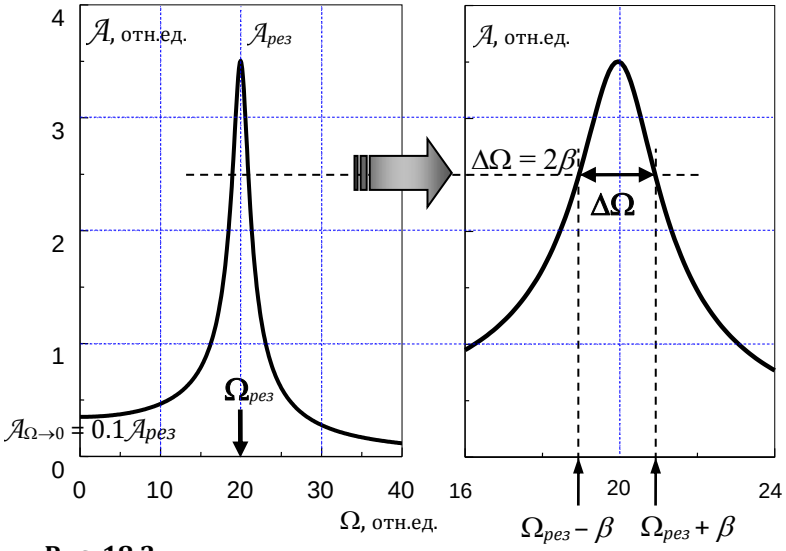


Рис. 18.3

В условиях рассматриваемой задачи $\mathcal{A}_{\Omega\to 0} \approx 0{,}35\,мм$.

Приведём также точный вид амплитудной резонансной кривой для рассмотренного случая вынужденных колебаний – см. рис. 18.3. Горизонтальным пунктиром указан уровень амплитуды вынужденных колебаний в $\sqrt{2}$ раз меньший резонансного (что соответствует уменьшению *энергии колебаний* в 2 *раза*). Он определяет *ширину резонансной кривой* $\Delta\Omega$. Можно показать, что $\Delta\Omega = 2\beta$, и понятие добротности получает новую трактовку:

$$Q = \frac{\Omega_{рез}}{\Delta\Omega}. \qquad (18.10)$$

Задачи для самостоятельного решения

18.3. Изобразите зависимость сдвига фаз между смещением и вынуждающей силой от её частоты $\alpha = \alpha(\Omega)$ для случая вынужденных колебаний при гармоническом внешнем воздействии.

18.4*. Покажите, что в системах с очень малым затуханием ($\beta << \omega_0$) ширина амплитудной резонансной кривой $\Delta\Omega \approx 2\beta$, а сдвиг фаз между вынуждающей силой и смещением при $\Omega = \omega_0 \pm \beta$ равен $\pi/4$ и $3\pi/4$, соответственно.

18.5. Колебательная система характеризуется логарифмическим декрементом затухания $\gamma = 1{,}05$. Для вынужденных гармонических колебаний этой системы найдите отношение максимальной амплитуды смещения $\mathcal{A}_{рез}$ к амплитуде смещения при очень малой частоте внешнего воздействия $\mathcal{A}_{\Omega\to 0}$.

18.6. Тело совершает установившиеся вынужденные колебания $x(t) = \mathcal{A}\cdot\cos(\Omega t - \alpha)$ под действием силы $F_x = F_0\cdot\cos\Omega t$. Найдите:

а) среднюю потребляемую системой мощность $\langle P \rangle$;

б) работу силы трения за период, считая, что сила трения пропорциональна скорости движения тела. Покажите, что $\langle P \rangle \cdot T = -A_{тр}$.

18.7. Частота собственных затухающих колебаний подвешенного на пружине тела равна ω_c. Считая, что коэффициент вязкого трения r известен, найдите максимальную амплитуду колебаний тела под действием вертикальной силы $F(t) = F_0\cdot\cos\Omega t$. При какой частоте она достигается?

18.8*. Для колебательной системы, описанной в предыдущей задаче, постройте зависимости от частоты Ω амплитуды вынужденных колебаний, амплитуд поглощения $\mathcal{A}_n$ и дисперсии $\mathcal{A}_д$.

18.9*. Докажите, что при вынужденных колебаниях экстремумы амплитуды дисперсии наблюдаются при частотах вынуждающего воздействия $\Omega \cong \Omega_{рез} \pm \beta$.

18.10. Частота свободных колебаний некоторой системы $\omega_c = 50{,}0$ *рад/с*, резонансная частота $\Omega_{рез} = 49{,}9$ *рад/с*. Определите добротность Q этой колебательной системы.

18.11. Найдите резонансную частоту $\Omega_{рез}$ для некоторого механического осциллятора, если амплитуды смещений при вынужденных колебаниях этого осциллятора одинаковы при частотах $\Omega_1 = 20$ *рад/с* и $\Omega_2 = 40$ *рад/с*.

18.12. Определите частоту $\Omega_{рез}^{(v)}$, соответствующую *резонансу скорости* некоторого механического осциллятора (когда *амплитуда скорости* колеблющегося тела максимальна), если амплитуды скорости при частотах вынуждающей силы $\Omega_1 = 10$ *рад/с* и $\Omega_2 = 40$ *рад/с* одинаковы.

18.13. При некоторой скорости движения поезда его вагоны особенно сильно раскачиваются на рессорах в результате периодических толчков колёс о стыки рельс. Когда поезд стоит на станции, рессоры деформированы под нагрузкой вагонов на $\Delta x = 10$ *см*. Длина рельс $l = 12{,}5$ *м*. Определите по этим данным скорость движения поезда.

18.14. На крутильный маятник, описанный в задаче 15.10, действует внешняя сила, момент которой меняется по закону $N(t) = N_0 \cdot \cos(\Omega t)$. Определите работу сил трения, действующих в системе, за время, равное периоду колебаний. Считайте, что установившиеся вынужденные колебания маятника происходят по закону: $\varphi = \varphi_0 \cdot \cos(\Omega t - \alpha)$.

18.15. Грузик массы $m = 100$ *г* подвешен на невесомой пружинке с жёсткостью $k = 32{,}4$ *Н/м*. Под действием вынуждающей вертикальной гармонической силы грузик совершает устано-

вившиеся колебания с частотой $\Omega = 17$ *рад/с*. При этом колебания грузика отстают по фазе от вынуждающей силы на $\alpha = \pi/4$. Определите добротность данного осциллятора.

18.16. Для определения собственной частоты незатухающих колебаний ν_0 некоторого осциллятора были измерены частоты его затухающих колебаний $\nu_c = 499$ *Гц* и резонансная $\nu_{рез} = 498$ *Гц*. Определите по этим результатам искомую частоту ν_0.

18.17. Маятник колеблется с частотой $\nu_c = 6$ *Гц*. При этом амплитуда седьмого колебания A_7 оказалась в $n = 12$ *раз* меньше начальной A_0. На какой частоте наступит резонанс в случае внешнего периодического воздействия на данный осциллятор?

18.18. Грузик пружинного маятника массой $m = 200$ *г* совершает в вязкой среде с коэффициентом сопротивления $r = 0{,}2$ *кг/с* установившиеся вынужденные колебания под действием силы $F = F_0 \cdot \cos(\Omega t)$, где $F_0 = 0{,}1$ *Н*. Жёсткость пружины $k = 20$ *Н/м*. Определите для данной колебательной системы: *а*) коэффициент затухания β; *б*) амплитуду колебаний при резонансе $\mathcal{A}_{рез}$.

18.19. По данным предыдущей задачи определите частоту собственных незатухающих колебаний ω_0, добротность Q и амплитуду при низких частотах $\mathcal{A}_{\Omega \to 0}$.

18.20. Пружинный маятник, описанный в задаче 18.18, поместили в более вязкую среду с коэффициентом сопротивления $r = 0{,}85$ *кг/с*. Определите: *а*) резонансную частоту $\Omega_{рез}$; *б*) резонансную амплитуду $\mathcal{A}_{рез}$; *в*) добротность Q.

18.21. Для пружинного маятника, описанного в задаче 18.18, определите амплитуду вынужденных колебаний $\mathcal{A}$ при частоте вынуждающей силы в 1,5 *раза* большей, чем собственная (ω_0).

18.22. Тело, подвешенное на пружине, совершает установившиеся вынужденные колебания под действием вертикальной силы $F = F_0 \cdot \cos(\Omega t)$. Во сколько раз изменится амплитуда колебаний при резонансе, если увеличить в $n = 2$ *раза*

а) амплитуду вынуждающей силы F_0, *б*) коэффициент сопротивления среды r, *в*) массу груза m.

18.23. Ответить на вопросы задачи 18.22, для случая, когда частота вынуждающей силы $\Omega << \omega_0$.

§19. *Переменный ток*

Рассмотрим вынужденные колебания в электрических цепях, содержащих элементы *"R, L, C"* – переменный ток. Такие колебания возникают при подключении цепи к источнику *ЭДС*, периодически изменяющейся во времени. Будем считать, что выполняется ***условие квазистационарности***: значения силы тока во всех последовательно соединённых участках цепи в один и тот же момент времени одинаковы. С хорошей точностью это выполняется, если время распространения электромагнитного сигнала вдоль цепи

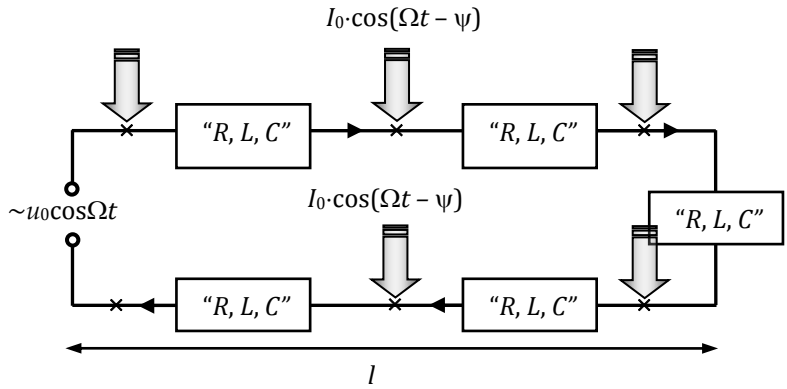


Рис. 19.1

много меньше периода колебаний *ЭДС* источника:

$$\tau = \frac{l}{c} << T \ . \qquad (19.1)$$

Пусть *ЭДС* изменяется по гармоническому закону $u(t) = u_0\cdot\cos(\Omega t)$ (см. рис. 19.1). Сила тока *в общем случае не совпадает по фазе с приложенным напряжением*: $I(t) = I_0\cdot\cos(\Omega t + \psi)$. (Так же как в механических колебательных системах смещение и скорость осциллятора не совпадают по фазе с вынуждающим воздействием). Поэтому теряет смысл запись соотношения между ***мгновенными значениями*** силы тока и напряжения (аналогичная закону Ома для постоянного тока) – это соотношение меняется во времени. Интерес представляет только связь между их ***амплитуд-***

ными значениями, неизменная во времени при установившихся колебаниях в цепи.

Отношение амплитуды напряжения к амплитуде силы тока в цепи

$$Z = \frac{u_0}{I_0} \tag{19.2}$$

называется ***полным сопротивлением*** участка цепи переменного тока, а равенство

$$I_0 = \frac{u_0}{Z} \tag{19.3}$$

называется ***законом Ома для участка цепи переменного тока.*** *Суть его состоит в том, что* ***амплитудное значение*** *силы переменного тока* ***прямо пропорционально амплитудному значению*** *приложенного к участку цепи напряжения*.

Для дальнейшего анализа цепей переменного тока воспользуемся уже знакомой (см. §18) векторной формой представления гармонических функций, и построением векторных диаграмм. Для примера на рис. 19.2 представлено сложение сил токов $I_1(t) = I_{01}\cdot\cos(\Omega t + \psi_1)$ и $I_2(t) = I_{02}\cdot\cos(\Omega t + \psi_2)$ для двух параллельных участков цепи, а также вектор, соответствующий колебанию $u(t) = u_0\cdot\cos(\Omega t)$ (приложенное к цепи напряжение).

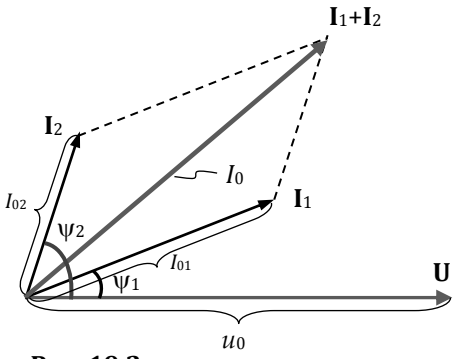


Рис. 19.2

Такое представление делает весьма наглядными амплитудные и фазовые соотношения между колебаниями, позволяет качественно и количественно описывать процессы в достаточно сложных цепях переменного тока.

Ниже мы рассмотрим применение этого подхода.

Задача

19.1. На зажимы цепи переменного тока подано напряжение с амплитудным значением u_0 = 308 *В*, гармонически изменяющееся с частотой ν = 50 *Гц*. В цепь (рис. 19.3) включены последовательно соединённые резистор с сопротивлением R = 80 *Ом*, ка-

тушка с индуктивностью $L = 0{,}56$ *Гн* и конденсатор с электроёмкостью $C = 30$ *мкФ*. Найдите: *а*) сдвиг по фазе между силой тока и напряжением; *б*) амплитудное значение силы тока в цепи.

Решение

В данном случае построение векторной диаграммы (см. рис. 19.4) удобно начать с вектора-колебания **I**, соответствующего силе тока, так как для последовательного контура в условиях квазистационарности этот вектор является *общим для всех элементов цепи*. Направим его по горизонтали вправо. Напряжение на резисторе *совпадает по фазе* с силой тока, протекающего по нему, поэтому и вектор-колебание $\mathbf{U}_R$ напряжения на резисторе направим так же. Длина этого вектора равна произведению амплитудного значения силы тока в цепи на сопротивление резистора:

$$u_{R0} = I_0 \cdot R. \qquad (19.4)$$

Колебания напряжения на катушке индуктивности опережа-

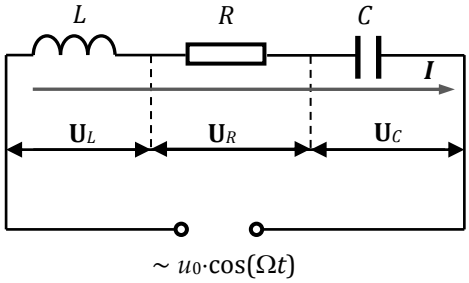


Рис. 19.3

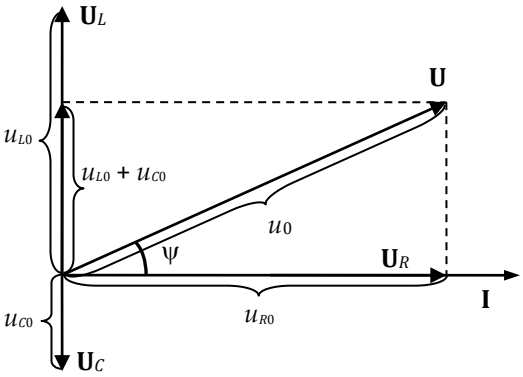


Рис. 19.4

ют по фазе на $\pi/2$ колебания силы тока, протекающего через неё*), следовательно, вектор-колебание напряжения $\mathbf{U}_L$ должен быть повернут на этот угол против часовой стрелки. Его длина равна произведению амплитудного значения силы тока на индуктивное сопротивление:

$$u_{L0} = I_0 \cdot X_L = I_0 \cdot \Omega L \,. \qquad (19.5)$$

Колебания напряжения на конденсаторе, напротив, отстают по фазе на $\pi/2$ от силы тока через него, соответствующий вектор-колебание $\mathbf{U}_C$ повернут на 90° по часовой стрелке. Его длина равна произведению амплитудного значения силы тока в цепи на ёмкостное сопротивление:

$$u_{C0} = I_0 \cdot X_C = I_0 \cdot 1/\Omega C \,. \qquad (19.5)$$

Для последовательно соединённых участков цепи в любой момент времени должно выполняться равенство:

$$u(t) = u_R(t) + u_C(t) + u_L(t). \qquad (19.6)$$

Сложение *колебаний* как раз удобно выполнить с помощью векторной диаграммы. Сначала можно сложить направленные противоположно векторы-колебаний $\mathbf{U}_C$ и $\mathbf{U}_L$ – длина вектора $(\mathbf{U}_L + \mathbf{U}_C)$ равна $I_0 \cdot (\Omega L - 1/\Omega C)$, а затем прибавить к результату вектор-колебание $\mathbf{U}_R$. В итоге получим вектор $\mathbf{U}$, соответствующий общему напряжению, приложенному к цепи. На векторной диаграмме хорошо видно, что он, в общем случае, повёрнут относительно оси токов на некоторый угол. На нашем рисунке этот угол положительный, т.е. общее напряжение опережает по фазе силу тока в цепи. Это характерно для цепей, в которых $\Omega L > 1/\Omega C$ – цепей с «преимущественно индуктивной нагрузкой». В обратном случае нагрузка носит «преимущественно ёмкостный характер». Из векторной диаграммы фазовый сдвиг между напряжением и силой тока в цепи можно найти количественно:

$$\mathrm{tg}\psi = \frac{\Omega L - 1/\Omega C}{R} = 0{,}87 \quad (\psi \approx 41°) \,. \qquad (19.7)$$

Длину результирующего вектора для напряжения $\mathbf{U}$ легко найти по теореме Пифагора:

$$u_0 = I_0 \cdot \sqrt{R^2 + \left(\Omega L - \frac{1}{\Omega C}\right)^2} \,. \qquad (19.8)$$

Отсюда, с учётом численных данных задачи, получаем:

---

*) Так же как при механических колебаниях $\ddot{\xi}(t)$ опережает по фазе $\dot{\xi}(t)$ на $\pi/2$ – см. соотношения (18.4) и (18.3).

$$I_0 = \frac{u_0}{\sqrt{R^2 + \left(\Omega L - 1/\Omega C\right)^2}} \approx 3\ A. \qquad (19.9)$$

Полное сопротивление в рассмотренном случае оказывается равным

$$Z = \sqrt{R^2 + \left(\Omega L - 1/\Omega C\right)^2}\ . \qquad (19.10)$$

Величина $X = \left(\Omega L - 1/\Omega C\right)$ в данном случае играет роль ***реактивного сопротивления***, тогда как ***омическое сопротивление*** R выполняет роль ***активного*** – на нём выделяется тепло .

Подчеркнём, что соотношение (19.10) получено ***только для случая последовательно соединённых элементов R, L, C***. Выражение для полного и реактивного сопротивления цепи переменного тока во всех иных случаях определяется ***конкретным способом соединения этих элементов*** и может быть найдено аналогичным способом[**)] (см., например, задачу 19.11).

Рассмотрим далее вопрос о ***мощности, выделяющейся в цепи переменного тока.***

Мгновенная мощность, выделяющаяся в цепи, к которой приложено напряжение $u_0\cos(\Omega t)$ и по которой протекает ток силой $I_0\cdot\cos(\Omega t + \psi)$, по закону Джоуля–Ленца может быть записана в виде:

$$P(t) = u_0\cos(\Omega t)\cdot I_0\cos(\Omega t + \psi). \qquad (19.11)$$

Простые тригонометрические преобразования позволяют показать, что $P(t)$ – это быстропеременная функция с частотой 2Ω. В то же время тепловое действие тока определяется, очевидно, не мгновенным, а средним (за большой по сравнению с периодом колебаний промежуток времени) значением мощности $\langle P\rangle$. Это значение может быть найдено усреднением $P(t)$ за период:

$$\langle P\rangle = \frac{1}{T}\int_0^T P(t)dt = \frac{u_0 I_0}{T}\int_0^T \left[\cos(\Omega t)\cdot\cos(\Omega t + \psi)\right]dt = \frac{1}{2}u_0 I_0\cdot\cos\psi\ . \qquad (19.12)$$

Величину $\cos\psi$ называют ***коэффициентом мощности***. Для элементов «R, L, C», соединённых последовательно, $u_0\cdot\cos\psi = u_{R0} = I_0\cdot R$ (см. рис. 19.4). Поэтому

$$\langle P\rangle = \frac{1}{2}I_0^2\cdot R\ . \qquad (19.13)$$

[**)] Альтернативой является применение символического метода на основе представления колебаний в комплексной форме.

Отсюда видно, что протекание по цепи с сопротивлением R ***гармонического*** переменного тока вызывает в ней такое же тепловое действие, что и протекание ***постоянного*** тока силой $I_д = \frac{1}{\sqrt{2}} I_0$ через резистор с таким же омическим сопротивлением. Эта величина называется ***действующим*** (или ***эффективным***) ***значением*** силы переменного тока. По аналогии вводится действующее (или эффективное) *значение напряжения* $u_д = \frac{1}{\sqrt{2}} u_0$ *). Таким образом, средняя мощность, для **любого участка** цепи переменного тока, может быть записана в виде:

$$\langle P \rangle = I_д \cdot u_д \cdot \cos\psi \,. \qquad (19.14)$$

Отметим, что в общем случае несинусоидального переменного тока коэффициенты, связывающие амплитудные и действующие значения силы тока или напряжения, будут иными. Процедура нахождения этих коэффициентов связана с расчётом энерговыделения и определяется равенствами:

$$I_д^2 = \frac{1}{T}\int_0^T I^2(t)dt \;; \qquad u_д^2 = \frac{1}{T}\int_0^T u^2(t)dt \,.$$

Проиллюстрируем это на примере «пилообразной» (см. рис. 19.5) зависимости силы тока от времени.

Задача

19.2. Найдите действующее значение силы тока, если ток зависит от времени по закону, показанному на рисунке 19.5, а его максимальное значение равно I_0.

Решение

В рассматриваемом случае $I(t) = k \cdot t$ в пределах одного периода колебаний, где $k = \frac{I_0}{T}$ (см. рис. 19.5). Тогда:

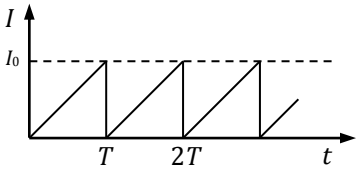


Рис. 19.5

$$I_д^2 = \frac{1}{T}\int_0^T I^2(t)dt = \frac{k^2}{T}\int_0^T t^2 dt = \frac{k^2}{T}\frac{T^3}{3} = \frac{k^2T^2}{3} = \frac{I_0^2T^2}{3T^2} = \frac{I_0^2}{3} \,.$$

*) Для действующих значений переменного тока и напряжения часто используются обозначения u и I без индекса. Но мы не будем этим злоупотреблять.

Таким образом $I_д = \frac{I_0}{\sqrt{3}}$. Аналогично получаем $u_д = \frac{u_0}{\sqrt{3}}$.

Рассмотрим ещё одну задачу, в которой вскрывается суть важных для рассмотрения цепей переменного тока понятий ***омического***, ***активного*** и ***полного*** сопротивлений цепи переменного тока.

19.3. ***Омическое*** сопротивление провода, из которого намотан дроссель – катушка с железным сердечником для увеличения индуктивности, используемая обычно в сетевых фильтрах электропитания – равно R = 26 *Ом*. ***Активное*** сопротивление дросселя R_a = 30 *Ом*, а полное Z = 80 *Ом.* Определите потери мощности на перемагничивание железного сердечника, если напряжение, которое приложено к дросселю, равно $u_д$ = 220 *В*.

Решение

На омическом сопротивлении дросселя (оно определяет сопротивление постоянному току) выделяется тепловая мощность

$$P_R = I_д^2 \cdot R = \frac{u_д^2}{Z^2} \cdot R \cong 197\ Вт.$$

Полная мощность, расходуемая в цепи переменного тока, определяется его ***активным сопротивлением***

$$R_a = \frac{P}{I_д^2}, \qquad (19.15)$$

которое учитывает потери электромагнитной энергии не только на выделение «джоулева» тепла, но и на другие процессы. Например, на совершение механической работы в двигателях переменного тока; на перемагничивание сердечников, как в данном случае, и т.п.. С учётом данного определения получаем полную мощность тепловыделения:

$$P = I_д^2 \cdot R_a = \frac{u_д^2}{Z^2} \cdot R_a \cong 227\ Вт.$$

Поскольку затрачиваемая мощность может быть записана также в виде

$$P = u_д I_д \cdot \cos\psi \quad = \frac{u_д^2}{Z} \cdot \cos\psi,$$

ясно, что активное сопротивление равно полному, умноженному на коэффициент мощности:

$R_a = Z \cdot \cos\psi$. (19.16)

Отсюда легко найти фазовый сдвиг между напряжением и током, протекающим через дроссель:

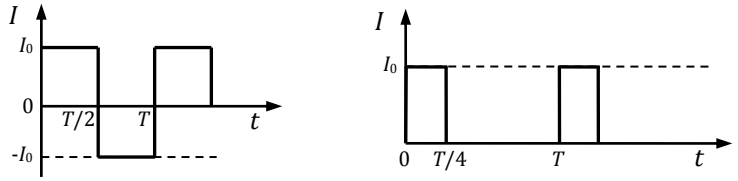
$$\psi = \arccos\left(\frac{R_a}{Z}\right) \cong 68°.$$

Разница между величинами P и P_R в рассмотренном в данной задаче случае затрачивается на ***перемагничивание сердечника***:

$$P - P_R = \frac{u_\partial^2}{Z^2}(R_a - R) \cong 30\ Вт.$$

Задачи для самостоятельного решения

19.4. Найдите действующие значения для тока, сила которого меняется по законам, показанным на рисунках 19.6 *а* и *б*:



а) ***б)***

Рис. 19.6

19.5. Цепь переменного тока состоит из последовательно соединённых резистора с сопротивлением R = 80 *Ом*, катушки индуктивности L = 0,56 *Гн* и конденсатора электроёмкости C = 30 *мкФ*. Цепь включена в бытовую электросеть (напряжение u_∂ = 220 *В*, ν = 50 *Гц*). Найдите: *а*) действующее значение силы тока в цепи; *б*) сдвиг по фазе ψ между током и напряжением.

19.6. В условиях предыдущей задачи найдите действующие значения напряжений u_R, u_L и u_C на зажимах каждого из элементов цепи и выделяющуюся в цепи мощность P.

19.7. В цепи переменного тока используется плоский конденсатор, изолятор которого промок и он стал нагреваться. При частоте ν = 50 *Гц* коэффициент мощности оказался равен k = 0,6. Определите по этим данным удельное сопротивление изолятора, если его диэлектрическая проницаемость равна ε = 4,8.

19.8*. К бытовой электросети (напряжение $u_д$ = 220 *В*, ν = 50 *Гц*) присоединён дроссель, соединённый последовательно с резистором R = 40 *Ом*. Действующее напряжение, измеренное вольтметром на дросселе равно u_1 = 160 *В*, а на резисторе u_2 = 80 *В*. Какие мощности потребляются дросселем (P_1) и резистором (P_2)?

19.9*. Дроссель и резистор R = 40 *Ом* присоединены параллельно к бытовой электросети. При этом амперметр, включенный в цепь дросселя, показывает действующее значение силы тока I_1 = 2 *А*, другой амперметр в цепи резистора – I_2 = 1,5 *А*, а от сети потребляется ток с действующим значением I = 3 *А*. Какая мощность потребляется дросселем и резистором?

19.10. К бытовой электросети (напряжение $u_д$ = 220 *В*, ν = 50 *Гц*) присоединены параллельно реостат с сопротивлением R = 40 *Ом* и дроссель без сердечника с индуктивностью L = 80 *мГн* и омическим сопротивлением r = 26 *Ом*. Найти действующие значения сил токов, протекающих через реостат I_R, дроссель $I_{др}$ и в проводниках соединения с источником $I_{общ}$.

19.11. Найдите полное сопротивление цепочки, состоящей из параллельно соединённых конденсатора электроёмкости C и резистора с сопротивлением R. Определить, как зависят от времени силы токов через конденсатор, резистор и всю цепочку, если приложенное напряжение меняется по закону $u = u_0 \cdot \cos(\Omega t)$.

19.12. Изобразите векторную диаграмму для участка цепи, показанного на рисунке 19.7. Предполагается, что приложенное между точками A и B напряжение изменяется по гармоническому закону.

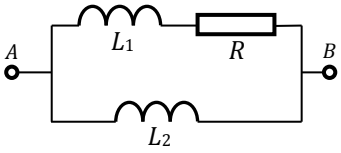


Рис. 19.7

19.13. Выполните задание 19.12 для участка цепи, представленного на рисунке 19.8.

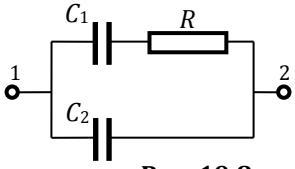


Рис. 19.8

19.14*. На рис. 19.9 показана простейшая схема сглаживающего сетевого фильтра. На вход подают напряжение, меняющееся по закону $u(t) = u_0 + u_{01}\cdot\cos(\Omega t)$, u_0 и u_{01} – константы. Найдите: *а*) выходное напряжение $u_{вых}(t)$, *б*) значение величины RC, при котором амплитуда переменной составляющей напряжения u_{02} (амплитуда пульсаций) на выходе будет в $n = 10$ *раз* меньше амплитуды переменной составляющей u_{01} на входе, если $\Omega = 314$ *рад/с* (бытовая электросеть

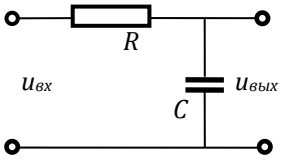


Рис. 19.9

19.15. Переменное напряжение, действующее значение которого $u_д = 10$ *В*, а частота $\nu = 50$ *Гц*, приложено к катушке без сердечника с индуктивностью $L = 2$ *мГн* и сопротивлением $R = 100$ *мОм*. Найдите количество теплоты, выделяющееся в катушке за секунду.

19.16. К сети переменного тока с действующим значением напряжения $u_д = 120$ *В* подключили катушку, индуктивное сопротивление которой $X_L = 80$ *Ом* и полное сопротивление $Z = 100$ *Ом*. Найдите разность фаз между колебаниями силы тока и напряжения, а также мощность, потребляемую катушкой.

19.17. При какой частоте напряжения, приложенного к цепочке последовательно соединённых резистора $R = 4$ Ом, катушки $L = 1$ *мГн* и конденсатора $C = 1$ *мкФ*, колебания силы тока отстают от напряжения по фазе на $\pi/4$?

19.18. В электрической схеме между точками, находящимися под напряжением $u(t) = u_0\cdot\cos(\Omega t)$, включен конденсатор электроёмкости C. Пространство между обкладками конденсатора заполнено слабо проводящей средой с сопротивлением R. Как зависит от времени сила тока, протекающего через данный участок цепи?

19.19. К участку цепи, состоящему из последовательно соединённых элементов R, L и C, приложено переменное напряжение с действующим значением $u_д = 220$ *В* и частотой $\nu = 50$ *Гц*. Сопротивление резистора $R = 110$ *Ом*, электроёмкость конденсатора

равна $C = 50$ *мкФ*. Индуктивность L подбирается так, чтобы показание вольтметра, включенного параллельно конденсатору, стало максимальным. Чему равна эта индуктивность? Найдите показания вольтметра и амперметра в этих условиях.

19.20. Параметры последовательного колебательного контура (R, L, C) таковы: $C = 5$ *мкФ*, $R = 0{,}1$ *Ом*. Какую мощность P надо подводить к контуру, чтобы поддерживать в нём незатухающие колебания на частоте $\Omega = 200$ *рад/с* с амплитудой напряжения на конденсаторе $u_{C0} = 10$ *В*?

19.21. Найдите условие баланса токов (т.е. условие *минимума амплитуды силы тока в подводящих проводах*) для цепочки, состоящей из параллельно подключенных к генератору идеальных конденсатора и катушки индуктивности («идеальный LC-контур»).

19.22*. К показанному на рисунке 19.10 контуру приложено переменное напряжение с действующим значением $u_д = 220$ *В*. Параметры контура: $C = 0{,}4$ *мкФ*, $L = 0{,}4$ *Гн*, $R = 2$ *Ом*. Постройте векторную диаграмму. Найите зависимость полного сопротивления контура от частоты Ω приложенного переменного напряжения. Определить, при каком значении частоты $\Omega_{рез}$ амплитуда силы тока в подводящих проводах будет минимальной (баланс токов)? Каково при этом полное сопротивление контура $Z_{рез}$?

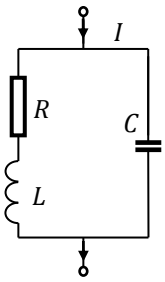


Рис. 19.10

19.23*. В условиях предыдущей задачи найдите, чему равны при резонансной частоте действующие значения сил токов, протекающих в цепи конденсатора, катушки индуктивности и в подводящих проводах I_C, I_L и $I_д$ соответственно?

19.24*. Какой должна быть добротность колебательного контура Q, чтобы частота, при которой наступает баланс токов $\Omega_{рез}$, отличалась от частоты, при которой наступает резонанс напряжений ω_0, не более чем на 5%.

§20. *Волны*

Волны – это распространяющиеся в пространстве колебания. В частности, механические (упругие) волны представляют собой распространяющиеся в каком-либо веществе колебания механических напряжений, электромагнитные – распространяющиеся колебания электромагнитного поля. Упругие волны могут возникать в твёрдых, жидких и газообразных средах; электромагнитные – могут распространяться также и в вакууме.

Распространяющиеся в непоглощающей и недиспергирующей*) среде волны подчиняются *классическому дифференциальному* ***волновому уравнению***:

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = \upsilon^2 \cdot \Delta\xi, \qquad (20.1)$$

где $\Delta = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right)$ – оператор Лапласа в декартовых координатах, υ – фазовая скорость волны (в дальнейшем для краткости мы будем называть её просто скоростью волны).

В случае упругих волн ξ – смещение частиц среды от положения равновесия, для электромагнитных волн вместо ξ в уравнениях (20.1, *а*) или (20.1, *а*) фигурирует напряжённость электрического поля $\vec{E}$ или индукция магнитного поля $\vec{B}$.

Скорость упругой волны в твёрдом теле зависит от величины модуля упругости G (модуля Юнга) и плотности вещества ρ: $\upsilon = \sqrt{G/\rho}$; скорость электромагнитной волны зависит от диэлектрической и магнитной проницаемостей среды (ε и μ), в которой распространяется волна: $\upsilon = 1/\sqrt{\varepsilon\mu\varepsilon_0\mu_0} = c/n$; здесь $c = 1/\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}$ – скорость электромагнитной волны в вакууме, $n = \sqrt{\varepsilon\mu}$ – показатель преломления среды.

В одномерном случае (например, для волны, распространяющейся по оси *OX*) уравнение (20.1) упрощается и имеет вид:

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = \upsilon^2 \cdot \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}. \qquad (20.1,a)$$

*) Недиспергирующими называются среды, в которых скорость распространения волны не зависит от частоты колебаний.

Упругие волны могут быть ***продольными*** *и* ***поперечными*** – колебания происходят вдоль направления распространения волны или перпендикулярно ему, соответственно. В жидкостях и газах распространяются только продольные волны, в твёрдых телах – как продольные, так и поперечные. Электромагнитные волны – всегда поперечные (векторы $\vec{E}$ и $\vec{B}$ перпендикулярны скорости волны $\vec{\upsilon}$, причем $\vec{E} \perp \vec{B}$). Направление скорости электромагнитной волны $\vec{\upsilon}$ совпадает с направлением векторного произведения $[\vec{E}, \vec{B}]$.

Уравнением волны называется решение дифференциального уравнения (20.1 или 20.1,*а*) – функция $\xi(x,y,z,t)$, в явной форме описывающая зависимость ξ от координат и времени. В частности, уравнение ***плоской гармонической волны***, распространяющейся по оси *OX*, имеет вид:

$$\xi(x,t) = A\cdot\cos(\omega t - kx). \qquad (20.2)$$

Здесь A – амплитуда волны, $\omega = 2\pi/T$ – циклическая частота, $k = 2\pi/\lambda$ – так называемое волновое число. Напомним, что аргумент гармонической функции $(\omega t - kx)$ называется фазой колебания.

Поверхность, во всех точках которой колебания происходят в одной фазе, называется ***волновой поверхностью***. Волновых поверхностей бесконечно много. Самая дальняя из них от источника называется ***фронтом волны***. Волна, описываемая равенством (20.2), потому и называется плоской, что все её волновые поверхности – плоскости.

Если размерами источника волн можно пренебречь (точечный источник), то волновые поверхности являются сферическими и уравнение волны принимает вид (см. задачу 20.1):

$$\xi(r,t) = \frac{A}{r}\cdot\cos(\omega t - \vec{k}\vec{r}\,). \qquad (20.3)$$

Здесь $\vec{r}$ – радиус вектор, соединяющий источник с данной точкой пространства; $\vec{k} = (2\pi/\lambda)\cdot(\vec{\upsilon}/\upsilon)$ – так называемый волновой вектор.

Плотностью энергии волны w называется энергия, приходящаяся на единицу объёма среды, в которой распространяется волна. Упругая волна несёт с собой кинетическую и потенциальную энергии. Первая представляет собой кинетическую энергию колеблющихся частиц $W_к$, вторая – энергию деформации среды $W_п$: $W = W_к + W_п$. Плотности кинетической ($w_к$) и потенциальной ($w_п$) энергий упругой гармонической волны (20.2) одинаковы:

$w_к(t) = w_п(t) = (\rho A^2\omega^2/2)\cdot\sin^2(\omega t - kx)$, (20.4)

поэтому полная ***плотность энергии упругой волны равна***

$w(t) = \rho A^2\omega^2\cdot\sin^2(\omega t - kx)$. (20.5)

Энергия электромагнитной волны складывается из энергии электрического и магнитного полей. Поэтому *плотность* полной *энергии электромагнитной волны* равна $w = w_э + w_м$, где

$w_э(t) = \varepsilon\varepsilon_0 E^2(t)/2$, $w_м(t) = B^2(t)/2\mu\mu_0$. (20.6)

В распространяющейся электромагнитной волне напряжённость электрического и индукция магнитного полей изменяются в одной фазе, причём в любой момент времени в данной точке пространства $w_э(t) = w_м(t)$. Связь между модулями электрического и магнитного полей в этой волне выглядит так:

$B(t) = E(t)/\upsilon$ или $B(t) = \sqrt{\varepsilon\mu\varepsilon_0\mu_0}\cdot E(t)$. (20.7)

С учётом соотношений (20.6) и (20.7) плотность энергии электромагнитной волны может быть записана одним из удобных для того или иного конкретного случая способом:

$$w(t) = \varepsilon\varepsilon_0\cdot E^2(t) = B^2(t)/\mu\mu_0 = \frac{E(t)\cdot B(t)}{\mu\mu_0\upsilon}. \quad (20.8)$$

Перечислим основные энергетические характеристики переноса энергии волнами (как упругими, так и электромагнитными).

а) ***Плотность потока энергии*** (энергия, переносимая волной в единицу времени через единичную площадку, перпендикулярную направлению распространения волны):

$S(t) = w(t)\cdot\upsilon$. (20.9)

б) ***Интенсивность*** волны (среднее по времени значение плотности потока энергии):

$I = \langle S(t)\rangle = \langle w(t)\rangle\cdot\upsilon$. (20.10)

При усреднении по времени плотности энергии волны учтём, что среднее по времени значение квадрата гармонической функции равно 1/2, поэтому, например, для электромагнитной волны (см. (20.8)) получим:

$$I = \frac{E_0\cdot B_0}{2\mu\mu_0\upsilon}, \quad (20.10, a)$$

где E_0 и B_0 – амплитудные значения напряжённости электрического и индукции магнитного полей соответственно.

в) ***Векторы Умова*** (для упругих волн) и ***Пойнтинга*** (для электромагнитных волн):

$$\vec{\mathrm{S}}(\mathrm{t}) = w(\mathrm{t}) \cdot \vec{v}\ (t). \qquad (20.11)$$

В частности, *вектор Пойнтинга* можно записать в виде:

$$\vec{\mathrm{S}}(t) = [\vec{E}, \vec{B}] / \mu\mu_0 . \qquad (20.11, a)$$

г) *Средние по времени значения* векторов *Умова и Пойнтинга* (***векторная интенсивность***):

$$\left\langle \vec{S}(t) \right\rangle = \left\langle w(t) \right\rangle \cdot \vec{v} . \qquad (20.12)$$

В частности, для электромагнитной волны

$$\left\langle \vec{\mathrm{S}}(t) \right\rangle = [\vec{E}_0, \vec{B}_0] / 2\mu\mu_0 . \qquad (20.12, a)$$

д) ***Поток энергии*** волны через некоторую поверхность "Σ" и *среднее по времени* значение этого потока:

$$\Phi(t) = \int_{\Sigma} \vec{\mathrm{S}}(t) \cdot d\vec{s} = \int_{\Sigma} \mathrm{S}_n(t) ds , \qquad (20.13)$$

$$\left\langle \Phi(t) \right\rangle = \int_{\Sigma} \left\langle \vec{\mathrm{S}}(t) \right\rangle \cdot d\vec{s} = \int_{\Sigma} \left\langle \mathrm{S}_n(t) \right\rangle ds . \qquad (20.14)$$

Здесь $d\vec{s}$ – вектор, модуль которого равен площади *ds* данного элемента поверхности, а направление совпадает с направлением нормали к нему; S_n – нормальная к данному элементу поверхности составляющая вектора Умова – Пойнтинга $\vec{\mathrm{S}}$.

Перейдём к примерам решения задач по рассматриваемой теме.

Задача

20.1. Докажите, что амплитуда сферической волны, распространяющейся в непоглощающей среде, обратно пропорциональна расстоянию *r* от источника (см. уравнение (20.3)).

Решение

Чем дальше от источника уходит фронт сферической волны, тем на большую площадь поверхности распределяется испускаемая источником энергия (площадь сферы $S = 4\pi r^2$). Соответственно, тем меньшая энергия приходится на каждую колеблющуюся частицу ($\sim 1/r^2$). Из соотношений (20.4) и (20.8) следует, что плотность энергии волны *w* пропорциональна квадрату амплитуды колебаний (A^2 для упругой, E_0^2 или B_0^2 для электромагнитной волны). Следовательно, амплитуда колебаний в сферической волне обратно пропорциональна расстоянию от источника $A \sim \sqrt{w(t)} \sim 1/r$.

Задача

20.2. Докажите, что уравнение $\xi(x,t) = A\cdot\cos(a\cdot t - b\cdot x)$ описывает гармоническую волну, распространяющуюся вдоль оси *OX*. Найдите фазовую скорость этой волны. В какую сторону бежит волна?

Решение

Легко проверить, что функция $A\cdot\cos(a\cdot t - b\cdot x)$ удовлетворяет волновому уравнению (20.1,*a*). Причём роль константы υ играет отношение a/b. Постоянному значению фазы волны соответствует условие $a\cdot t - b\cdot x = const$. Найдём малое приращение (дифференциал) левой и правой частей этого равенства: $a\cdot dt - b\cdot dx = 0$. Отсюда следует, что координата точек с постоянной фазой перемещается со скоростью $\upsilon_x = dx/dt = a/b$. Это и есть по определению проекция фазовой скорости волны на ось *OX*. Если отношение $a/b > 0$, волна распространяется в положительном направлении оси *OX*, если $a/b < 0$ – в противоположном направлении.

Задача

20.3. Один конец горизонтального шнура закреплён, другой перемещают по вертикали по закону: $y(t) = A\cdot\sin(4\pi t)$. В средней части шнура при этом наблюдаются три точки, в которых шнур остается всё время неподвижным – узлы. Расстояние между соседними узлами $L = 2$ *м*. Изобразите вид колеблющегося шнура и укажите места, в которых максимальны потенциальная и кинетическая энергии волны. Найдите скорость распространения бегущей упругой волны по этому шнуру.

Решение

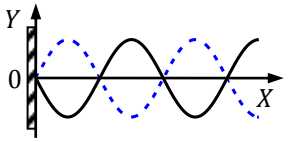


Рис. 20.1

В указанных условиях на шнуре формируется так называемая стоячая волна, возникающая в результате сложения падающей и отражённой от закреплённого конца шнура волн. На шнуре возникают узлы (неподвижные точки) и пучности (области с максимальной амплитудой колебаний) – см. рис. 20.1. Расстояние между двумя соседними узлами или пучностями равно *половине* длины исходной волны ($L = \lambda/2$) и, следовательно, $\lambda = 4$ *м*.

Из условия задачи следует, что $\omega = 4\pi$ *рад*/*с*. Поэтому скорость распространения бегущей волны $\upsilon = \lambda/T = \lambda\cdot\omega/2\pi = 8$ *м*/*с*.

20.4. По шнуру, натянутому вдоль горизонтально направленной оси *OX*, бежит поперечная упругая волна: $y(x,t) = A\cdot\cos(\omega t - kx)$. Найдите распределения кинетической и потенциальной энергии вдоль шнура для бегущей и стоячей волн.

Решение

Для бегущей по шнуру упругой волны максимумы потенциальной и кинетической энергии находятся в одних и тех же местах – там, где смещение частиц $\xi(x,t)$ оказалось равным 0 ($\omega t - kx = \pi/2 + \pi m$ – см. соотношение (20.4)). Конечно, эти точки перемещаются вместе с волной с фазовой скоростью υ (рис. 20.2,*а*).

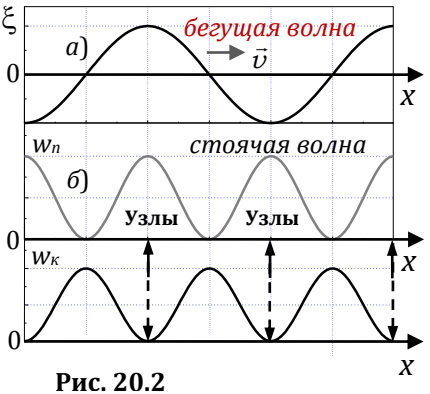


Рис. 20.2

В узлах стоячей волны (их положения на рисунке рис. 20.2,*б* указаны стрелками) шнур не движется, но зато испытывает максимальные упругие напряжения (точки слева и справа от узла всегда движутся в разные стороны). В пучностях, наоборот, максимальна скорость шнура, но соседние точки движутся практически одинаково. Поэтому *в узлах максимальна потенциальная энергия стоячей волны, в пучностях – кинетическая*. Распределения кинетической и потенциальной энергии вдоль шнура для стоячей волны показаны на рис. 20.2,*б*. Максимумы потенциальной и кинетической энергий в стоячей упругой волне находятся на расстоянии $\lambda/4$ друг от друга.

20.5. Используя определённые аналогии между параметрами упругих и электромагнитных волн, укажите относительное расположение максимумов электрического и магнитного поля в бегущих и стоячих электромагнитных волнах.

Решение

Как следует из сопоставления характеристик механических и электромагнитных колебаний, потенциальной энергии упругой волны $w_п$ соответствует энергия электрического поля электромагнитной волны $w_э$, а кинетической энергии $w_к$ – энергия магнитного

поля $w_м$. Соответственно, в бегущей электромагнитной волне максимумы энергии электрического и магнитного полей совпадают (так же, как максимумы потенциальной и кинетической энергии в бегущей упругой волне). В стоячей электромагнитной волне максимумы $w_э$ и $w_м$ должны быть пространственно разнесены на $\lambda/4$ (как и максимумы $w_п$ и $w_к$ в стоячей упругой волне).

20.6. Между двумя металлическими пластинами возбуждена плоская стоячая электромагнитная волна. Расстояние между пластинами $L = 1{,}5\lambda$ (λ – длина волны). Изобразите зависимости напряжённости электрического поля, а также плотности энергии магнитного $w_м$ и электрического полей $w_э$.

Решение

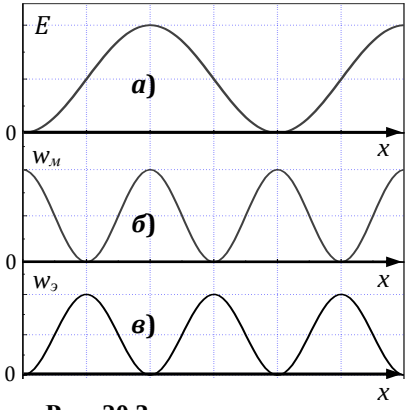


Рис. 20.3

Напряжённость электрического поля электромагнитной волны на границе с металлическими пластинами должна быть равна нулю (это соответствует минимальным потерям энергии на возбуждение токов в пластинах). С учётом предыдущей задачи индукция магнитного поля на границе с металлическими пластинами максимальна. Искомые зависимости показаны на рис. 20.3.

Задачи для самостоятельного решения

20.7. Напишите уравнения продольной и поперечной плоских гармонических волн, распространяющихся по оси *OX*. Известны амплитуда A, длина волны λ и фазовая скорость волн υ.

20.8. Какую волну описывает уравнение $\xi = A\cdot\cos(\omega t + kx)$ – продольную или поперечную? В какую сторону направлена и чему равна фазовая скорость этой волны? Что изменится, если перед kx поменять знак?

20.9. Напишите уравнение цилиндрической гармонической волны с частотой ω и длиной волны λ, распространяющейся в

однородной непоглощающей среде от нитевидного источника (r – расстояние от источника).

20.10. Звуковая волна переходит из воздуха в воду. Что происходит при этом с частотой, периодом и длиной волны? Фазовая скорость звука в воздухе $v_1 \cong 300$ *м/с*, в воде – $v_2 \cong 1500$ *м/с*.

20.11. По струне распространяется негармоническая волна, описываемая функцией $\xi(x,t) = f(a \cdot t - b \cdot x)$. Докажите, что эта функция удовлетворяет дифференциальному уравнению (20.1, *а*). Определите фазовую скорость этой волны.

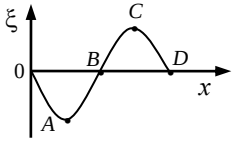


Рис. 20.4

20.12. На рис. 20.4 показана зависимость смещения частиц среды от координаты в поперечной упругой волне $\xi = A \cdot \cos(\omega t - kx)$ в некоторый момент времени t_0. Найдите распределение скоростей частиц вдоль оси *OX*. Скорости частиц в точках *A*, *B*, *C* и *D* в этот же момент времени t_0 укажите на рисунке стрелками.

20.13. Сделайте то же самое, что и в предыдущей задаче, но для продольной волны, описываемой уравнением $\xi = A \cdot \cos(\omega t + kx)$.

20.14. По воде на озере бежит плоская гармоническая волна $\xi = A \cdot \cos(\omega t - kx)$, амплитуда которой $A = 3$ *см*, а частота $\omega = 10$ *рад/с*. Определите скорость частиц на поверхности воды в точках *B* и *C* (на оси и в максимуме – см. рис. 20.4.).

20.15. На рис. 20.4 представлен профиль упругой волны, зафиксированный в некоторый момент времени t_0. Изобразите зависимости от координаты потенциальной и кинетической энергий частиц среды, по которой бежит эта волна.

20.16. В железном стержне длиной $L = 0{,}5$ *м* с закреплёнными концами возбуждена стоячая упругая волна частотой $\omega = 2\pi \cdot 10^4$ *рад/с*. Изобразите распределение вдоль стержня смещений частиц, а также потенциальной и кинетической энергии волны, если известно, что скорость такой же бегущей по стержню волны равна $v = 5 \cdot 10^3$ *м/с*.

20.17. В воздухе по оси *OX* распространяется звуковая волна,

зависимость смещений молекул от координаты в некоторый момент времени t_0 показана на рис. 20.4. Изобразите зависимость давления в воздухе от координаты в этот момент.

20.18. Определите скорость продольной упругой волны в железе, если известно, что модуль упругости и плотность железа равны $G = 2{,}1\cdot10^{11}$ *Н/м*^{2} и $\rho = 7{,}8\cdot10^3$ *кг/м*^{3} соответственно.

20.19. В длинном железном стержне, площадь поперечного сечения которого $S = 1$ *см*^{2}, распространяется по оси *X* плоская упругая волна частотой $\omega = \pi\cdot10^4$ *рад/с* и амплитудой $A = 1$ *мкм*. Учитывая, что модуль упругости железа $G = 2{,}1\cdot10^{11}$ *Н/м*^{2}, а его плотность $\rho = 7{,}8\cdot10^3$ *кг/м*^{3}, определите: *а*) длину волны; *б*) среднюю плотность энергии упругой волны; *в*) вектор Умова в точке с координатой x_0; *г*) интенсивность волны; *д*) средний поток энергии через поперечное сечение стержня.

20.20. В однородном диэлектрике распространяется плоская электромагнитная волна. Амплитуда индукции магнитного поля в волне $B_0 = 10^{-4}$ *Тл*. Определите: *а*) фазовую скорость волны; *б*) амплитуду напряжённости электрического поля E_0; *в*) среднюю плотность энергии волны; *г*) интенсивность волны. Диэлектрическая и магнитная проницаемости равны $\varepsilon = 2{,}25$ и $\mu = 1$.

20.21. Плоская электромагнитная волна распространяется в однородной немагнитной ($\mu = 1$) среде по оси *OX*. Электрическое поле в волне меняется по закону: $\vec{E}(x,t) = E_0\cdot\cos(\omega t - kx)\cdot\vec{e}_y$. Запишите, как зависят от координаты и времени: *а*) индукция магнитного поля; *б*) плотность энергии; *в*) вектор Пойнтинга; *г*) интенсивность волны. Величины E_0, ω и k считайте известными.

20.22. В некоторой точке однородного диэлектрика ($\varepsilon = 2{,}25$; $\mu = 1$) вектор Пойнтинга электромагнитной волны меняется со временем по закону $\vec{S} = S_0\cdot\cos^2(\omega t + \alpha)\cdot\vec{e}_x$ ($S_0 = 2\cdot10^{-2}$ *Вт/м*^{2}). Определите, чему равны в этой точке: *а*) интенсивность волны; *б*) средняя плотность энергии электромагнитного поля; *в*) амплитуды напряжённости электрического и индукции магнитного полей; *г*) зависимости напряжённости электрического и индукции магнитного полей от времени.

20.23. В однородном диэлектрике ($\varepsilon = 4$, $\mu = 1$) распространяется плоская световая волна, амплитуда электрического поля в которой $E_0 = 1$ *В/м*. На её пути находится прозрачная сфера радиусом $R = 10$ *см*. Какая энергия проходит внутрь сферы за время $\tau = 10$ *с* , если коэффициент отражения её внешней поверхности равен $r = 0{,}4$?

20.24. В однородном диэлектрике ($\varepsilon = 4$, $\mu = 1$) распространяется от точечного источника электромагнитная волна. На расстоянии $r_1 = 1$ *м* от него средняя плотность энергии волны $\langle w \rangle = 1 \cdot 10^{-7}$ *Дж/м*^{3}. Определите: *а*) интенсивность волны на расстоянии $r_2 = 3$ *м* от источника; *б*) амплитуды напряжённости электрического поля E_0 и индукции магнитного поля B_0 на этом расстоянии (r_2); *в*) мощность источника P.

20.25. Источником света является вольфрамовая нить длиной $L = 2$ *м*, помещённая в вакуум. Сопротивление нити $R = 50$ *Ом*. Нить подключена к источнику переменного напряжения с амплитудой $u_0 = 100$ *В*. Считая, что в световую энергию переходит только $\eta = 5\%$ выделившейся в нити мощности, определите: *а*) интенсивность волны на расстоянии $r = 10$ *см* от середины нити и *б*) амплитуду напряжённости электрического поля.

20.26. В некоторой точке немагнитной среды ($\mu = 1$) напряжённость электрического поля электромагнитной волны равна:

$\vec{E}\,(t) = E_0 \cdot \cos(\omega t + \alpha) \cdot \vec{e}_y$, а индукция магнитного поля:

$\vec{B}\,(t) = B_0 \cdot \cos(\omega t + \alpha) \cdot \vec{e}_z$, где $E_0 = 1$ *В/м* и $B_0 = 5 \cdot 10^{-7}$ *Тл*.

Определите, исходя из этого, скорость волны и диэлектрическую проницаемость среды.

Раздел второй. ***ВОЛНОВАЯ ОПТИКА***

§21. *Интерференция света*

Интерференция света – это сложение световых волн, сопровождающееся перераспределением энергии светового потока с чередованием максимумов и минимумов интенсивности в различных точках пространства.

Интерференция наблюдается при сложении колебаний, возбуждённых световыми волнами, имеющих постоянную, не зависящую от времени разность фаз в каждой точке пространства. Такие волны называются ***когерентными***. Результатом сложения когерентных волн является образование устойчивой во времени и пространстве *интерференционной картины*. Необходимым условием интерференции световых волн является также неортогональность векторов $\vec{E}$ (и, соответственно, $\vec{B}$) интерферирующих волн.

Пусть в некоторую точку пространства O приходит световая волна. Она возбуждает в этой точке колебания электрического поля, происходящие по закону $E_1(t) = E_{01}\cos(\omega t - \varphi_1)$. Если представить это гармоническое колебание на векторной диаграмме, то оно будет изображаться вектором-колебанием $\mathbf{E}_1$, вращающимся относительно начала координат с угловой скоростью ω против часовой стрелки (см. §18 стр. 181). В момент времени $t = 0$ вектор $\mathbf{E}_1$ на рис. 21.1 направлен под углом φ_1 к полярной оси.

Пусть в ту же точку приходит другая волна, когерентная первой. Колебание, возбуждённое этой волной в данной точке пространства $E_2(t) = E_{20}\cdot\cos(\omega t - \varphi_2)$, в тот же момент изображается вектором-колебанием $\mathbf{E}_2$, направленным под углом φ_2 к полярной

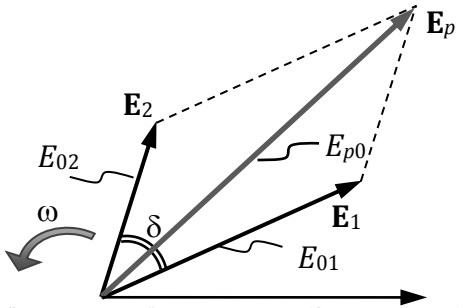


Рис. 21.1

оси. Результирующее колебание напряжённости электрического поля в точке *O* можно найти сложением двух колебаний, т.е. сложением векторов на рис. 21.1. Выражение для амплитуды результирующего колебания $\mathbf{E}_p$ получаем по теореме косинусов:

$$E_{p0}^2 = E_{01}^2 + E_{02}^2 + 2E_{01}E_{02}\cdot\cos\delta\,, \qquad (21.1)$$

где $\delta = (\varphi_2 - \varphi_1)$ – разность фаз колебаний. Учитывая, что интенсивность пропорциональна квадрату амплитуды напряжённости, можно написать:

$$I_p = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2}\cdot\cos\delta\,. \qquad (21.2)$$

Из данного соотношения становится понятным влияние интерференционного слагаемого $2\sqrt{I_1 I_2}\cdot\cos\delta$ на результирующую интенсивность I_p.

Если бы волны были некогерентными, то есть разность фаз колебаний δ изменялась бы со временем случайным образом, среднее значение $\cos\delta$ было бы равно 0, а результирующая интенсивность была бы равна просто сумме интенсивностей двух волн $I_p = I_1 + I_2$ (что означает *отсутствие интерференции*). Если величина δ не зависит от времени, а зависит только от координат точки пространства, где происходит сложение колебаний, то $I_p \neq I_1 + I_2$ (*наблюдается интерференция*). Из (21.2) следует, что при $I_1 = I_2 = I_0$ величина I_p может изменяться от 0 до $4I_0$. В тех точках пространства, где $\delta = \pm 2m\pi$, будут наблюдаться *максимумы интерференции*, а при $\delta = \pm(2m+1)\pi$ – *минимумы* (здесь $m = 0, 1, 2, \ldots$).

Теперь рассмотрим связь между разностью фаз δ колебаний, возбуждённых в точке наблюдения *O* волнами от двух точечных когерентных монохроматических источников ($\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$) с *геометрической* разностью хода $\Delta r = r_2 - r_1$ (см. рис. 21.2). Из уравнения волны $E = E_0\cos(\omega t - kr)$ следует, что

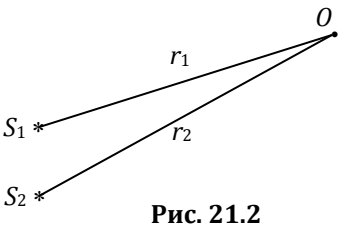


Рис. 21.2

$$\delta = k\cdot\Delta r = \frac{2\pi}{\lambda}\cdot\Delta r\,, \qquad (21.3)$$

где $k = 2\pi/\lambda$ – волновое число. Волны будут усиливать друг друга, если они возбуждают колебания в точке *O*, происходящие в одной фазе ($\delta = \pm 2m\pi$). Таким образом, условие максимумов интерференции:

$$\Delta r = \pm m\lambda. \qquad (21.4, а)$$

Напротив, волны гасят друг дуга, если приходят в точку O в противофазе – $\delta = \pm(2m + 1)\pi$. Тогда условие минимумов:

$$\Delta r = \pm(2m + 1)\lambda/2, \qquad (21.4, б)$$

где число $m = 0, 1, 2, \ldots$ называется *порядком интерференции*.

Подчеркнём, что в условиях (21.4, *а*) и (21.4, *б*) величина λ – это длина волны ***в той среде, в которой распространяются волны***. Она связана с длиной световой волны в вакууме равенством $\lambda = \lambda_0/n$ (где n – показатель преломления среды), поэтому *условия максимумов и минимумов* интерференции можно записать также в виде:

$$\textbf{\textit{max}}: \Delta = m\lambda_0, \quad \textbf{\textit{min}}: \Delta = (2m + 1)\,\lambda_0/2. \qquad (21.4, в)$$

Здесь $\Delta = n\cdot(r_2 - r_1)$ – так называемая ***оптическая разность хода*** волн. Условия (21.4, *в*) можно использовать и в тех случаях, когда интерферирующие волны распространяются в разных средах (с показателями преломления n_1 и n_2 соответственно). В этом случае оптическая разность хода равна

$$\Delta = n_2\cdot r_2 - n_1\cdot r_1. \qquad (21.4, г)$$

Расчёт интерференционной картины в схеме Юнга

В схеме Юнга для получения когерентных волн используется метод разделения одной и той же исходной волны на две. Затем эти две волны проходят разный оптический путь и вновь собираются вместе (см. рис. 21.3). В качестве первичного источника излучения используется точечный монохроматический источник S. Между источником S и экраном $Э$, на котором наблюдается интерференционная картина, располагается преграда с двумя маленькими отверстиями (или узкими щелями), которые играют роль двух вторичных когерентных источников.

Результат сложения волн от вторичных когерентных источников S_1 и S_2 на экране $Э$ представляет собой интерференцион-

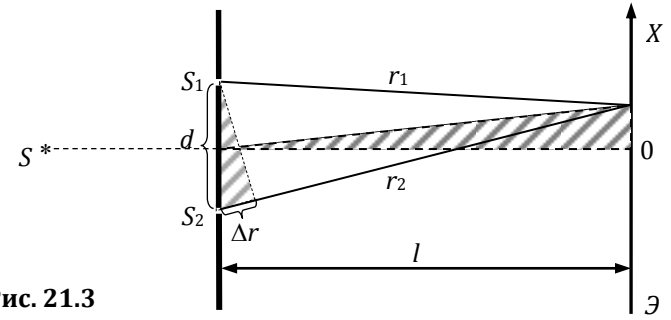


Рис. 21.3

ную картину. Чтобы получить зависимость освещённости на экране от координаты в явном виде, надо рассмотреть результат сложения колебаний: $E_1 = E_{01}\cdot\cos(\omega t - kr_1)$ и $E_2 = E_{02}\cdot\cos(\omega t - kr_2)$. В центральной части картины амплитуды волн практически одинаковы $E_{01} = E_{02} = E_0$. В этом случае результат имеет вид:

$$E_p = 2E_0\cos\left(k\frac{r_1 - r_2}{2}\right)\cdot\cos\left(\omega t - k\frac{r_1 + r_2}{2}\right). \qquad (21.5)$$

Как видим, амплитуда результирующего колебания зависит от разности хода $\Delta r = r_1 - r_2$ интерферирующих волн. Условия максимумов и минимумов интерференции записаны ранее (см. равенства (21.4, *а*) и (21.4, *б*)).

Теперь необходимо связать координату "*x*" точки экрана с разностью хода Δr. Для заштрихованных на рис. 21.3 треугольников в условиях реального эксперимента $l >> d$, x (и $l \approx r_1 \approx r_2$) с высокой точностью выполняется соотношение подобия: $\frac{\Delta r}{d} = \frac{x}{l}$, откуда мы и получаем связь разности хода с координатами точек экрана:

$$\Delta r = \frac{d}{l}\cdot x\,. \qquad (21.6)$$

Теперь можно записать амплитуду результирующего колебания (с учётом $k = 2\pi/\lambda$):

$$E_{p0} = 2E_0\cdot\cos\left(k\frac{d}{2l}\cdot x\right) = 2E_0\cdot\cos\left(\frac{\pi d}{\lambda l}\cdot x\right).$$

Соответственно его интенсивность, определяющая освещённость экрана в произвольной точке экрана с координатой "*x*", описывается функцией (см. рис. 21.4):

$$I(x) = 4I_0\cos^2\left(\frac{\pi d}{\lambda l}\cdot x\right). \qquad (21.7)$$

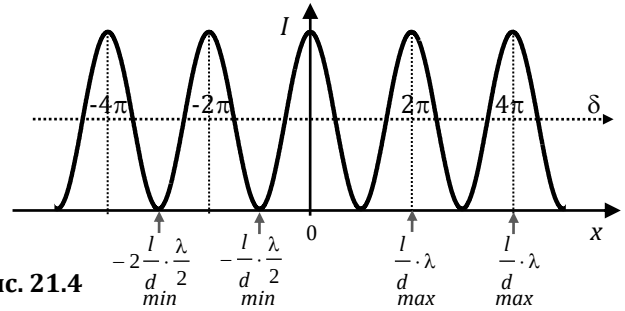


Рис. 21.4

Наблюдение интерференции с помощью билинзы

Когерентные источники света можно получить в результате создания двух изображений точечного источника S в билинзе. Билинза представляет собой разрезанную по диаметру тонкую линзу, обе половины которой раздвинуты на расстояние h. В такой оптической системе возникает два изображения источника света S, волновые поля которых когерентны в некоторой области их перекрытия и они создают интерференционную картину.

Определив из законов геометрической оптики положение вторичных источников S_1 и S_2 (см. рис. 21.5), можно рассчитать параметры интерференционной картины по аналогии со схемой Юнга.

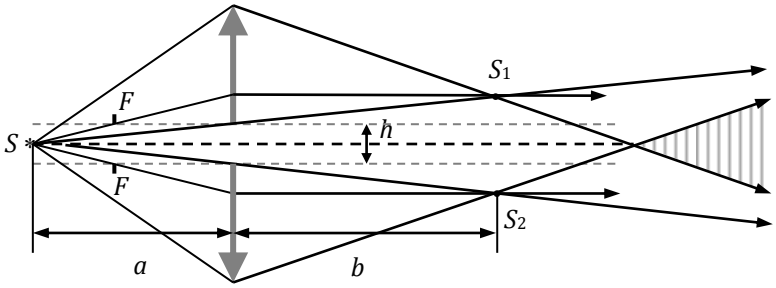


Рис. 21.5

Наблюдение интерференции с помощью бипризмы

Бипризма представляет собой две тонкие призмы с совмещёнными основаниями (см. рис. 21.6). Если угол призмы θ мал, то угол отклонения лучей такой призмой φ при малых углах падения света на плоскую грань равен $\varphi = \theta\cdot(n - 1)$, где n – показатель преломления призмы. Если поместить источник S в виде святящейся щели на некотором расстоянии от бипризмы, то возникнут два мнимых изображения этого источника S_1 и S_2 на расстоянии b от бипризмы (см. рис. 21.7). Расстояние между S_1 и S_2 определяется равенством:

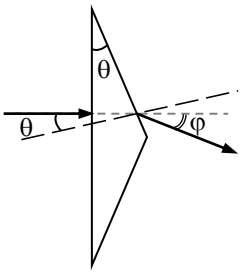


Рис. 21.6.

$$d \approx 2\,b\cdot\varphi = 2\,b\cdot\theta\,(n - 1) \qquad (21.9)$$

В области перекрытия когерентных пучков света от мнимых источников S_1 и S_2 наблюдается интерференционная картина, для расчёта которой также применим подход изложенный выше.

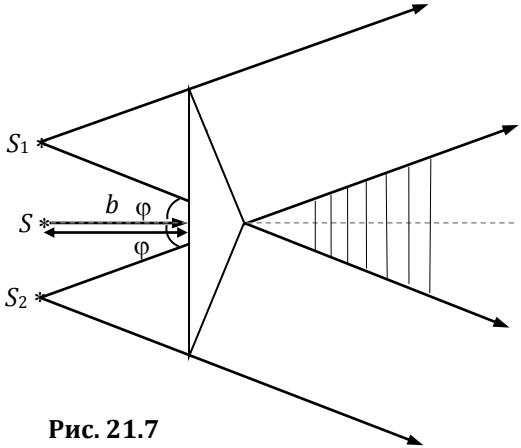


Рис. 21.7

Интерференция в тонких плёнках

При прохождении света через тонкие прозрачные плёнки и отражении света от их поверхностей также возникают когерентные световые волны, которые способны интерферировать. Схема образования «свободной» плоскопараллельной плёнкой когерентных пучков света изображена на рис. 21.8.

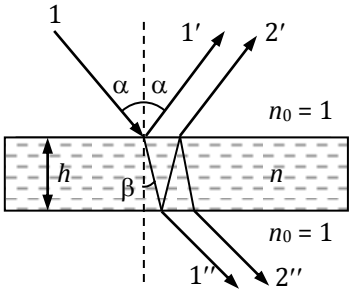


Рис. 21.8

Например, интерференцию в отражённом свете можно наблюдать при сложении когерентных волн, распространяющихся вдоль направлений 1' и 2', отражённых от верхней и нижней поверхностей плёнки. Если плёнка плоскопараллельна, то лучи 1' и 2' могут перекрываться только очень далеко от плёнки (на бесконечности). Для наблюдения интерференционной картины на конечном расстоянии от плёнки на пути лучей 1' и 2' помещают собирающую линзу, а в её фокальной плоскости – экран.

При расчёте интерференционной картины необходимо учитывать, что *при отражении от оптически более плотной среды* (с бóльшим значением n) фаза колебания меняется на π – "*теряется полволны*" ($\lambda_0/2$ для волны 1', если $n > n_0$, где n_0 – показатель преломления окружающей среды). С учётом этого обстоятельства, оптическая разность хода между соответствующими вол-

нами равна $2hn\cdot\cos\beta + \lambda_0/2$, где β – угол преломления. Поэтому условие максимумов интерференции в отражённом свете имеет вид:

$$2hn\cdot\cos\beta = (m - 1/2)\lambda_0 , \qquad (21.10)$$

а условие минимумов:

$$2hn\cdot\cos\beta = m\lambda_0 , \qquad (21.11)$$

где $m = 1, 2, \ldots$; здесь λ_0 – длина волны света в вакууме.

Интерференцию можно наблюдать также и в проходящем свете в области перекрытия пучков 1'' и 2'', прошедших через плёнку (см. рис. 21.8). В этом случае приведённые выше условия максимумов и минимумов меняются местами.

Полосы равного наклона

Если толщина плёнки h постоянна, а на плёнку падает непараллельный пучок света, то разность хода интерферирующих волн определяется углом преломления β, и, следовательно, углом падения света на плёнку α. В этом случае интерференционная картина представляет собой, так называемые ***полосы равного наклона***. При постоянной толщине плёнки интерферирующие волны распространяются вдоль параллельных лучей и говорят, что интерференционная картина локализована на бесконечности или в фокальной плоскости собирающей линзы.

Полосы равной толщины

Если толщина плёнки h непостоянна, то в случае нормального падения света ($\alpha = \beta = 0$; $\cos\beta = 1$), оптическая разность хода волн в отражённом свете:

$$\Delta = 2h\cdot n + \lambda_0/2.$$

Таким образом, при освещении плёнки монохроматическим светом с длиной волны λ_0, условие максимумов интерференции $\Delta = m\lambda_0$ определяет положение так называемых ***полос равной толщины***. При освещении такой плёнки белым светом условие максимумов интерференции для разных длин волн будет соответствовать различным толщинам плёнки, и окраска полос интерференции будет зависеть от толщины плёнки в соответствующем месте.

Кольца Ньютона

Кольца Ньютона представляют собой полосы равной толщины зазора между плосковыпуклой линзой с большим радиусом кривизны и плоской (или сферической) стеклянной поверхно-

стью. В этом случае оптическая разность хода между интерферирующими волнами при наблюдении в отражённом свете равна $\Delta = 2hn + \lambda_0/2$, где h – толщина зазора между стеклянными поверхностями, n – показатель преломления среды, заполняющей зазор (если зазор воздушный, то $n = 1$). В силу осевой симметрии оптической системы интерференционные полосы имеют форму колец.

Задача

21.1. В качестве примера *рассчитаем радиусы колец Ньютона* для случая, когда воздушный зазор образуется между двумя плосковыпуклыми линзами с радиусами кривизны R_1 и R_2 (см. рис. 21.9). В этом случае толщина зазора $h = h_1 + h_2$. Если $h << r$, где r – радиус кольца Ньютона, то $h_1 = r^2/2R_1$ и $h_2 = r^2/2R_2$. Тогда условие образования светлого интерференционного кольца в отражённом свете можно записать так:

$$\Delta = 2h + \lambda_0/2 = m\lambda_0 \quad \text{или}$$

$$r^2 \cdot (1/R_1 + 1/R_2) + \lambda_0/2 = m\lambda_0,$$

где m – номер кольца. Отсюда получаем радиусы светлых колец:

$$r_m = \sqrt{(2m-1)\frac{\lambda_0}{2}\frac{R_1 R_2}{(R_1 + R_2)}}\ .$$

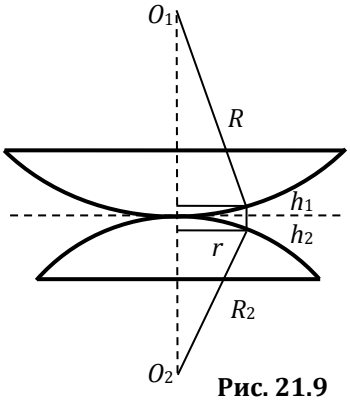


Рис. 21.9

Задачи для самостоятельного решения

21.2. Чему равна амплитуда A колебания, являющегося суперпозицией N некогерентных колебаний одинакового направления и одинаковой амплитуды A_0?

21.3. Две световые волны создают в некоторой точке пространства колебания напряжённости электрического поля в одном направлении, описываемые функциями $E_1(t) = E_0 \cdot \cos(\omega t)$ и $E_2(t) = E_0 \cdot \cos[(\omega + \Delta\omega)t]$, где $\Delta\omega = 0{,}628$ *рад·с*$^{-1}$. Как ведёт себя интенсивность света в этой точке?

21.4. На экран падают по нормали две когерентные световые волны, поляризованные во взаимно перпендикулярных направлениях. Интенсивности этих волн равны I_1 и I_2. Найдите интенсивность света в месте падения волн.

21.5. Определите сдвиг Δx_2 интерференционных максимумов 2-*го* порядка ($m = 2$) в опыте Юнга после заполнения водой пространства между экраном, на котором наблюдается интерференционная картина, и преградой со щелями. Расстояние между экраном и преградой $l = 1$ *м*, расстояние между щелями $d = 1$ *мм*, длина волны света в вакууме $\lambda_0 = 500$ *нм*, показатель преломления воды $n = 4/3$.

21.6. Определите, на сколько полос сместится интерференционная картина в схеме Юнга, если одно из отверстий в преграде перекрыть прозрачной пластинкой толщиной $h = 10$ *мкм* с показателем преломления $n = 1{,}33$. Длина волны света в вакууме $\lambda_0 = 660$ *нм*.

21.7. Плоская световая волна ($\lambda_0 = 450$ *нм*) падает по нормали на преграду с двумя узкими параллельными щелями. На экране, установленном за преградой, наблюдается интерференционная картина. На какую величину $\Delta\lambda$ следует изменить длину волны падающего света, чтобы после заполнения пространства между преградой и экраном водой положение интерференционных полос не изменилось? Показатель преломления воды $n = 4/3$.

21.8. Плоскопараллельный пучок света от лазера проходит через кювету с образцом толщиной $h = 2$ *см*. Какова максимальная разница среднего показателя преломления Δn вещества в кювете в разных местах сечения пучка, если интерференционные измерения показали, что возникающая оптическая разность хода волн в пределах этого сечения не превышает $\Delta = 0{,}1$ *мкм*?

21.9. В интерферометре Жамена используются две идентичные кюветы длиной $l = 6$ см. Прибор позволяет надёжно фиксировать смещение регистрируемой картины на 0,1 ширины интерференционной полосы. Какова при этом минимальная разница Δn в показателях преломления содержимого измерительной кюветы и кюветы сравнения? Длина волны света $\lambda_0 = 600$ *нм*.

21.10. На мыльную плёнку (n = 1,33) падает белый свет. При какой наименьшей толщине плёнки при отражении под углом $\alpha = 45°$ она будет окрашена в жёлтый цвет ($\lambda_ж$ = 600 *нм*)?

21.11. Стеклянная пластинка покрыта прозрачной плёнкой. Для красного света с длиной волны λ_0 = 720 *нм* показатель преломления плёнки n_1 = 1,2, а показатель преломления пластинки n = 1,5. При какой толщине плёнки h_{min} потери на отражение минимальны для света указанной длины волны?

21.12. На плоскую грань стеклянного клина падает по нормали пучок света (λ_0 = 582 *нм*). Угол при вершине клина равен $\theta = 20''$. Какое число светлых интерференционных полос N приходится на единицу длины клина? Показатель преломления стекла n = 1,5.

21.13. Свет с длиной волны λ_0 = 0,54 *мкм* падает по нормали на поверхность стеклянного клина. В отражённом свете наблюдается система интерференционных полос шириной Δx = 0,18 *мм*. Найдите: *а*) угол между гранями клина θ; *б*) степень монохроматичности света $\lambda_0/\Delta\lambda$, если интерференционная картина теряет контрастность на расстоянии более l = 1,5 *см* от ребра клина. Показатель преломления стекла n = 1,5.

21.14. При освещении клиновидной пластинки светом с длиной волны λ_{01} = 0,5 *мкм* интерференционные полосы равной толщины достаточно отчётливо наблюдаются на части пластинки длиной l_1 = 40 *мм*. Определите длину волны света λ_{02} с той же степенью монохроматичности, если интерференционная картина в этом свете наблюдается на части пластинки длиной l_2 = 56 *мм*.

21.15. Плосковыпуклая стеклянная линза, соприкасающаяся выпуклой поверхностью со стеклянной пластинкой, освещается монохроматическим светом. Наблюдение ведётся в отражённом свете. Радиусы двух соседних тёмных колец равны соответственно r_1 = 4,0 *мм* и r_2 = 4,4 *мм*. Радиус кривизны линзы R = 6,4 *м*. Найдите по этим данным порядковые номера колец и длину волны падающего света.

21.16. Плосковыпуклая стеклянная линза, соприкасающаяся выпуклой поверхностью со стеклянной пластинкой, освещается монохроматическим светом. Найдите расстояние Δr_x между 4-м

(m_1) и 16-м (m_2) тёмными кольцами Ньютона, если расстояние между 4-м и 20-м (m_3) тёмными кольцами равно Δr = 4,8 *мм*. Наблюдение ведётся в отражённом свете.

21.17. В установке для наблюдения колец Ньютона пространство между линзой и плоской пластиной заполнено жидкостью. Определите показатель преломления жидкости, если радиус 3-го (m) светлого кольца Ньютона r_3 = 3,65 *мм*. Наблюдение ведётся в проходящем свете. Радиус кривизны линзы R = 10 *м*, длина волны света в вакууме λ_0 = 589 *нм*. Считайте, что показатель преломления жидкости меньше, чем материала линзы и пластины.

21.18. Плосковыпуклая стеклянная линза с радиусом кривизны R = 45 *см* соприкасается выпуклой поверхностью со стеклянной пластинкой. При этом в отражённом свете радиус некоторого тёмного кольца r_1 = 5 *мм*. Каким стал радиус этого кольца r_2, если линзу отодвинуть от пластинки на расстояние h = 10 *мкм*?

21.19*. На вершине сферической плосковыпуклой стеклянной линзы имеется сошлифованный плоский участок радиусом r_0 = 3 *мм*, которым она соприкасается с плоской стеклянной пластиной. Радиус кривизны линзы R = 200 *см*. Кольца Ньютона наблюдают в отражённом свете гелий-неонового лазера с длиной волны λ_0 = 633 *нм*. Найдите радиус шестого (m = 6) светлого кольца.

21.20*. Две соприкасающиеся, имеющие одну и ту же оптическую ось, тонкие линзы – одна двояковыпуклая, другая двояковогнутая – образуют систему с оптической силой D = 0,5 *дптр*. В свете с λ_0 = 450 *нм*, отражённом от этой системы, наблюдаются кольца Ньютона. Определите радиус десятого (m = 10) тёмного кольца. Показатель преломления материала n = 1,5. Оптическая сила такой системы рассчитывается по формуле: $D = 2(n - 1)\cdot(1/R_1 - 1/R_2)$, где R_1, R_2 – радиусы кривизны выпуклой и вогнутой линз соответственно ($R_2 > R_1$). (Примечание: см. задачу 21.1)

21.21*. При наблюдении колец Ньютона вдали от их центра ширина N = 10 колец оказывается равной d_1 = 0,6 *мм*. Следующие 10 колец имеют ширину d_2 = 0,4 *мм*. Наблюдение проводится в отражённом свете. Определите радиус кривизны поверхности линзы R, если длина волны используемого монохроматического источника света равна λ_0 = 600 *нм*.

21.22. Источник света диаметром D = 30 *см* находится от места наблюдения на расстоянии L = 200 *м*. Спектр излучения источника имеет диапазон длин волн от λ_1 = 490 *нм* до λ_2 = 510 *нм*. Для этого источника оцените: *а*) длину когерентности $l_{ког}$, *б*) время когерентности $\tau_{ког}$, *в*) радиус когерентности $r_{ког}$.

21.23. Оцените радиус когерентности $r_{ког}^{(C)}$ света, приходящего от Солнца на Землю. Угловой размер Солнца примите равным β = 0,01 *рад*, и считайте, что максимум спектра излучения Солнца приходится на длину волны λ_0 = 500 *нм*.

21.24*. Оцените предельную ширину b_{max} щелей, используемых в опыте Юнга, при которой интерференционные полосы перестают быть различимы. Параметры l, d и λ считайте известными. *Указание*: критерием потери видности можно считать сдвиг интерференционной картины от крайних нитевидных вторичных источников в пределах каждой щели, при котором максимум одной картины накладывается на минимум для другой.

§22. *Дифракция Френеля*

Если свет падает на непрозрачное препятствие, то в результате дифракции он частично может проникать в область геометрической тени. При этом на экране, поставленном за преградой, вблизи границ проекции её краёв наблюдаются чередования максимумов и минимумов освещённости, как и при интерференции двух когерентных световых пучков. Это не случайно – дифракция света является по существу результатом интерференции волн от многих (так называемых вторичных) источников.

Основополагающим для понимания явления дифракции света является ***принцип Гюйгенса–Френеля***, который состоит из двух частей.

1. *Принцип Гюйгенса.* При объяснении законов геометрической оптики Х. Гюйгенс исходил из волновых представлений о природе света. Он сформулировал принцип, согласно которому каждую точку пространства, до которой дошло возмущение световой волны (волновой фронт), можно рассматривать как точечный источник вторичной волны. Огибающая всей совокупности волновых фронтов сферических волн от этих вторичных источников определяет форму и положение волнового фронта результирующей световой волны в последующие моменты времени.

Используя принцип Гюйгенса, можно определять ход световых лучей, как в однородной прозрачной среде, так и при отражении и преломлении света на границах раздела прозрачных сред с различными оптическими свойствами.

2. *Дополнение Френеля*. Для расчёта дифракционных картин в различных случаях Френель дополнил принцип Гюйгенса тем, что учёл ***когерентность*** вторичных волн и возможность их ***интерференции*** в области пространства за препятствием.

Итак, ***принцип Гюйгенса-Френеля*** применительно к задаче дифракции света включает два положения:

1. Каждый малый элемент волнового фронта, не закрытый препятствием, может рассматриваться как ***самостоятельный источник*** вторичных ***волн***, распространяющихся за преградой.

2. Интенсивность света в любой точке пространства за препятствием можно найти, ***вычислив результат интерференции когерентных вторичных волн*** в этой точке.

Таким образом, расчёт дифракционной картины на экране за препятствием сводится к определению результата интерференции волн от многих вторичных источников в каждой точке экрана. Решению этой задачи о сложение гармонических колебаний значительно помогает уже хорошо знакомый нам метод векторных диаграмм, а в ряде случаев и специальный метод зон Френеля.

Дифракция Френеля. Зоны Френеля

Зоны Френеля – это области волнового фронта, в пределах открытой части препятствия, выбираемые таким образом, что волны от вторичных источников на границах соседних зон возбуждают в точке наблюдения колебания, которые происходят в противофазе (т.е. имеют разность фаз π). Соответственно, разность хода таких волн равна $\lambda/2$. Метод зон Френеля позволяет получить достаточно точные представления об интенсивности света в центре дифракционной картины при дифракции на круглом отверстии или непрозрачном круглом диске малых размеров.

Поясним, как это делается на примере *дифракции плоской монохроматической волны на круглом отверстии*. Форма препятствия диктует и разбиение фронта волны на вторичные источники – тонкие кольца, и вид зон Френеля. *Вторичные источники объединяются в зоны*, которые также представляют собой *кольцевые участки волнового фронта*, совпадающего с плоскостью

преграды. Первая зона Френеля имеет форму круга. Центр всех зон Френеля (точка *O*) находится в центре круглого отверстия или диска.

Несложная математическая процедура нахождения радиусов зон Френеля r_m (m – номер зоны) описана во многих учебных пособиях*). Она приводит к следующему результату:

$$r_m = \sqrt{m\lambda l}\,, \qquad (22.1)$$

где l – расстояние от преграды до экрана.

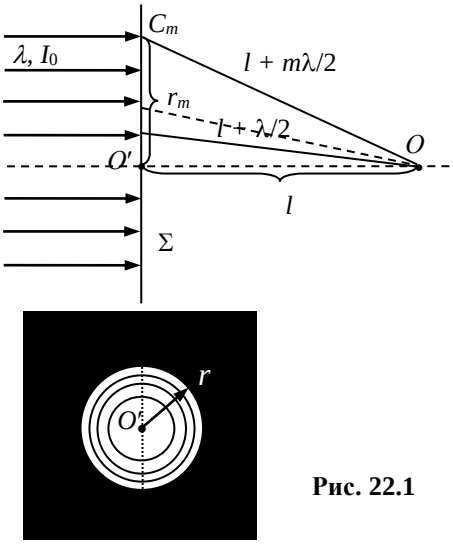


Рис. 22.1

Примечание: при расчёте радиусов зон Френеля в случае падения на препятствие сферической волны от точечного источника вместо расстояния l в выражение под корнем входит величина, также имеющая размерность расстояния $l^* = \dfrac{Ll}{L+l}$, где l – по-прежнему, расстояние от преграды до экрана, а L – от источника до преграды.

Чтобы применить прин-цип Гюйгенса-Френеля для решения нашей задачи, вспомним, что каждая зона Френеля состоит из большого числа (n) узких кольцевых вторичных источников. Проведём сложение колебаний, которые возбуждают в центре дифракционной картины (в точке *O* на рис. 22.1) волны, пришедшие от каждого из них. Воспользуемся для этого векторной диаграммой. Напомним, что, как отмечалось ранее (см. §18, 19, 20), векторная диаграмма есть представление гармонических колебаний в полярных координатах. Соответствующее колебание изображается в виде вектора, вращающегося против часовой стрелки с угловой скоростью ω. Угол поворота этого вектора относительно полярной оси определяет фазу, а его длина равна амплитуде соответствующего колебания.

Колебание, возбуждаемое в центре дифракционной картины

*) Подробнее см., например, с. 344–353 по ссылке на с. 26 данного пособия.

волной от первого вторичного источника (расположенного в самом центре первой зоны Френеля) изобразим вектором-колебания $\mathbf{E}_1^{(\mathrm{I})}$, второго участка (кольцевого) – $\mathbf{E}_2^{(\mathrm{I})}$ и т.д. (см. рис. 22.2). Волны от каждого следующего источника проходят до точки *O* бо̀льший путь, поэтому возбуждаемые ими колебания в точке *O* немного запаздывают по фазе δ_i. Фазовому запаздыванию соответствует поворот вектора $\mathbf{E}_i^{(\mathrm{I})}$ *) *по часовой стрелке* на угол δ_i. Вектор $\mathbf{E}_n^{(\mathrm{I})}$, от последнего участка первой зоны, повернут на угол $\delta_n = \pi$ по отношению к вектору $\mathbf{E}_1^{(\mathrm{I})}$, так как соответствующее колебание *отстаёт по фазе на* π. В итоге векторная диаграмма для случая, когда открыта только одна первая зона Френеля, получается в виде полуокружности – см. рис. 22.2,*а*. Результирующее колебание представлено на рис. 22.2,*а* вектором $\mathbf{E}^{(\mathrm{I})}$, полученным суммированием всех векторов от *n* вторичных источников первой зоны.

Отметим, что амплитуда колебаний в точке *O* *при открытой*

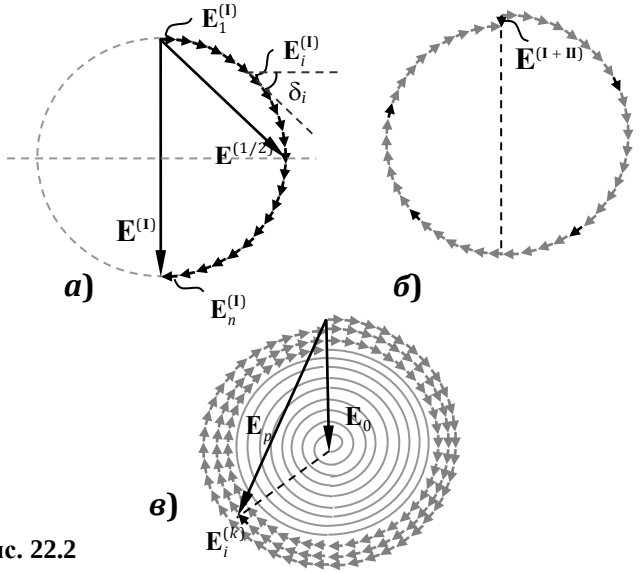


Рис. 22.2

*) $\mathbf{E}_i^{(\mathrm{I})}$ соответствует колебаниям напряжённости электрического поля волны, приходящей в точку *B* от *i*-го вторичного источника (нижний индекс *i*) первой зоны Френеля (верхний индекс **I**).

только одной первой зоне в два раза больше, чем при полностью открытом волновом фронте (см. рис. 22.2,*а* и *в*). В центре экрана наблюдается светлое пятно, интенсивность которого почти в 4 раза больше, чем в отсутствии преграды!

Аналогично достраивается векторная диаграмма и для остальных вторичных источников, оказавшихся в пределах отверстия. Вектор, соответствующий результирующему колебанию, получаем суммированием всех векторов $\mathbf{E}_i^{(\mathbf{k})}$ – он соединяет начало первого вектора $\mathbf{E}_1^{(\mathbf{I})}$ с концом последнего $\mathbf{E}_i^{(\mathbf{k})}$ (рис. 22.2,*в*).

Например, если открыто две первых зоны Френеля, амплитуда результирующего колебания $\mathbf{E}^{(\mathbf{I+II})}$ близка к нулю (рис. 22.2,*б*) – наблюдается минимум интенсивности. При приближении экрана к препятствию с отверстием количество открытых зон Френеля растёт, при этом в центре экрана наблюдается чередование максимумов (при открытом нечётном числе зон Френеля) и минимумов интенсивности (открыто чётное число зон). Векторная диаграмма рис. 22.2,*в* соответствует полностью открытому волновому фронту (препятствие отсутствует, зон Френеля очень много).

На диаграммах рис. 22.2,*б,в* учтено, что с увеличением номера зоны длины векторов $\mathbf{E}_i^{(\mathbf{k})}$ постепенно уменьшаются, т.к. каждый следующий источник находится от точки *O* несколько дальше, чем предыдущий. Соответственно, с увеличением номера зоны уменьшается диаметр соответствующей полуокружности на векторной диаграмме.

При значительном удалении экрана ($l > r^2/\lambda$, где r – радиус отверстия) открытой остается только часть первой зоны Френеля – например, её половина – результирующий вектор $\mathbf{E}^{(1/2)}$ на рис. 22.2,*а* имеет длину $\sqrt{2}\cdot E_0$. Интенсивность вдвое больше, чем интенсивность падающего света I_0 (т.е. при открытом волновом фронте), но вдвое меньше, чем при открытой только одной 1-й зоне.

При дальнейшем увеличении расстояния l чередований максимумов и минимумов интенсивности в центре дифракционной картины не происходит, *яркость светлого пятна напротив отверстия уменьшается монотонно*.

Задачи для самостоятельного решения

22.1. Определите радиус m – ой зоны Френеля r_m при падении на круглое отверстие плоской волны длиной λ. Расстояние от отверстия до экрана равно l. Докажите, что площади всех зон Френеля одинаковы.

22.2. На преграду с круглым отверстием падает плоская световая волна длины $\lambda = 500$ *нм*. Интенсивность в центре дифракционной картины в $k = 2$ раза больше, чем в отсутствии преграды. При каком минимальном радиусе отверстия это возможно, если экран расположен на расстоянии $l = 1$ *м* за препятствием.

22.3. Дифракционная картина наблюдается на экране, расположенном на расстоянии $2l$ от точечного источника монохроматического света ($\lambda = 500$ *нм*). На расстоянии $L = l$ от источника помещён круглый непрозрачный диск диаметром $d = 1$ *мм*. Определите расстояние l, если преграда закрывает только первую зону Френеля. Что будет наблюдаться в центре экрана?

22.4. На преграду с круглым отверстием падает плоская световая волна, интенсивность которой I_0, а длина волны λ. Экран расположен на таком расстоянии за преградой, что для центра дифракционной картины открыта лишь первая зона Френеля. Отверстие наполовину закрывают тонкой прозрачной пластинкой в форме полукруга толщиной h и показателем преломления n. Какова интенсивность света в центре дифракционной картины?

22.5*. Плоская монохроматическая волна (длина волны λ) падает по нормали на прозрачную пластинку с показателем преломления n. В пластинке высверливается круглая цилиндрическая выемка, радиус которой равен радиусу полутора зон Френеля для точки, находящейся в центре экрана. Определите минимальную глубину выемки h, при которой интенсивность в центре дифракционной картины будет: *а*) максимальной, *б*) минимальной, *в*) равной интенсивности падающей волны. Каковы величины максимальной и минимальной интенсивностей, если интенсивность падающего на пластинку света I_0?

22.6. Точечный источник света (длина волны $\lambda = 500$ *нм*) расположен на расстоянии $L = 1$ *м* перед преградой с круглым отвер-

стием радиусом r = 1 *мм*. Найдите расстояние l от преграды до точки наблюдения в центре дифракционной картины за преградой, для которой открыто m = 3 зоны Френеля.

22.7. Между точечным источником света и экраном поместили диафрагму с круглым отверстием, радиус которого r можно изменять. Расстояния от источника до диафрагмы и от диафрагмы до экрана равны соответственно L = 1 *м* и l = 1,4 *м*. Определите длину волны света λ, если один из максимумов освещённости в центре дифракционной картины наблюдается при радиусе отверстия r_1 = 1 *мм*, а при его увеличении следующий максимум возникает при радиусе r_2 = 1,1 *мм*.

22.8. Плоская световая волна (λ = 600 *нм*) падает нормально на поверхность стеклянного диска (n = 1,6), который закрывает полторы зоны Френеля для точки наблюдения O за диском на его оси. При какой минимальной толщине этого диска интенсивность в точке O будет максимальной?

22.9. Непрозрачная пластинка с отверстием, диаметр которого d = 1 *мм*, освещается удалённым точечным источником света с длиной волны λ = 500 *нм*. Найдите расстояние l от отверстия до экрана, при котором будет наблюдаться наибольшая освещённость в его центре.

22.10. На преграду с круглым отверстием радиуса r падает плоская световая волна. Как изменяется интенсивность I в центре дифракционной картины на экране за преградой по мере приближения экрана к отверстию? Постройте примерный график зависимости $I(x)$, где x – расстояние от преграды до экрана. Длина волны падающего света λ, а его интенсивность I_0. Сначала экран расположен очень далеко от преграды.

22.11. Определите минимальную толщину прозрачной плёнки с показателем преломления n, которой надо перекрыть чётные зоны Френеля для получения фазовой зонной пластинки. Длина волны света λ.

22.12. Плоская монохроматическая волна, интенсивность которой I_0, падает по нормали на непрозрачный диск. Диаметр диска равен диаметру первой зоны Френеля для точки наблюдения

O напротив центра отверстия за препятствием. Какой станет интенсивность света в точке *O*, если: *а*) диск заменить на полукруглую пластинку того же диаметра; *б*) у диска удалить часть внешней половины первой зоны Френеля, не помеченную на рис. 22.3 штриховкой.

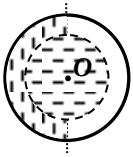


Рис. 22.3

22.13. Плоская монохроматическая волна падает нормально на непрозрачный экран с круглым отверстием. Интенсивность волны I_0. Какова интенсивность света *I* за экраном в точке *O*, для которой отверстие открывает: *а*) первую зону Френеля (см. рис. 22.4, *а*); *б*) внутреннюю (без штриховки на рис. 22.4, *б*) половину первой зоны Френеля; *в*) часть первой зоны Френеля закрыта непрозрачным полукругом (заштрихованным на рис. 22.4, *в*).

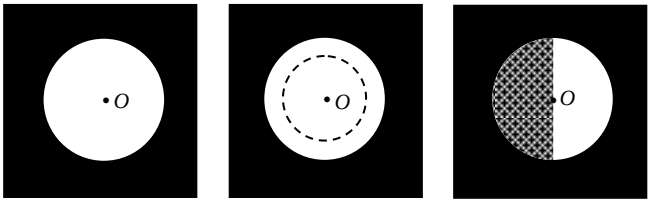


Рис. 22.4 ***а)*** ***б)*** ***в)***

22.14. Изобразите векторную диаграмму для случая, когда внешнюю половину первой зоны Френеля (см. рис. 22.4, *б*) перекрывают *тонкой* прозрачной пластинкой толщиной *h*. *а*) При какой минимальной толщине пластинки *h* интенсивность в центре дифракционной картины *O* будет минимальной? *б*) будет максимальной *в*) не изменится? Длина волны света λ = 500 *нм*, показатель преломления пластинки *n* = 1,5.

§23. *Дифракция Фраунгофера на щели*

Дифракцию Фраунгофера условно называют дифракцией в параллельных лучах. Это означает, что источник света и экран, на котором наблюдается интерференционная картина, расположены очень далеко от преграды (более строгое определение дифракции Фраунгофера будет дано в конце этого параграфа). На практике для наблюдения дифракционной картины Фраунгофе-

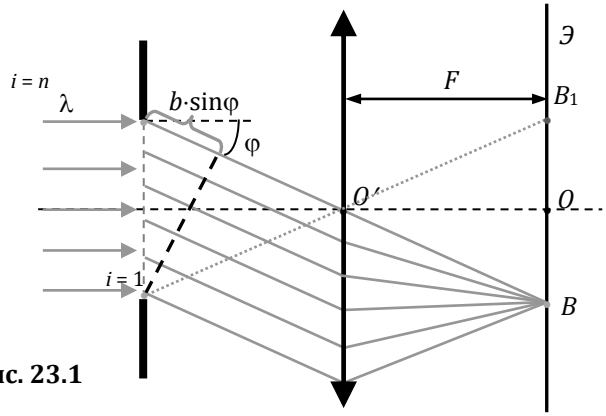


Рис. 23.1

ра чаще всего используют собирающую линзу, в фокальной плоскости которой расположен экран (см. рис. 23.1).

Пусть на протяжённую щель шириной b падает по нормали плоская монохроматическая волна. В соответствии с принципом Гюйгенса-Френеля, фронт волны в плоскости щели можно разбить на очень узкие полоски – нити, *параллельные краям щели*, являющиеся источниками вторичных волн (в данном случае цилиндрических). Как и в случае дифракции Френеля, вид дифракционной картины можно проанализировать с помощью метода векторных диаграмм. Такая процедура содержится во многих учебных пособиях,[*)] поэтому здесь мы остановимся лишь на основных её результатах.

В центр дифракционной картины (точка O, угол дифракции $\varphi = 0$) волны, испущенные всеми вторичными источниками, приходят в одной фазе – здесь наблюдается самый интенсивный центральный, или нулевой, максимум. Область центрального максимума ограничена двумя симметрично расположенными минимумами первого порядка. Волны от крайних вторичных источников ($i = 1$ и $i = n$, см. рис. 23.1), расположенных в пределах щели, приходят в эти точки (B и B_1) со сдвигом фаз, равным 2π – векторная диаграмма для этих углов дифракции сворачивается в почти окружность. Это означает в свою очередь, что разность хода для соответствующих лучей ($b\cdot\sin\varphi$) равна λ. При этом число откры-

---

[*)] См., например, А.В. Зотеев, С.Н. Козлов “Колебания и волны. Волновая оптика” с. 188–198.

[**)] Они имеют на этот раз форму равновеликих полосок, параллельных краям щели. Иногда такие зоны называются зонами Шустера.

тых зон Френеля[**)], видимых из минимумов первого порядка, равно двум. Следующие минимумы дифракции второго, третьего и т.д. порядков наблюдаются в точках, для которых открыто 4, 6 и т.д. зон Френеля. Соответственно, из максимумов дифракционной картины первого, второго и т.д. порядков видны 3, 5 и т.д. (нечётное число) зон Френеля. Углы, под которыми наблюдаются максимумы, определяются равенством $b\cdot\sin\varphi = \pm(m + ½)\cdot\lambda$, где m = 1, 2, 3, ... – порядок дифракционного максимума.

Таким образом, вместо узкого изображения щели в фокальной плоскости линзы наблюдается дифракционная картина, с

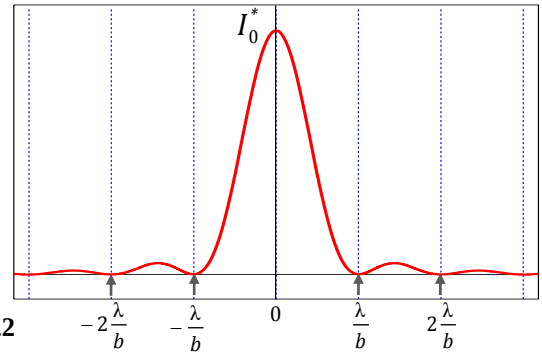


Рис. 23.2

распределением интенсивности, представленным на рис. 23.2. Более строгий количественный анализ позволяет получить точную функцию распределения интенсивности светового потока за препятствием в зависимости от угла дифракции φ :

$$I = \frac{\sin^2 x}{x^2}\cdot I_0^*,$$

где $x = \dfrac{\pi b\cdot\sin\varphi}{\lambda}$, а I_0^* – ***интенсивность*** *в самом* ***центре*** дифракционной картины (т. е. в точке O – при $\varphi = 0$).

Площадь под кривой зависимости интенсивности от координаты $I(x)$ пропорциональна полному световому потоку, прошедшему через щель.

Наиболее важным параметром дифракционной картины от щели является угловое положение дифракционных минимумов первого порядка: $\sin\varphi_1 = \pm\lambda/b$. В частности, оно определяет ***разрешающую способность*** оптических приборов.

В зависимости от соотношения трёх величин: размера отверстия b, расстояния от препятствия до экрана l и длины волны света λ может наблюдаться дифракция ***Френеля*** либо ***Фраунгофера***. Подчеркнём, что тип дифракции ***не определяется*** формой *препятствия* (например, щель или круглое отверстие), а также от того, *используется линза при регистрации дифракционной картины или нет.* Для решения многих практических задач дифракционными явлениями вообще можно пренебречь и пользоваться представлениями ***геометрической оптики***.

а) Приближение геометрической оптики

Если на достаточно широкую щель ($b >> \lambda$) падает параллельный пучок света, то по законам геометрической оптики на экране за препятствием должна наблюдаться светлая полоса шириной b. Угловой размер этой полосы «с точки зрения» щели $\beta \approx b/l$. Очевидно, что приближение геометрической оптики будет достаточно хорошим, если величина β много больше дифракционного размытия изображения щели, определяемого положением первых минимумов $\varphi_1^{min} \approx \lambda/b$ (см. рис. 23.2), т.е. при выполнении условия:

$$\frac{b^2}{l\lambda} >> 1. \qquad (23.1)$$

б) Область дифракции Фраунгофера

Для того чтобы наблюдать дифракцию Фраунгофера, нужно удалить экран от щели на очень большое расстояние (только при этом условии дифракционная картина формируется параллельными лучами). Для этого должно выполняться неравенство, обратное (23.1):

$$\frac{b^2}{l\lambda} << 1. \qquad (23.2)$$

Это соотношение может быть интерпретировано с использованием представлений о зонах Френеля. Действительно, разность хода между волнами, приходящими от крайних вторичных источников внутри щели, равна $b\cdot\sin\varphi$ (см. рис. 23.1). Вблизи центра экрана величина $\sin\varphi \cong b/l$, поэтому $b\cdot\sin\varphi \cong b^2/l$ и, следовательно, условие (23.2) означает, что из области *вблизи центра дифракционной картины видно менее одной зоны Френеля*. Соответственно, условие (23.1) показывает, что приближение геометрической оптики оказывается достаточно хорошим, когда щель (или отверстие) открывает очень много зон Френеля.

в) Область дифракции Френеля. Дифракция Френеля представляет собой промежуточный случай между двумя ситуациями, описанными в пунктах (*а*) и (*б*). *Дифракция Френеля* наблюдается, когда *из области* ***вблизи центра*** *дифракционной картины видно небольшое число (несколько) зон Френеля*. При этом выполняется условие:

$$\frac{b^2}{l\lambda} \sim 1. \qquad (23.3)$$

Таким образом, если экран расположен настолько близко к щели (или круглому отверстию), что выполняется неравенство (23.1), достаточно хорошим оказывается приближение *геометрической оптики.* Соответственно, наблюдатель видит на экране светлую полосу (изображение щели) со слегка смазанными краями. При постепенном удалении экрана от препятствия начинает выполняться соотношение (23.3) и появляется характерная картина *дифракции Френеля*. *В центре экрана при этом может наблюдаться как минимум, так и максимум* интенсивности (в зависимости от того, чётное или нечётное число зон Френеля открывает препятствие). Наконец, если экран находится настолько далеко от щели, что справедливо неравенство (23.2), в центре экрана *всегда* наблюдается *максимум* интенсивности, характерный для *дифракции Фраунгофера*.

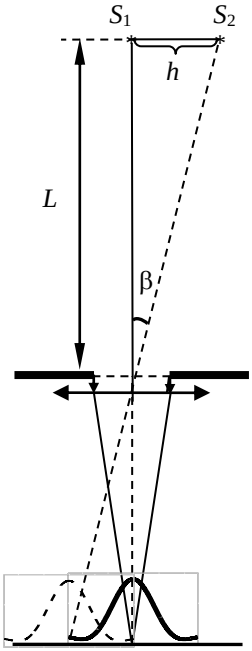


Рис. 23.3

г) Разрешающая способность оптических приборов

Иногда говорят, что «дифракция наблюдается, когда размеры отверстия соизмеримы с длиной волны». Для большинства оптических приборов диаметр объектива (входное отверстие оптического прибора) настолько велик, что это условие заведомо не соблюдается (т.е. $b >> \lambda$). Однако угловой размер изображения точечного объекта из-за дифракционного размытия не может быть меньше величины $2\varphi_1 \cong 2\lambda/b$. Поэтому два точечных источника, находящиеся друг от друга на расстоянии h, а от объектива оптического прибора – на расстоянии L, будут различимы (*пространственно разреше-*

ны), только если угловое расстояние между ними β больше половины углового размера дифракционного размытия изображений, т.е. при $h/L > \lambda/b$ (см. рис. 23.3). Таким образом, эти два точечных источника будрут восприниматься как отдельные, если выполняется следующее *условие разрешения*:

$$h > \frac{L\lambda}{b}. \qquad (23.4)$$

Заметим, что этому условию соответствует неравенство $b > r_{ког} = \lambda \cdot L/h$ (размер отверстия больше радиуса когерентности).

В заключение поясним, что неравенство (23.4) было получено как следствие рассмотрения дифракции Фраунгофера на щели. Расчёт дифракции Фраунгофера *на круглом отверстии* даёт небольшую поправку – угловое положение первого минимума определяется соотношением $d \cdot \sin\varphi_1^{min} = 1{,}22\lambda$. Соответственно, для оптических приборов с круглым входным отверстием (форма объектива) вместо (23.4) следует использовать более точное соотношение

$$h > 1{,}22 \cdot \frac{L\lambda}{d}. \qquad (23.4, a)$$

Учитывая, однако, приближённый характер соотношений (23.4) и (23.4, *а*), при решении задач мы предлагаем использовать более простую оценку возможности пространственного разрешения оптических приборов с помощью неравенства (23.4).

Задачи для самостоятельного решения

23.1. Как будет изменяться дифракционная картина в фокальной плоскости линзы при продольном и поперечном смещении щели относительно линзы?

23.2. На щель шириной b = 0,4 *мм*, установленную на расстоянии l = 2,5 *м* от экрана, падает по нормали плоская световая волна с λ = 600 *нм* и с интенсивностью I_0 = 100 *мВт/см*^{2}. *а*) Какой вид дифракции наблюдается в этом случае? *б*) Оцените интенсивность в центральной точке дифракционной картины I_0^*.

Указание. *Для оценки указанной интенсивности форму центрального максимума считайте приближённо близкой к треугольной.*

23.3. Определите тип дифракции и ширину центрального дифракционного максимума Δx при падении плоской волны с длиной λ = 500 *нм* на щель шириной b = 0,5 *мм*. Дифракционная картина наблюдается на расстоянии l = 5 *м* за препятствием.

23.4. Пользуясь методом векторных диаграмм, найдите отношение интенсивностей максимумов нулевого I_0^* и первого порядка I_1 при дифракции Фраунгофера на щели.

23.5*. Применяя метод векторных диаграмм, найдите точный вид углового распределение интенсивности света $I(\varphi)$ при дифракции Фраунгофера на щели шириной b плоской монохроматической световой волны интенсивности I_0.

23.6. Найдите ширину радужного канта центрального максимума Δx в фокальной плоскости линзы с фокусным расстоянием $F = 1$ *м* при наблюдении дифракции Фраунгофера белого света на щели шириной $b = 0{,}5$ *мм*. Считайте, что спектр лежит в диапазоне от $\lambda_ф = 400$ *нм* до $\lambda_{кр} = 760$ *нм*.

23.7. Плоскопараллельный пучок света с длиной волны λ падает по нормали на щель шириной $b = 6\lambda$. Под каким углом φ_3^{min} будет наблюдаться третий дифракционный минимум?

23.8. На узкую щель падает по нормали параллельный пучок монохроматического света. Ширину щели увеличивают в 2 раза. Как изменятся угловая ширина $\Delta\varphi$ и высота I_0^* центрального дифракционного максимума?

23.9. Дифракция Фраунгофера на щели шириной b наблюдается в фокальной плоскости собирающей линзы. Получите точное выражение для ширины центрального дифракционного максимума Δx. Длина волны света λ, фокусное расстояние линзы F.

23.10. На пути плоской световой волны установлена непрозрачная преграда, в которой вырезана узкая щель шириной $b = 0{,}5$ *мм*. За преградой на расстоянии l расположен экран, на котором наблюдается дифракционная картина. Найдите условия наблюдения дифракции Френеля и дифракции Фраунгофера. При каком условии можно использовать приближение геометрической оптики? Длина волны света равна $\lambda = 500$ *нм*.

23.11. Определите наименьшее расстояние h между двумя точками на Луне, которые можно различить с помощью телескопа. Диаметр фокусирующего зеркала телескопа $d = 5$ *м*. Считайте,

что наблюдение ведётся вблизи длины волны света $\lambda = 0{,}5$ *мкм*. Расстояние до Луны примите равным $L \approx 4 \cdot 10^5$ *км*.

23.12. Может ли охотник различить невооруженным глазом двух волков, находящихся от него на расстоянии $L = 5$ *км*? Или он примет их за одного медведя? Расстояние между волками $h = 1$ *м*. Диаметр зрачка глаза примите равным $d = 4$ *мм*.

23.13. На преграду со щелью шириной $b = 0{,}5$ *мм* падает световая волна ($\lambda = 500$ *нм*), распространяющаяся от нитевидного источника, параллельного щели и расположенного на расстоянии $L_1 = 0{,}5$ *м* от неё. За преградой на расстоянии $l = 6$ *м* находится экран. Как можно классифицировать дифракцию на щели в этом случае? Изменится ли тип дифракции при удалении источника на расстояние $L_2 = 10$ *м* от щели?

23.14*. На преграду с двумя параллельными щелями падает по нормали плоская световая волна (длина волны λ). Ширина каждой щели b, расстояние между центрами щелей $d = kb$, где $k = 4$. Изобразите зависимость интенсивности света от синуса угла дифракции на экране, расположенном далеко от преграды. Как будет изменяться вид этой зависимости при уменьшении ширины щелей (увеличении k)?

23.15*. Одну из щелей в задаче 23.14 закрыли прозрачной пластинкой толщиной $h = 1{,}5$ *мкм.* Как изменился при этом вид дифракционной картины? Длина волны света $\lambda = 500$ *нм*, показатель преломления пластины $n = 1{,}5$.

23.16. На преграду со щелью шириной $b = 10$ *мкм* падает под углом к нормали $\varphi_0 = 30°$ плоская световая волна ($\lambda = 500$ *нм*). Найдите угловые положения минимумов φ_1 и φ_2, ограничивающих центральный максимум дифракционной картины относительно нормали к преграде и относительно оси падающего на преграду луча света (φ_1' и φ_2').

23.17. На преграду со щелью шириной $b_1 = 10\cos(30°)$ *мкм* = 8,66 *мкм* падает по нормали плоская световая волна ($\lambda = 500$ *нм*). Найдите угловые положения первых дифракционных минимумов. Сопоставьте их с положениями первых дифракционных минимумов относительно оси падающего на преграду света в предыдущей задаче.

23.18. На преграду со щелью шириной b = 0,1 *мм* падает по нормали плоская световая волна (λ = 500 *нм*). Половина щели перекрыта прозрачной плёнкой с показателем преломления n = 1,5. Определите минимальную толщину плёнки h, при которой освещённость на экране напротив центра щели будет минимальной. Определите также угловое положение максимумов освещённости, ближайших к центру дифракционной картины.

23.19. На узкую отражающую полоску шириной b падает под углом α = 30° к нормали плоская световая волна (λ = 500 *нм*). Найдите, в пределах каких углов $\beta_1 < \beta < \beta_2$ распространяется отражённый этой полоской свет. Рассмотреть случаи, когда: *а*) b = 0,1 *мм*; *б*) b = 10 *мкм*; *в*) b = 1 *мкм*.

§24. *Дифракционная решётка*

Дифракционная решётка представляет собой систему N параллельных щелей шириной b, расположенных в одной плоскости на равном расстоянии d друг от друга. Схема наблюдения дифракции Фраунгофера на решётке представлена на рисунке 24.1.

Дифракционная картина в этом случае является результатом интерференции волн от вторичных источников из всех N щелей. При этом для направления дифракции φ разность хода волн для любой пары источников, расположенных в соседних щелях на расстоянии d друг от друга (см. лучи 1 и 1′, n и n' на рис. 24.1), составляет $d\cdot\sin\varphi$. Линза фокусирует все эти лучи в одной точке

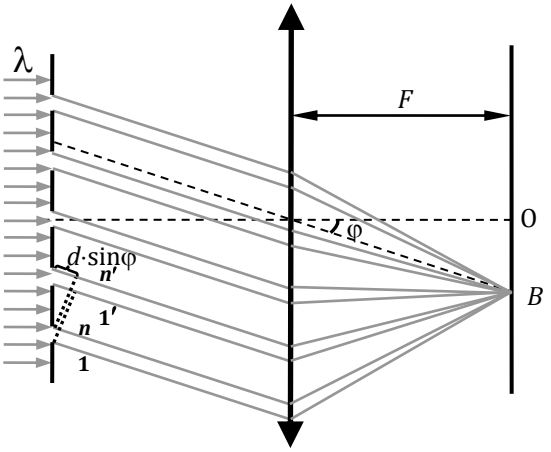


Рис. 24.1

экрана (точка *B*). Если *результирующие* колебания напряжённости электрического поля в данной точке, возбуждённые волнами от вторичных источников каждой из *N* щелей изобразить векторами $\mathbf{E}_1$, $\mathbf{E}_2$, … , $\mathbf{E}_N$, то векторная диаграмма, определяющая условие главных максимумов дифракции, будет выглядеть так, как показано на рис. 24.2 – все эти колебания происходят в одной фазе.

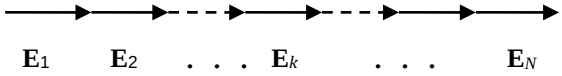


Рис. 24.2

Такая векторная диаграмма получается, когда разность хода волн от соответствующих источников в соседних щелях (*i* и *i*′ – находящихся на расстоянии *d* друг от друга) равна целому числу длин волн. Поэтому ***условие главных максимумов*** имеет вид:

$$d\cdot\sin\varphi = \pm m\cdot\lambda, \quad \text{где } m = 0, 1, 2, 3, \ldots . \qquad (24.1)$$

Амплитуда результирующего колебания равна в этом случае сумме длин векторов $\mathbf{E}_k$, т.е. $N\cdot E_{0k}$ (k = 1, 2, …, N), а интенсивность $I(\varphi) = N^2\cdot I_1(\varphi)$, где $I_1(\varphi)$ – интенсивность в соответствующем направлении (φ) при дифракции на одной щели ширины *b*.

Главные минимумы дифракционной картины от решётки расположены в тех местах экрана, где наблюдаются *минимумы при дифракции на одной щели*:

$$b\cdot\sin\varphi = \pm m'\cdot\lambda, \quad (m' = 1, 2, \ldots). \qquad (24.2)$$

Векторная диаграмма, определяющая условие *дополнительных* (побочных) *минимумов* освещённости на экране, представляет собой замкнутый многоугольник, построенный из векторов колебаний $\mathbf{E}_1$, $\mathbf{E}_2$, … , $\mathbf{E}_N$ (см. рис. 24.3). Тогда *условие дополнительных минимумов* вблизи центрального главного максимума ($m = 0$) будет определяться равенством:

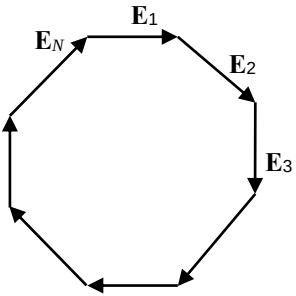


Рис. 24.3

$$Nd\cdot\sin\varphi = \pm m_1\cdot\lambda, \ (m_1 = 1, 2, \ldots, N-1). \qquad (24.3)$$

Дополнительные минимумы вблизи главного максимума порядка *m* будут наблюдаться при выполнении условий:

$$d\cdot\sin\varphi = \pm m\lambda \pm m_1\lambda/N, \ (m_1 = 1, 2, \ldots, N-1). \qquad (24.4)$$

Положение дополнительных дифракционных минимумов определяет *угловую ширину главных максимумов*: $\Delta\varphi \approx 2\lambda/(Nd)$.

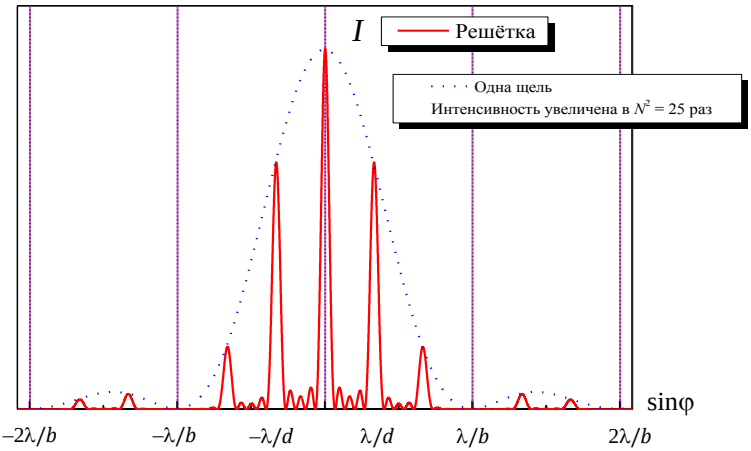


Рис. 24.4

Между дополнительными минимумами есть и *побочные (дополнительные) максимумы*. Их угловое положение соответствует условию:

$d \cdot \sin\varphi = m\cdot\lambda \pm (m_1' + 1/2)\lambda/N$, ($m_1' = 1, 2, \ldots, N-2$).

Однако, интенсивность побочных максимумов намного меньше интенсивности главных максимумов и практического интереса это условие как и они сами по себе не представляют.

В качестве примера на рис. 24.4 представлено распределение интенсивности в дифракционной картине от решётки, состоящей всего из $N = 5$ щелей, с периодом $d = 3b$.

Видно, в частности, что те дифракционные максимумы, положение которых должно оказаться на месте главных минимумов, пропадают. Количество побочных максимумов между соседними главными максимумами в данном случае равно $N-2 = 3$, а побочных минимумов $N-1 = 4$.

Характеристики дифракционной решётки как спектрального аппарата

1. *Угловая дисперсия*

Угловая дисперсия равна отношению изменения угла направления ($\delta\varphi$) на главный максимум дифракции при малом изменении длины волны падающего света λ к величине этого изменения $\delta\lambda$:

$$D_\varphi = \frac{\delta\varphi}{\delta\lambda}. \qquad (24.5)$$

Дифференцируя условие главных максимумов, получим: $d\cdot\cos\varphi\cdot\delta\varphi = m\cdot\delta\lambda$ ($\delta\varphi$ и $\delta\lambda$, чтобы не путать с периодом решётки d). Отсюда следует, что угловая дисперсия в спектре *m-го* порядка:

$$D_\varphi = \frac{m}{d\cdot\cos\varphi}. \qquad (24.6)$$

При малых углах дифракции $\cos\varphi \approx 1$ и можно использовать приближённое равенство $D_\varphi \approx m/d$. Угловая дисперсия тем больше, чем выше порядок спектра и меньше период дифракционной решётки.

2. *Линейная дисперсия*

Линейная дисперсия равна: $D_x = \dfrac{\delta x}{\delta\lambda}$,

где δx – линейное смещение на экране или фотоплёнке положения главного максимума при малом изменении длины волны $\delta\lambda$ падающего на решётку света (в m–м спектре дифракции).

При небольших углах дифракции величина δx связана с угловым расстоянием между максимумами простым соотношением: $\delta x \approx F\cdot\delta\varphi$, где F – фокусное расстояние линзы. Тогда линейная дисперсия в средней части экрана приближённо равна $D_x \approx F\cdot D_\varphi$.

3. *Разрешающая способность*

Разрешающей способностью спектрального аппарата R называется отношение длины волны λ, на которой проводится измерение, к минимальной разрешаемой данным аппаратом разнице в длинах волн $R = \lambda/\delta\lambda_{min}$. Согласно критерию Рэлея, две спектральные линии λ и $\lambda + \delta\lambda_{min}$ ещё будут разрешены, если максимум одной располагается не ближе, чем минимум для другой. Условие совпадения положений первого побочного минимума для длины волны λ и максимума для $\lambda + \delta\lambda_{min}$ в спектре *m-го* порядка можно записать так:

$$d\cdot\sin\varphi = (m + 1/N)\cdot\lambda \qquad \text{и} \qquad d\cdot\sin\varphi = m\cdot(\lambda + \delta\lambda_{min}).$$

Отсюда получаем: $\delta\lambda_{min} = \lambda/(mN)$, и, соответственно, разрешающая способность дифракционной решётки R оказывается пропорциональной числу щелей N и порядку максимума дифракции m:

$$R = mN.$$

Задачи для самостоятельного решения

24.1. Определите период дифракционной решётки d, если красная линия ($\lambda = 7\cdot10^{-7}$ *м*) в спектре второго порядка, наблюдается под углом $\varphi_{кр} = 30°$? Какое число штрихов нанесено на 1 *мм* длины этой решётки? Свет падает на решётку по нормали.

24.2. Определите длину волны света λ, если для решётки с периодом d = 1,55 *мкм* угол между направлениями на дифракционные максимумы 1 и 2 порядка равен $\Delta\varphi = 30°$.

24.3*. Свет с длиной волны λ = 600 *нм* падает по нормали на дифракционную решётку, которая нанесена на плоскую поверхность плоско-выпуклой цилиндрической стеклянной линзы (n = 1,5) с радиусом кривизны R = 20 *см*. Период решётки d = 6 *мкм*. Найдите расстояние Δx между симметрично расположенными главными максимумами первого порядка в фокальной плоскости этой линзы.

Указание. При решении удобно использовать формулу для оптической силы линзы: $D = (n-1)\cdot\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right)$, где R_1 и R_2 – радиусы кривизны линзы.

24.4. Свет с длиной волны λ падает по нормали на дифракционную решётку. Найдите явную зависимость угловой дисперсии от угла дифракции $D_\varphi = f(\varphi)$.

24.5. Свет с λ = 589 *нм* падает по нормали на дифракционную решётку с периодом d = 2,5 *мкм*, содержащую $N = 10^4$ *штрихов*. Найдите угловую ширину дифракционного максимума второго порядка (m = 2).

24.6. Свет падает по нормали на дифракционную решётку шириной l = 6,5 *см*, имеющую n = 200 штрихов на миллиметр длины. Определите, в каком порядке спектра могут быть разрешены спектральные линии, соответствующие длинам волн λ_1 = 670,800 *нм* и λ_2 = 670,815 *нм*.

24.7. Щели дифракционной решётки перекрывают через одну. Как изменятся при этом: *а*) положения главных дифракционных максимумов; *б*) высота этих максимумов; *в*) ширина главных максимумов; *г*) суммарная площадь под кривой распределения интенсивности по экрану.

24.8. Покажите, что при нормальном падении света на дифракционную решётку максимальная величина её разрешающей способности R не может превышать значения l/λ, где l – ширина решётки, λ – длина волны света.

24.9. В дифракционной картине от решётки с периодом d = 2,4 *мкм*, достаточно интенсивными оказываются только по два максимума с каждой стороны от центрального. Какова ширина щелей b в этой решётке?

24.10. При нормальном падении света на дифракционную решётку максимум первого порядка для волны λ_1 = 700 *нм* наблюдается под углом $\varphi_1 = 30°$. Определите длину волны света λ_2, для которого угол дифракции во втором порядке равен $\varphi_2 = 45°$.

24.11. Получите точное выражение для угловой дисперсии D_φ дифракционной решётки в зависимости от длины волны λ и порядка дифракции m.

24.12. В спектрографе установлена дифракционная решётка, период которой d = 1 *мкм*. На решётку падает белый свет. Фокусное расстояние объектива спектрографа F = 1 *м*. Определите линейную ширину Δx спектра видимого диапазона в первом порядке дифракции. Считайте, что спектр видимого света лежит в диапазоне от $\lambda_ф$ = 400 *нм* до $\lambda_{кр}$ = 760 *нм*.

24.13. Длина рабочей части дифракционной решётки прибора, описанного в предыдущей задаче, равна l = 10 *см*. Оцените его линейную дисперсию и разрешающую способность для первого порядка дифракции.

24.14. Половину дифракционной решётки перекрывают с одного края непрозрачной преградой. Как изменится при этом: *а*) положение главных дифракционных максимумов; *б*) высота центрального максимума; *в*) ширина главных максимумов; *г*) суммарная площадь максимумов. Считайте, что радиус когерентности падающего на решётку света значительно больше ширины решётки.

24.15. Ответить на вопросы предыдущей задачи при условии, что радиус когерентности падающего на дифракционную решётку света равен половине длины решётки.

24.16. Постройте эскиз дифракционной картины для решётки с числом щелей $N = 5$, для которой: *а*) $d = 2b$, *б*) $d = 2{,}5b$.

24.17. На дифракционную решётку падает по нормали монохроматический свет с длиной волны $\lambda = 600$ *нм*. Определите наибольший порядок главного максимума *m,* который можно наблюдать с помощью этой решётки, если её период $d = 2$ *мкм*.

§25. *Поляризация света*

Поляризация поперечных волн состоит в нарушении симметрии распределения возмущений относительно направления распространения волны. Для продольных волн такое нарушение симметрии невозможно, поэтому продольные волны не бывают поляризованными. *Поляризация света* представляет собой прямое доказательство поперечности электромагнитных и, в частности, световых волн.

Простейший анализ состояния поляризации частично поляризованного света (смесь линейно поляризованного и естественного)[*)] состоит в пропускании его через совершенный поляроид–анализатор, плоскость пропускания (главную плоскость) которого постепенно поворачивают относительно луча. Степень поляризации анализируемого света P равна:

$$P = \frac{I_{\max} - I_{\min}}{I_{\max} + I_{\min}}, \qquad (25.1)$$

где I_{max} – максимальная интенсивность света, прошедшего через анализатор, I_{min} – минимальная интенсивность прошедшего через анализатор света (при повороте его на 90°). Таким образом, степень поляризации линейно поляризованного[**)] света $P = 1$ ($I_{min} = 0$). Степень поляризации естественного света, который представляет собой смесь линейно поляризованных во всех возможных плоскостях волн, равна нулю (поскольку $I_{max} = I_{min}$).

Если на совершенный поляризатор падает линейно поляризованный свет интенсивностью I_0, плоскость колебаний которого составляет угол θ с плоскостью пропускания поляризатора,

---

[*)] Такой способ малоинформативен для эллиптически поляризованного света.

[**)] Линейно (плоско-) поляризованным называется свет, в котором вектор $\vec{E}$ колеблется, оставаясь в одной плоскости – т.н. плоскости колебаний, включающей световой луч и все векторы напряжённости $\vec{E}$.

поляризатор пропустит только ту составляющую вектора $\vec{E}$, которая параллельна этой плоскости. Интенсивность прошедшего через поляризатор света пропорциональна квадрату амплитуды напряжённости электрического поля и, следовательно, равна

$$I_1 = I_0 \cdot \cos^2\theta. \qquad (25.2)$$

Это равенство получило название **закона Малюса.** Если на совершенный поляризатор падает естественный свет с интенсивностью I_*, то после него свет становится линейно поляризованным, интенсивность которого равна $I_*/2$.

Поляризация света возникает, в частности, при отражении света от поверхности прозрачных диэлектриков. В соответствии с **законом Брюстера** отражённый свет становится полностью линейно поляризованным, если выполняется условие $\mathrm{tg}\alpha_Б = n/n_0$, где где α_B – угол падения света (угол Брюстера), n и n_0 – показатели преломления диэлектрика и окружающей среды, соответственно. При этом колебания вектора $\vec{E}$ в отражённом свете происходят в плоскости, перпендикулярной плоскости падения света, а свет преломленный остаётся частично поляризованным (обеднён волнами, плоскость колебаний которых перпендикулярна плоскости падения). Далее рассмотрим решение некоторых типичных задач по данной теме.

Задача

25.1. Степень поляризации частично поляризованного света равна $P = 0{,}2$. Найти отношение k интенсивности линейно поляризованной составляющей этого света I_l к интенсивности естественной (неполяризованной) составляющей I_*.

Решение

При анализе на степень поляризации максимальная интенсивность равна сумме интенсивности линейно поляризованной составляющей и половины интенсивности неполяризованной составляющей частично поляризованного света:

$$I_{max} = I_l + I_*/2.$$

Минимальная же интенсивность будет наблюдаться при повороте анализатора на угол 90°. В этом случае составляющая линейно поляризованного света полностью гасится и интенсивность прошедшего света равна:

$$I_{min} = I_*/2.$$

По определению степени поляризации получаем:

$$P = \frac{I_1}{I_1 + I_*} = \frac{k}{k+1} \ .$$

Отсюда находим искомое отношение интенсивностей k:

$k = I_1/I_* = P/(1-P) = 0{,}25$.

25.2. На пути частично поляризованного света поместили идеальный поляризатор. При повороте поляризатора на угол $\theta = 60°$ из положения, соответствующего максимуму пропускания света, интенсивность прошедшего света уменьшилась в $n = 3$ раза. Найти степень поляризации P падающего света.

Решение

Отношение интенсивностей можно записать в виде:

$$n = \frac{I_1 + I_*/2}{I_1 \cos^2\theta + I_*/2} \qquad \text{или} \qquad n = \frac{2k+1}{2k\cos^2\theta + 1}, \text{ где } k = I_1/I_*.$$

Отсюда

$$k = \frac{n-1}{2(1 - n\cdot\cos^2\theta)} \ .$$

Так как $P = k/(k+1)$ (см. предыдущую задачу), то окончательно получим:

$$P = \frac{n-1}{1 - n\cdot\cos(2\theta)} = 0{,}8.$$

Двойное лучепреломление

Оптическая анизотропия некоторых сред (например, кристаллов) состоит в том, что скорость распространения света, и, соответственно, показатель преломления, зависят от направления колебаний вектора напряжённости $\vec{E}$ (т.е. от состояния поляризации). В результате этого луч света при прохождении через анизотропную среду **за исключением двух частных случаев**[*)] разделяется на два – наблюдается **двойное лучепреломление**. Вдоль одного луча, бежит волна, для которой вектор напряжённости $\vec{E}$ перпендикулярен оптической оси кристалла. Такая волна

[*)] При падении вдоль оптической оси и перпендикулярно к ней – см. ниже. ***Оптической осью*** называется направление, вдоль которого скорость распространения света с разной поляризацией одинакова. Плоскость, содержащая оптическую ось и данный луч, называется ***главной оптической плоскостью***.

(и соответствующий луч) называется *обыкновенной*. Её скорость не зависит от направления распространения. Соответственно, показатель преломления для этой волны постоянен (n_o). Другая волна, для которой вектор $\vec{E}$ параллелен оптической оси, называется *необыкновенной*. Её скорость и показатель преломления зависят от направления распространения. Лишь при распространении света вдоль оптической оси кристалла скорость волн не зависит от направления вектора $\vec{E}$, так как он обязательно оказывается перпендикулярен к этой оси. При распространении необыкновенной волны в направлении перпендикулярном оптической оси, её скорость υ_e больше всего отличается от скорости волны обыкновенной υ_o. Кристалл называется положительным, если $\upsilon_o > \upsilon_e$ (или $n_e > n_o$) и отрицательным, в противном случае.

На рис. 25.1 показана ориентация векторов напряжённости электрического поля для обыкновенной ($\vec{E}_{"o"}$) и необыкновенной ($\vec{E}_{"e"}$) волн при нормальном падении линейно поляризованного света на кристаллическую пластинку, вырезанную вдоль её оптической оси. На рисунке плоскость колебаний падающего света составляет угол θ с оптической осью кристалла OO′, которая параллельна плоскости больших граней и плоскости рисунка.

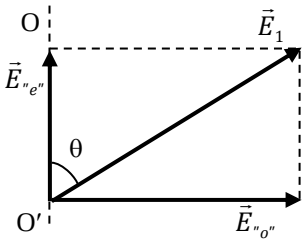


Рис. 25.1

Для амплитудных значений компонент $\vec{E}_{"o"}$ и $\vec{E}_{"e"}$ можно написать: $E_0^{"o"} = E_{01}\cdot\cos\theta$ и $E_0^{"e"} = E_{01}\cdot\sin\theta$. Так как интенсивность света пропорциональна квадрату амплитуды напряжённости электрического поля, то интенсивности обыкновенной и необыкновенной волн связаны с интенсивностью падающего света I_1 следующим образом: $I_{"o"} = I_1\cdot\cos^2\theta$; $I_{"e"} = I_1\cdot\sin^2\theta$. Отсюда следует, что $I_{"e"}/I_{"o"} = \mathrm{tg}^2\theta$, а их сумма, конечно, равна I_1.

Различие фазовых скоростей обыкновенной υ_o и необыкновенной υ_e волн приводит к появлению между ними оптической разности хода $\Delta = (n_e - n_o)\cdot h$, где h – толщина кристаллической пластинки, n_o и n_e – соответствующие показатели преломления.

Подчеркнём, что в рассмотренном на рис. 25.1 частном случае ***пространственного разделения лучей не происходит***. Разность фаз между обыкновенной и необыкновенной волнами $\delta = 2\pi\cdot\Delta/\lambda_0$, определяет состояние поляризации света, прошед-

шего через кристаллическую пластинку. В общем случае это будет *эллиптическая поляризация*, возникающая как результат сложения двух взаимно перпендикулярных колебаний: $E_0^{"o"} \cdot \cos(\omega t)$ и $E_0^{"e"} \cdot \cos(\omega t - \delta)$. При разности фаз $\delta = m \cdot \pi$ свет после прохождения кристаллической пластинки будет линейно поляризован, при $\delta = \pi/2 + m \cdot \pi$ он будет поляризован эллиптически (а при дополнительном условии $\theta = 45°$ – *циркулярно*). В зависимости от направления вращения вектора $\vec{E}$ поляризованный эллиптически или циркулярно свет может быть *право-* или *лево*поляризованным. Согласно сложившейся терминологии, свет считается *право*поляризованным, когда вектор $\vec{E}$ вращается по часовой стрелке, если наблюдение ведётся навстречу лучу.

Интерференция поляризованного света

Для наблюдения интерференции поляризованного света обычно используется оптическая схема, изображённая на рисунке 25.3.

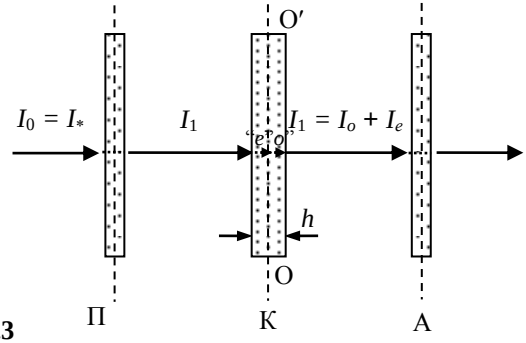


Рис. 25.3

На этой схеме П – поляризатор, на который падает естественный свет с интенсивностью I_*. После прохождения поляризатора свет становится линейно поляризованным с интенсивностью $I_1 = 0{,}5I_0$ и амплитудой вектора напряжённости E_{01}. Затем свет проходит через кристаллическую пластинку К, оптическая ось которой OO′ параллельна большим граням пластинки. При такой геометрии эксперимента в пластинке не происходит двойного лучепреломления (падающий свет не расщепляется пространственно), но возникают две волны – обыкновенная с амплитудой $E_{01}^{"o"}$ и необыкновенная с амплитудой $E_{01}^{"e"}$, которые распространяются по одному направле-

нию. В результате прохождения пластинки между этими двумя волнами возникает оптическая разность хода $\Delta = (n_e - n_o)\cdot h$.

При $\Delta = m\cdot\lambda$, где m – целое число, можно считать, что выходящий из пластинки свет по-прежнему линейно поляризован, причём ориентация плоскости поляризации не меняется.

При $\Delta = (m + 1/2)\cdot\lambda$ (***пластинка в полволны***) поляризация света после пластинки также остаётся линейной. Однако в этом случае в результате сложения колебаний $\vec{E}_{"o"}$ и $\vec{E}_{"e"}$ происходит поворот плоскости поляризации на угол 2θ, где θ – угол между плоскостью колебаний падающего света и оптической осью пластинки.

При $\Delta = (2m + 1)\cdot\lambda/4$ (***пластинка в четверть волны***) и равенстве амплитуд обыкновенной и необыкновенной волн ($E_{01}^{"o"} = E_{01}^{"e"}$) после пластинки получается циркулярно поляризованный свет. Вектор напряжённости электрического поля вращается относительно направления распространения света с угловой скоростью ω.

Интенсивность прошедшего через пластинку К света во всех случаях остаётся равной $I_1 = I_o + I_e$ – как мы знаем (см., например, задачу 21.4), интерференция волн с перпендикулярной ориентацией векторов $\vec{E}_{"o"}$ и $\vec{E}_{"e"}$ не происходит.

Свести колебания в одну плоскость позволяет использование ещё одного поляризатора. Этот дополнительный элемент оптической схемы, играющий роль анализатора А, сводит составляющие обыкновенной и необыкновенной волн в одну плоскость (см. рис.

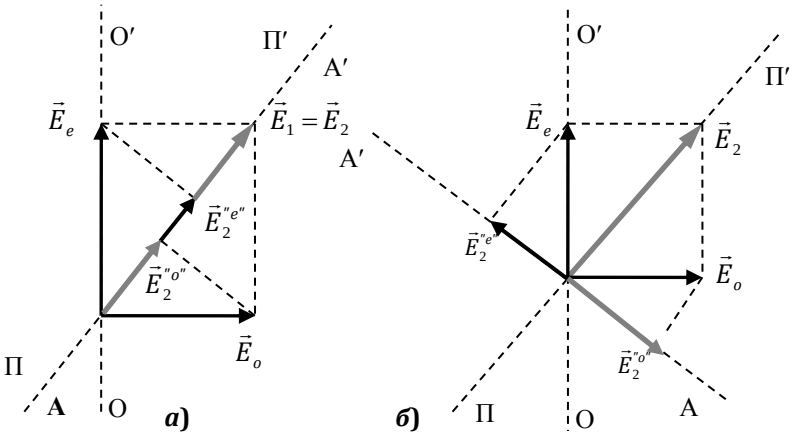


Рис. 25.4

25.4) – сонаправленные колебания $\vec{E}_2^{"o"}$ и $\vec{E}_2^{"e"}$ могут интерферировать. Результат интерференции определяется разностью фаз этих колебаний, а значит всё той же оптической разностью хода между волнами $\vec{E}_{"o"}$ и $\vec{E}_{"e"}$ $\Delta = (n_e - n_o)\cdot h$.

Если в данной схеме плоскости пропускания поляризатора ПП′ и анализатора АА′ параллельны и на поляризатор падает белый свет, то при $(n_e - n_o)\cdot h = m\cdot\lambda_0$ для волны какой-либо длины λ_0 через анализатор будет проходить свет преимущественно с этой длиной волны – для неё выполняется условие максимума интерференции (см. рис. 25.4,*а*). В результате пластинка будет окрашена в цвет, соответствующий этой длине волны. При повороте анализатора на угол 90° для этой длины волны будет выполняться условие минимума интерференции (разность фаз π – колебания происходят в противофазе) и пластинка будет окрашена в дополнительный цвет (см. рис 25.4,*б*).

Задачи для самостоятельного решения

25.3. Определите интенсивность I_l линейно поляризованного света, вышедшего из идеального поляризатора, при падении на него естественного света с интенсивностью I_*.

25.4. На совершенный поляризатор падает циркулярно поляризованный свет, интенсивность которого равна I_0. Какова будет интенсивность света за поляризатором?

25.5. Степень поляризации частично поляризованного света $P = 0{,}25$. Найдите отношение k интенсивности линейно поляризованной составляющей этого света I_l к интенсивности неполяризованной I_*.

25.6. Определите степень поляризации P света, представляющего собой смесь естественного света с линейно поляризованным, если отношение k интенсивности поляризованного света I_l к интенсивности естественного I_* равно: *а*) $k = 1$; *б*) $k = 10$?

25.7*. Естественный свет проходит через систему, состоящую из дух одинаковых несовершенных поляризаторов, каждый из которых в отдельности обеспечивает степень поляризации $P_1 = 0{,}9$. Какова степень поляризации прошедшего света, если плоскости поля-

ризаторов: *а*) параллельны; *б*) перпендикулярны друг другу.

25.8*. Естественный свет проходит через систему, состоящую из двух одинаковых несовершенных поляризаторов. Каждый из них пропускает в своей плоскости $\alpha_1 = 0{,}95$ интенсивности соответствующего колебания и обеспечивает степень поляризации $P_1 = 0{,}9$. Найдите коэффициент пропускания k такой системы, если поляризаторы скрещены?

25.9. Чему равен угол между плоскостями пропускания двух расположенных друг за другом идеальных поляризаторов, если интенсивность естественного света, после прохождения этой системы, уменьшается в $n = 4$ раза?

25.10. Частично поляризованный свет проходит через идеальный поляризатор. Интенсивность пучка увеличивается в $n = 4$ раза, если поляризатор повернуть на угол $\alpha = 60°$ от положения, соответствующего минимальной интенсивности. Какова степень поляризации P частично поляризованного света?

25.11. По одному направлению в пространстве распространяются две некогерентные линейно поляризованные световые волны с одинаковой интенсивностью, причём угол между плоскостями колебаний этих волн $\alpha = 60°$. Определите степень поляризации такого света P.

25.12*. На пути пучка естественного света стоят друг за другом два несовершенных поляризатора, плоскости пропускания которых параллельны. Степень поляризации, обеспечиваемая каждым поляризатором, равна $P_1 = 0{,}9$. Во сколько раз k изменится интенсивность света, прошедшего через эту систему, при повороте одного из них на угол $\alpha = 90°$ относительно оси направленной вдоль луча?

25.13. Частично поляризованный свет проходит через идеальный поляризатор. При повороте поляризатора на $\theta = 60°$ от положения, соответствующего максимальной интенсивности, яркость пучка уменьшается в $n = 2$ раза. Найдите степень поляризации пучка P и отношение интенсивностей k линейно поляризованного и естественного света.

25.14. Под каким углом к горизонту должно находиться Солнце,

чтобы свет, отражённый от поверхности озера, был поляризован в наибольшей степени? В какой плоскости происходят колебания вектора напряжённости в отражённом свете? Показатель преломления воды равен $n = 1{,}33$.

25.15. Предельный угол полного внутреннего отражения для некоторого вещества равен $\alpha_{пр} = 45°$. Чему равен для этого вещества угол Брюстера?

25.16. Кристаллическая пластинка $\lambda/2$ установлена между двумя поляризаторами. На первый (по ходу луча) поляризатор падает естественный свет с длиной волны λ и интенсивностью I_*. Оптическая ось пластинки образует с плоскостью пропускания этого поляризатора угол $\theta = 60°$. Определите интенсивность I света, вышедшего из второго поляризатора для случаев, когда плоскости пропускания двух поляризаторов: *а*) параллельны; *б*) перпендикулярны.

25.17. На пути линейно поляризованного монохроматического света установлена кристаллическая пластинка в четверть волны. Как будет изменяться характер поляризации вышедшего из пластинки света при вращении пластинки вокруг направления луча?

25.18. Естественный свет интенсивности I_* проходит последовательно через поляризатор П, кристаллическую пластинку в полволны и анализатор А (см. рис. 25.5). Ось ОО′ пластинки ориентирована вертикально. Ось поляризатора образует с вертикалью угол θ_1, ось анализатора – угол θ_2 (углы отсчитываются от вертикали по часовой стрелке, если смотреть по направлению луча). Считая, что поляризаторы и пластинка не поглощают свет, а поляризаторы являются идеальными, определите:

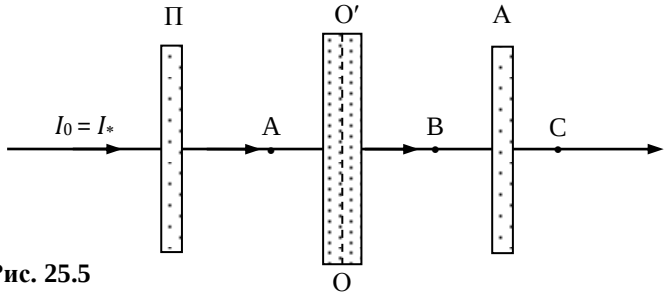


Рис. 25.5

а) характер поляризации света в точках A, B, C;

б) интенсивность света I_A и I_B в точках A и B;

в) интенсивность I_C в точке C;

г) интенсивность света I_C в точке C, если $\theta_1 = 30°$, а угол $\theta_2 = 60°$.

25.19. Монохроматический линейно поляризованный свет с интенсивностью I_0 и с амплитудой напряжённости электрического поля E_0 проходит через кристаллическую пластинку $\lambda/4$. Угол между плоскостью колебаний и главной оптической плоскостью пластинки составляет 45°. Как поляризован свет после прохождения пластинки, каковы его интенсивность I_1 и амплитуда напряжённости электрического поля E_{01}?

25.20. Линейно поляризованный свет с длиной волны λ проходит через пластинку положительного кристалла толщиной h. Показатели преломления для обыкновенной (n_o) и необыкновенной (n_e) волн известны. Какой должна быть толщина h кристаллической пластинки, чтобы после её прохождения свет стал: *а*) левополяризованным (эллиптически или циркулярно); *б*) правополяризованным.

25.21. Между двумя скрещенными совершенными поляризаторами установлена кристаллическая пластина в четверть волны. Как будет изменяться интенсивность света, после второго поляризатора при вращении пластинки вокруг направления луча, если на первый поляризатор падает естественный свет с интенсивностью I_0?

25.22. На пути линейно поляризованного монохроматического света находится клиновидная кварцевая пластинка, вырезанная параллельно его оптической оси. Угол при вершине клина $\varphi = 3{,}42'$. Ось пластинки образует угол $\theta = 45°$ с направлением колебаний вектора $\vec{E}$ в падающем свете. Разность показателей преломления необыкновенной и обыкновенной волн равна $n_e - n_o = 0{,}009$. Найдите расстояние Δx между серединами светлых полос, наблюдаемых на экране за анализатором, установленным после пластины. Длина волны света $\lambda = 540$ *нм*.

25.23*. Как отличить правополяризованный свет от левополяризованного?

25.24*. В оптическом затворе между скрещенными поляризаторами $П1$ и $П2$ помещена кристаллическая пластинка K ниобата лития ($LiNbO_3$) (см. рис. 25.6). Затвор, рассчитанный для света с длиной волны $\lambda \approx 600$ *нм*, срабатывает при включении поперечного световому потоку электрического поля с напряжённостью $E = 5 \cdot 10^5$ *В/м*. Его направление составляет угол $\alpha = 45°$ с плоскостями пропускания поляризаторов. Объясните принцип действия затвора. Чему равна толщина пластинки h? Считайте, что постоянная Поккельса для ниобата лития (коэффициент пропорциональности между разностью показателей преломления $n_e - n_o$ и напряжённостью поля в ячейке) в данной спектральной области равна $K_2 = 3{,}7 \cdot 10^{-10}$ *м/В*?

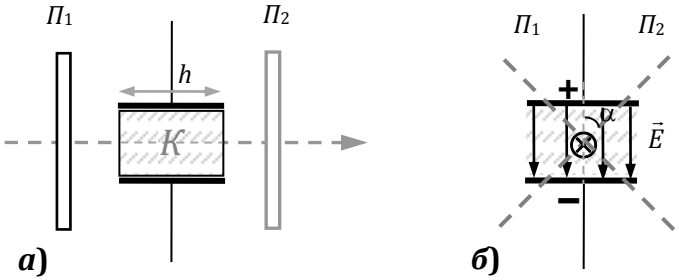


Рис. 25.6. К объяснению принципа действия оптического затвора.

25.25*. В оптическом затворе с ячейкой Керра, аналогичном по устройству представленному на рис. 25.6, вместо кристалла $LiNbO_3$ используется кювета, заполненная нитробензолом ($C_6H_5NO_2$). Длина кюветы равна $h = 10$ *см*. Затвор рассчитан для света с длиной волны $\lambda \approx 500$ *нм*. Постоянная Керра (коэффициент пропорциональности в равенстве $n_e - n_o = K_3 \lambda E^2$) для нитробензола при комнатной температуре для света в данной спектральной области равна $K_3 = 2{,}2 \cdot 10^{-12}$ *м/В*^{2}. При каком минимальном значении напряжённости E поперечного электрического поля срабатывает затвор?

Часть II. *КОЛЕБАНИЯ И ВОЛНЫ. ВОЛНОВАЯ ОПТИКА*

§14. *Общие свойства гармонических колебаний*

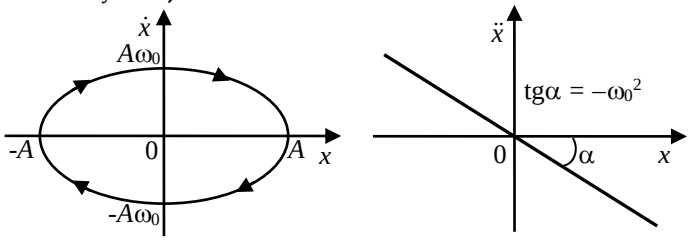
14.1. $y(t) = 1\cdot\cos(\pi t + \pi/2)$ *м* $= -1\cdot\sin(\pi t)$ *м*.

14.6. $x(t) = A\cdot\cos(\omega t + \pi/3)$ и $x(t) = A\cdot\sin(\omega t + 5\pi/6)$.

14.7. *а*) да, *б*) да, *в*) нет; при неупругих ударах, *г*) движение шарика будет непериодическим.

14.8. $A_x(t) = A\cdot\cos(\omega_0 t + \varphi_0)$.

14.9. Рис. к ответу **14.9, *б***



14.10. $\langle\upsilon\rangle = 0{,}4$ *м/с*; $|\langle\vec{\upsilon}\rangle| = 0$.

14.11. *а*) $\langle\vec{\upsilon}\rangle = -2\,\vec{e}_x$ *м/с*; $\langle\upsilon\rangle = 2$ *м/с*; *б*) $\langle\vec{\upsilon}\rangle = 0$; $\langle\upsilon\rangle = 1$ *м/с* .

14.12. *а*) $\tau = \dfrac{T}{4} = \dfrac{1}{4}\cdot\dfrac{2\pi}{\upsilon_{max}}\cdot A = 50\,c$; *б*) $|\langle\vec{\upsilon}\rangle| = 0$;

в) $\langle\upsilon\rangle = \Delta l/T = 4A/(4\tau) = 2$ *м/с* (или 7,2 *км/час*).

14.13. $\upsilon_{max} = \omega\cdot A = \dfrac{\pi}{\tau}\cdot R = 1{,}2$ *м*.

14.14. $\Delta t = \pi/(3\omega) = \tau/3 = \pi/6 \approx 0{,}52$ с.

14.15*. $T = 2\pi a/b = 10$ *с*.

14.16. *а*) в 4 *раза*, *б*) в 4 *раза*.

14.17*. $T = 2S/kA^2$.

14.18*. $\omega = \sqrt{\dfrac{k(m_1+m_2)}{m_1 m_2}} = 15\ c^{-1}$; $A_1 = 2\Delta L/3 = 4$*см*; $A_2 = \Delta L/3 = 2$ *см*;

$T = 0{,}84$ *с*.

14.19*. $A > A_{пор} = g/\omega^2$; в верхних.

14.20*. $A > A_{пор} = \mu g/\omega^2$.

14.21*. $\mu = A_2/A_1$.

14.22*. $A_{min} = \dfrac{g}{\omega^2}\sqrt{\mu^2\cos^2\alpha - \sin^2\alpha} = 3{,}4$ *см*.

§15. *Свободные гармонические колебания одномерных механических и электрических осцилляторов*

15.4. $\upsilon_c = \dfrac{p_0}{m_1+m_2}$, $\omega_0 = \sqrt{\dfrac{k}{\mu}}$, где $\mu = \dfrac{m_1 m_2}{m_1+m_2}$.

15.5. *а*) $A = \dfrac{\upsilon_0}{\omega_0}$, *б*) $W_{пост} = \dfrac{m_1}{m_2}\dfrac{\mu\upsilon_0^2}{2}$, $W_{кол} = \dfrac{\mu\upsilon_0^2}{2}$.

15.6. $\omega_0 = a\cdot\sqrt{\dfrac{u_0}{m}}$.

15.7. $x(t) = \dfrac{mg}{k}\left(1-\cos\sqrt{\dfrac{k}{m}}\cdot t\right)$, $\upsilon_m = \sqrt{\dfrac{m}{k}}g$.

15.8. $T_0 = 2\pi\sqrt{\dfrac{M+m}{k}} \approx 1{,}26$ *с*, $A = \dfrac{m\upsilon}{\sqrt{k(M+m)}} = 40$ *см*,

$x(t) = A\cdot\sin\sqrt{\dfrac{k}{M+m}}\cdot t$.

15.9*. $x(t) = \dfrac{mg}{k} + A\cos\left(\sqrt{\dfrac{k}{m}}\cdot t + \varphi_0\right)$; $A = \dfrac{mg}{k}\sqrt{1+\dfrac{2kh}{mg}}$; $\operatorname{tg}\varphi_0 = \sqrt{\dfrac{2kh}{mg}}$.

15.10. $\omega_0 = \dfrac{1}{R}\sqrt{\dfrac{2D}{m}} = 5$ *рад*/*с*; $A = \sqrt{\alpha^2 + \dfrac{\Omega^2 mR^2}{2D}} \approx 0{,}27$ *рад* (15,4°);

$\varphi_0 = \operatorname{arctg}\left(-\dfrac{\Omega}{\alpha\omega_0}\right) = -\dfrac{\pi}{4}$, при колебаниях по закону $\psi(t) = A\cdot\cos(\omega_0 t + \varphi_0)$.

15.11. *а*) $\omega_0 = \dfrac{1}{R}\sqrt{\dfrac{2D}{\mu}} = 10$ *рад*/*с*, $\mu = \dfrac{m_1 m_2}{m_1+m_2} = 0{,}75$ *кг*,

б) $\omega_0 = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{2D}{m_1}} = 8{,}6\ рад/с.$

15.12. $\varphi(t) = \frac{\Omega}{\omega_0}\cdot\sin(\omega_0 t)$, где $\omega_0 = \sqrt{\frac{5g}{11R}} \approx 4{,}7\ рад/с.$

15.13. $T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{\rho h}{\rho_0 g}} = 0{,}31\ с.$

15.14. $T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{l}{2g}} \approx 0{,}2\pi \approx 0{,}63\ с.$

15.15. $\omega_0 = 2\sqrt{\frac{T}{ml}} = 40\ рад/с.$

15.16*. $x(t) = x_1 + A\cdot\cos(\omega_0 t + \varphi_0)$, $A = \sqrt{x_0^2 + \frac{x_1}{g}\upsilon^2}$; $\operatorname{tg}\varphi_0 = \frac{\upsilon}{x_0}\sqrt{\frac{x_1}{g}}$.

15.17*. $q = 4h\sqrt{mg(n^2-1)\pi\varepsilon_0} = 2\cdot10^{-6}\ Кл.$

15.18*. $\omega_0 = \sqrt{\frac{2\mu g}{l}} = 2\ рад/с.$

15.19*. $T = 2\sqrt{\frac{l}{g}}\cdot\left(\frac{\pi}{2} + \arcsin\frac{\alpha}{\beta}\right)$.

15.20. $\alpha(t) = \alpha_0\cos(\omega_0 t)$, $\omega_0 = \sqrt{\frac{3g}{2l}} = 10\ рад/с.$

15.21. $q(t) = Cu_0\cdot\cos\frac{t}{\sqrt{LC}}$, $I_m = \sqrt{\frac{C}{L}}\cdot u_0$.

15.22. $\omega_0 = \sqrt{\frac{3k}{m}} = 30\ рад/с.$

15.23. $\upsilon_{max} = \sqrt{\frac{k_1 + k_2}{m}}\cdot x_0 = 0{,}1\ м/с,$

$x(t) = x_0\cdot\cos\sqrt{\frac{k_1 + k_2}{m}}\cdot t = 0{,}01\cdot\cos(10t)\ (м).$

15.24. $x(t)=\frac{mg}{k_1+k_2}\cdot\left[1-\cos\left(\sqrt{\frac{k_1+k_2}{m}}\cdot t\right)\right]$, $A=\frac{mg}{k_1+k_2}=0{,}01$ *м*,

$\omega_0=\sqrt{\frac{k_1+k_2}{m}}=33$ *рад/с*.

15.25*. $\omega_0=\sqrt{\frac{8k}{3m}}=20$ *рад/с*.

15.26.** *а)* $\omega_0=\sqrt{\frac{2k}{m}-\Omega^2}=8$ *рад/с*, *б)* $\Omega>\sqrt{\frac{2k}{m}}=10$ *рад/с*.

15.27.** $\omega=\omega_0\cdot\sqrt[4]{\frac{g^2+a^2+2ag\sin\alpha}{g^2}}$.

§16. *Колебания в системе связанных осцилляторов*

16.8. $\xi_1(t)=\frac{v_0}{2}\left(\frac{1}{\omega_{\text{I}}}\sin(\omega_{\text{I}}t)+\frac{1}{\omega_{\text{II}}}\sin(\omega_{\text{II}}t)\right)$;

$\xi_2(t)=\frac{v_0}{2}\left(\frac{1}{\omega_{\text{I}}}\sin(\omega_{\text{I}}t)-\frac{1}{\omega_{\text{II}}}\sin(\omega_{\text{II}}t)\right)$;

$\omega_{\text{I}}=\sqrt{\frac{k}{m}}$; $\omega_{\text{II}}=\sqrt{\frac{(k+2k_1)}{m}}$.

16.9. $E_{\text{I}}=E_{\text{II}}=\frac{mv_0^2}{4}$;

16.10. Зависимости аналогичны представленным на рис. 16.7 стр. 165 с периодом пульсаций амплитуды колебаний равным $20\pi/\omega_{\text{I}}$.

16.11. $\omega^2_{\text{I,II}}=\frac{k}{2m}\left(3\mp\sqrt{5}\right)$; $\xi_{\text{I,II}}=\xi_{\text{I}}+\left(\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}\right)\xi_2$.

16.12. $\omega^2_{\text{I,II}}=\frac{D}{2I}(3\mp\sqrt{5})$.

16.13. $\omega_{\text{I}}=\sqrt{\frac{g}{l}}$; $\omega_{\text{II}}=\sqrt{\left(\frac{g}{l}+\frac{2k}{m}\right)}$.

16.14. $\omega^2_{\text{I}}=\frac{k}{(M+m/2)}$; $\omega^2_{\text{II}}=\frac{k}{M}$; .

16.15. $\omega_{\text{I}}^2 = \dfrac{1}{C(L+2L_1)}$; $\omega_{\text{II}}^2 = \dfrac{1}{LC}$.

16.16. $\omega_{\text{I,II}}^2 = \dfrac{1}{3LC}\left(3 \mp \sqrt{3}\right)$, $q_{\text{I,II}} = q_1 + \left(1 \pm \sqrt{3}\right)q_2$.

16.17. Одна. $\omega = 1/\sqrt{L^* \cdot (C + C_1)}$, где L^* – «приведённая индуктивность», которую определяет равенство: $1/L^* = 1/L + 1/L_1$.

16.18. $q_1(t) = \dfrac{Cu_0}{2} \cdot \left[\cos(\omega_{\text{I}} t) + \cos(\omega_{\text{II}} t)\right]$;

$q_2(\text{t}) = \dfrac{Cu_0}{2} \cdot \left[\cos(\omega_{\text{I}} t) - \cos(\omega_{\text{II}} t)\right]$; $\omega_{\text{I}}^2 = \dfrac{1}{LC}$; $\omega_{\text{II}}^2 = \dfrac{1}{L}\left(\dfrac{1}{C} + \dfrac{2}{C_1}\right)$.

16.19. $W_{\text{I}} = W_{\text{II}} = \dfrac{Cu_0^2}{4}$.

16.20. $\omega_{\text{I,II}}^2 = \dfrac{(3 \mp \sqrt{3})}{2LC}$.

16.21*. $\omega_0^{HI} = \sqrt{\dfrac{1}{n} \cdot \dfrac{\mu^{HF}}{\mu^{HI}}} \cdot \omega_0^{HF} \approx 4{,}4 \cdot 10^{14}\ рад/с$, где $\mu = \dfrac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$ – приведённая масса молекул *HF* и *HI*. Вторая производная от потенциальной энергии больше для молекулы *HF*: $k^{HF}/k^{HI} = n$.

16.22*. $n = \left(\dfrac{\omega_0^{HCl}}{\omega_0^{NaCl}}\right)^2 \cdot \dfrac{\mu^{HCl}}{\mu^{NaCl}} \approx 4{,}1$.

16.23. Число мод равно 4 – два типа валентных нормальных колебания и 2 деформационных (последние – с равными частотами).

16.24*. Число мод равно 6.

16.25*. $\dfrac{\omega^{(сф)}}{\omega^{(нф)}} = \sqrt{1 + 2\dfrac{m_O}{m_C}} \approx 1{,}9$.

§17. *Затухающие колебания*

17.8. $\eta = 1 - \left(\dfrac{x_6}{x_0}\right)^2 = 0{,}998$ (99,8 %), где $x_6 = x_0 - 12\xi_0 = 0{,}3\ см$.

17.9. $x = x_5 = x_0 - 10\mu a = 0{,}3\ см.$

17.10. $\tau_2 = \dfrac{\ln(n_2)}{\ln(n_1)} \cdot \tau_1 = 36\ с.$

17.11. $x(t) = \dfrac{\tau_1 \cdot \tau_2}{\tau_1 - \tau_2} V_0 \cdot \left(e^{-\frac{t}{\tau_1}} - e^{-\frac{t}{\tau_2}} \right)$, где $\tau_1 = \dfrac{1}{\beta - \beta_1} \approx 0{,}37\ с,$

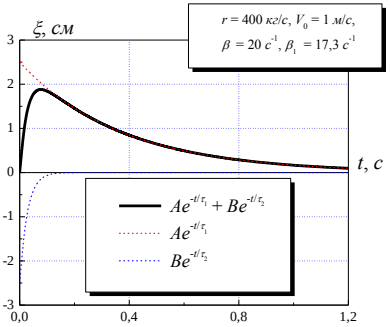


Рис. к ответу **17.11**

$\tau_2 = \dfrac{1}{\beta + \beta_1} \approx 0{,}027\ с$, $\beta = \dfrac{r}{2m + M} = 20\ с^{-1}$, $\beta_1 = \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2} \approx 17{,}3\ с^{-1}.$

17.12. *а)* $\beta = \dfrac{\ln(\eta)}{\tau} = 0{,}05\ с^{-1}$, *б)* $\tau_A = \dfrac{1}{\beta} = 20\ с.$

17.13. $Q = \dfrac{\pi N}{\ln(\eta)} \approx 143.$

17.14. $\nu_0 = \sqrt{\nu_c^2 + \left(\dfrac{1}{2\pi\tau} \right)^2} \approx 101\ Гц.$

17.15. $Q = \dfrac{1}{R} \cdot \sqrt{\dfrac{L}{C} - \dfrac{R^2}{4}} \cong 50.$

17.16. $\frac{Q_1 - Q}{Q_1} \approx \frac{CR^2}{8L} = 5 \cdot 10^{-5}$ (0,005 %).

17.17. *а)* $W(t) = W_0 \cdot e^{-2\beta t} = W_0 \cdot e^{-\frac{2\pi\nu_0}{Q}t}$, *б)* $\frac{W(\tau)}{W_0} = e^{-\frac{2\pi\nu_0}{Q}\tau} = 0{,}5$.

17.18. $T = \sqrt{\frac{3R}{2g}} \cdot \sqrt{4\pi^2 + \gamma^2} \approx 1{,}3$ *с*.

17.19. $\tau_2 = \frac{\ln(A_0 / A_2)}{\ln(A_0 / A_1)} \cdot \tau_1 = 80$ *с*.

17.20. $x_0 = \frac{x_1 \cdot x_3 - x_2^2}{x_1 + x_3 - 2x_2} \approx 22{,}9$.

17.21. $\tau = \frac{\ln(n)}{2\gamma\nu_c} \approx 11{,}5$ *с* (учтено, что громкость пропорциональна A^2).

17.22. $I(t) = \frac{u_0}{L} \cdot t \cdot e^{-\frac{t}{\sqrt{LC}}}$, $I_{\max} = \frac{u_0}{e} \cdot \sqrt{\frac{C}{L}}$ при $t_m = \sqrt{LC}$.

17.23. $q(t) = q_m \cdot e^{-\beta t}\cos(\omega_c t + \varphi_0)$, где $\omega_c = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{1}{4R^2C^2}}$, $\beta = \frac{1}{2RC}$;

при $R \le \frac{1}{2}\sqrt{\frac{L}{C}}$ изменение заряда на конденсаторе представляет собой апериодический процесс.

§18. *Вынужденные колебания*

18.3. Зависимость сдвига фаз между смещением и вынуждающей силой от её частоты $\alpha = \alpha(\Omega)$ представлена на рисунке 18.3.

18.5. $\frac{A_p}{A_{\omega \to 0}} = \frac{\pi}{\gamma} \approx 3$.

18.6. *а)* $\langle P \rangle = \frac{1}{2} A F_m \Omega \sin\alpha$, *б)* $A_{\text{тр}} = -A = -\langle P \rangle \cdot T = -\pi A F_m \sin\alpha$.

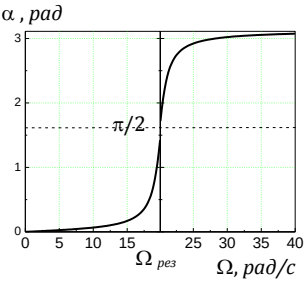
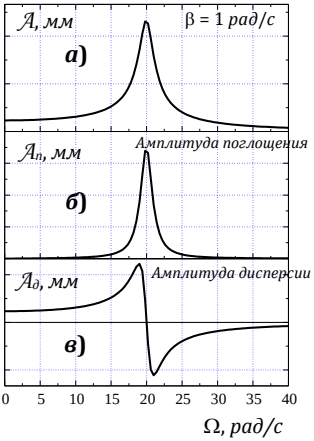


Рис. к ответу **18.3**

18.7. $A = \dfrac{F_m}{r\omega_c}$. При частоте $\Omega_{рез} = \sqrt{\omega_c^2 - \beta^2} = \sqrt{\omega_c^2 - \left(\dfrac{r}{2m}\right)^2}$.

18.8. Соответствующие амплитудно–частотные зависимости представлены на рисунке справа: *а*) $\mathcal{A}(\Omega)$; *б*) $\mathcal{A}_n(\Omega)$; *в*) $\mathcal{A}_д(\Omega)$.

Рис. к ответу **18.8**



18.10. $Q = \dfrac{1}{2\sqrt{1-\left(\Omega_p/\omega_c\right)^2}} \approx 7{,}9.$

18.11. $\Omega_{рез} = \sqrt{\dfrac{\Omega_1^2 + \Omega_2^2}{2}} \approx 32\ рад/с.$

18.12. $\Omega^*_{рез} = \sqrt{\Omega_1 \cdot \Omega_2} = 20\ рад/с.$

18.13. $\upsilon = \dfrac{l}{2\pi}\sqrt{\dfrac{g}{\Delta x}} \approx 20\ м \cdot с^{-1}$ (72 км/час).

18.14. $A_{тр} = -\pi\varphi_m \cdot N_m \cdot \sin\alpha$.

18.15. $\omega_0 = \sqrt{\dfrac{k}{m}};\ Q \approx \dfrac{\omega_0 \cdot \Omega}{(\omega_0^2 - \Omega^2)\cdot \mathrm{tg}\alpha} \approx$ 8,7.

18.16. $\nu_0 = \sqrt{2\nu_c^2 - \nu_p^2} \approx 500\ Гц.$

18.17. $\nu_{рез} = \nu_c \cdot \sqrt{1 - \left(\dfrac{\ln n}{14\pi}\right)^2} \approx 5{,}83\ Гц.$

18.18. *а*) $\beta = \dfrac{r}{2m} = 0{,}5$, *б*) $A_p = \dfrac{2F_m \cdot m}{r \cdot \sqrt{4km - r^2}} = 5$ *см*.

18.19. $\omega_0 = \sqrt{\dfrac{k}{m}} = 10$, $Q = \dfrac{\omega_0}{2\beta} = 10$, $A_{\Omega \to 0} = \dfrac{F_0}{k} = \dfrac{A_p}{Q} = 5$ *мм*.

18.20. *а*) $\Omega_{рез} = \sqrt{\dfrac{k}{m} - 2\left(\dfrac{r}{2m}\right)^2} \approx 9{,}5$ *рад/с*,

б) $A_p = \dfrac{2F_0 \cdot m}{r \cdot \sqrt{4km - r^2}} \approx 1{,}2$ *см*, *в*) $Q = \dfrac{A_p}{A_{\Omega \to 0}} = \dfrac{kA_p}{F_0} \approx 2{,}4$.

18.21. $A = \dfrac{4F_0}{k \cdot \sqrt{\dfrac{36r^2}{km} + 25}} \approx 0{,}4$ *см*.

18.22. *а*) увеличится в 2 *раза*, *б*) уменьшится в 2 *раза*, *в*) увеличится в $\sqrt{2}$ *раз*.

18.23. *а*) увеличится в 2 *раза*, *б*) не изменится, *в*) не изменится.

§19. *Вынужденные электрические колебания. Переменный ток*

19.4. *а*) I_0, *б*) $I_0/2$.

19.5. $I_д = \dfrac{u_д}{\sqrt{R^2 + \left(\Omega L - \dfrac{1}{\Omega C}\right)^2}} = 2{,}1$ *А*, $\psi = \operatorname{arctg} \dfrac{\Omega L - \dfrac{1}{\Omega C}}{R} \approx 41^\circ$.

19.6. $u_R = I_д \cdot R = 168$ *В*, $u_L = I_д \cdot \Omega L = 369$ *В*, $u_C = I_д \cdot \dfrac{1}{\Omega C} = 223$ *В*,

$P = I_д^2 \cdot R = 353$ *Вт*.

19.7. Коэффициент мощности $k = \cos\psi$, $\rho = \dfrac{\sqrt{1 - k^2}}{2\pi\nu\varepsilon_0\varepsilon k} = 1 \cdot 10^7$ *Ом·м*.

19.8. $P_1 = \dfrac{u_д^2 - u_1^2 - u_2^2}{2R} = 205$ *Вт*, $P_2 = \dfrac{u_2^2}{R} = 160$ *Вт*.

19.9. $P_R = I_2^2 \cdot R = 90\ Вт,\ P_{др} = \dfrac{\left(I^2 - I_1^2 - I_2^2\right)R}{2} = 55\ Вт.$

19.10. $I_R = \dfrac{u_д}{R} = 5{,}5\ А,\ I_д = \sqrt{I_R^2 + I_1^2 + 2I_R I_1 \cdot \cos\psi} \approx 6{,}3\ А,$ где $\cos\psi = \dfrac{I_1 \cdot r}{u_д}$.

19.11. $Z = \dfrac{R}{\sqrt{1+\Omega^2 R^2 C^2}}$, $I_R(t) = \dfrac{u_0}{R} \cdot \cos\Omega t$, $I_C(t) = -\Omega C u_0 \cdot \sin\Omega t$,

$$I(t) = \frac{u_0\sqrt{1+\Omega^2 R^2 C^2}}{R} \cdot \cos(\Omega t + \psi); \quad \psi = \operatorname{arctg}(\Omega RC).$$

19.14. *а)* $u(t) = u_0 + \dfrac{u_1}{\sqrt{1+\Omega^2 R^2 C^2}} \cdot \sin(\Omega t + \psi)$, $\operatorname{ctg}\psi = \Omega RC$.

б) $RC = \dfrac{\sqrt{n^2-1}}{\Omega} \approx 32\ мс.$

19.15. $P = \dfrac{u^2 R}{R^2 + \Omega^2 L^2} \approx 20\ Вт.$

19.16. $\sin\psi = \dfrac{X_L}{Z} = 0{,}8$, $P = \dfrac{\sqrt{Z^2 - X_L^2}}{Z^2} \cdot u^2 = 86{,}4\ Вт.$

19.17. $\Omega = \dfrac{R}{2L} + \sqrt{\dfrac{1}{LC} + \left(\dfrac{R}{2L}\right)^2} \approx 3{,}4 \cdot 10^4\ рад/с.$

19.18. $I(t) = \dfrac{u_0 \cdot \sqrt{1+\Omega^2 R^2 C^2}}{R} \cdot \cos\left(\Omega t + \psi\right)$, где $\psi = \operatorname{arctg}(\Omega RC)$.

19.19. $L = \dfrac{1}{4\pi^2 \nu^2 C} \approx 0{,}2\ Гн,\ I = \dfrac{u}{R}$, $V = \dfrac{I}{2\pi\nu C} = 127\ В.$

19.20. $P = \dfrac{u_{C0}^2 \Omega^2 C^2}{2} R = 5\ мкВт.$

19.21. $\Omega_{рез} = \dfrac{1}{\sqrt{LC}}$.

19.22. $Z(\Omega) = \dfrac{\sqrt{R^2 + \Omega^2 L^2}}{\sqrt{\left(\Omega^2 LC - 1\right)^2 + \Omega^2 R^2 C^2}}$, $\Omega_{рез} = \sqrt{\omega_0^2 - 4\beta^2} =$

$$= \sqrt{\omega_0^2 - \frac{R^2}{L^2}} \approx \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} = 2500\ рад \cdot с^{-1},\ Z_{рез} \approx \frac{L}{RC} = 0{,}5\ Ом.$$

19.23. $I_C = u \cdot \sqrt{\dfrac{C}{L}} = 0{,}22\ A,\ I_L = \dfrac{u}{\sqrt{R^2 + \dfrac{L}{C}}} \approx u \cdot \sqrt{\dfrac{C}{L}} = 0{,}22\ A,$

$$I_д = \frac{u_д}{Z_{рез}} \approx u_д \cdot \frac{RC}{L} = 4{,}4 \cdot 10^{-4}\ A!$$

19.24. $\dfrac{\Omega_{рез} - \omega_0}{\omega_0} \le 0{,}05$ *при* $Q \ge \dfrac{1}{\sqrt{1-(1-\alpha)^2}} = 3{,}2.$

§20. *Волны*

20.7. $\xi = A \cdot \cos[(2\pi/\lambda)(\upsilon t - x)]$.

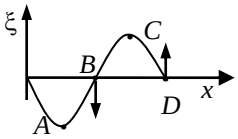
20.8. И продольную и поперечную. Волна распространяется против оси X с фазовой скоростью ω/k. Изменится направление распространения волны на обратное.

20.9. $\xi(r,t) = \dfrac{A}{\sqrt{r}} \cdot \cos(\omega t - kr)$, где $k = 2\pi/\lambda$.

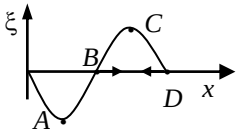
20.10. $\omega_1 = \omega_2$, $T_1 = T_2$, $\lambda_2/\lambda_1 = \upsilon_2/\upsilon_1 = 5$.

20.11. $\upsilon = a/b$.

20.12.



20.13.



20.14. $\upsilon_y(\text{B}) = -A\omega = -0{,}3$ *м/с*, $\upsilon_y(\text{C}) = 0$.

Рис. к ответу **20.15**

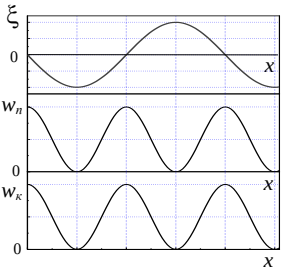
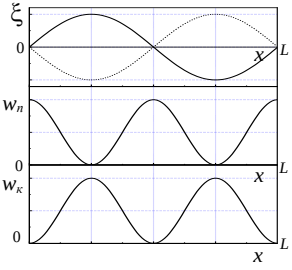


Рис. к ответу **20.16**



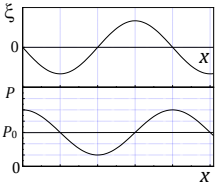


Рис. к ответу **20.17**

20.18. $v = 5{,}2\cdot10^3$ *м/с*.

20.19. (*а*) $\lambda = 1{,}04$ *м*; (*б*) $\langle w\rangle = 3{,}85$ *Дж/м*^{3};
(*в*) $\vec{S} = 7{,}7\cdot\sin^2(\omega t - 6{,}04x_0)\cdot\vec{e}_x$ (*Вт/м*^{3});

(*г*) $I = 20$ *кВт/м*^{2}; (*д*) $\langle\Phi\rangle = 2$ *Вт*.

20.20. (*а*) $v = 2\cdot10^8$ *м/с*; (*б*) $E_0 = 2\cdot10^4$ *В/м*;
(*в*) $\langle w\rangle = 4\cdot10^{-3}$ *Дж/м*^{3};

(*г*) $I = 800$ *кВт/м*^{2}.

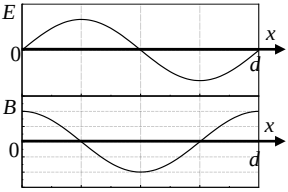


Рис. к ответу **20.21**

20.21. $d = \lambda$.

20.22. (*а*) $\vec{B} = (E_0k/\omega)\cdot\cos(\omega t - kx)\cdot\vec{e}_z$;
(*б*) $w = (1/\mu_0)(E_0k/\omega)^2\cdot\cos^2(\omega t - kx)$;
(*в*) $\vec{S} = (w\cdot\omega/k)\cdot\vec{e}_x$; (*г*) $I = kE_0^2/2\mu_0\omega$.

20.23. (*а*) $I = 10^{-2}$ *Вт/м*^{2}; (*б*) $\langle w\rangle = 10^{-10}$ *Дж/м*^{2}; (*в*) $E_0 = 3{,}17$ *В/м*; $B_0 = 1{,}58\cdot10^{-8}$ *Тл*; (*г*) $\vec{E}(t) = E_0\cos(\omega t + \alpha)\cdot\vec{e}_y$;

$$\vec{B}(t) = B_0\cos(\omega t + \alpha)\cdot\vec{e}_z.$$

20.24. $W = \sqrt{\dfrac{\varepsilon_0\varepsilon}{\mu_0\mu}}\cdot(E_0^2/2)\pi R^2(1-r)\cdot\tau = 5\cdot10^{-4}$ *Дж*.

20.25. (*а*) $I = 1{,}67$ *Вт/м*^{2}; (*б*) $E_0 = 25{,}1$ *В/м* и $B_0 = 1{,}7\cdot10^{-7}$ *Тл*;
(*в*) $P = 188{,}4$ *Вт*.

20.26. (*а*) $E_0 = 54{,}8$ *В/м*; (*б*) $I = 4$ *Вт/м*^{2}.

20.27. $\vec{v} = 2\cdot10^8\,\vec{e}_x$ (*м/с*), $\varepsilon = 2{,}25$.

§21. *Интерференция света*

21.2. $A = A_0\cdot\sqrt{N}$.

21.3. Интенсивность пульсирует с периодом $\tau = 10$ *с*.

21.4. $\left\langle E_p^2(t)\right\rangle = \left\langle E_{x0}^2\cos^2(\omega t)\right\rangle + \left\langle E_{y0}^2\cos^2(\omega t + \delta)\right\rangle \;\Rightarrow\; I_p = I_1 + I_2$.

21.5. $\Delta x_2 = 2\cdot\dfrac{l}{d}\lambda_0\cdot\dfrac{n-1}{n} = 0{,}25$ *мм*.

21.6. $k = h\cdot(n-1)/\lambda = 5$.

21.7. $\Delta\lambda = (n-1)\cdot\lambda_0 = 0{,}15$ *мкм*.

21.8. $\Delta n = \Delta/h \le 5\cdot10^{-6}$.

21.9. $\Delta n = \dfrac{0{,}1\cdot\lambda_0}{l} = 10^{-6}$ (0,000001 – т.е. в 6-м знаке после запятой!).

21.10. $h_{min} = \dfrac{\lambda_{ж}}{4\sqrt{n^2-\sin^2\alpha}} = 0{,}13$ *мкм*.

21.11. $h = \lambda_0/4n_1 = 0{,}15$ *мкм*.

21.12. $N = 2\theta\cdot n/\lambda = 5$ *см*$^{-1}$.

21.13. *а*) $\theta = \dfrac{\lambda}{2n\Delta x} = 10^{-3}$ *рад*; *б*) $\dfrac{\lambda}{\Delta\lambda} = \dfrac{2nl\theta}{\lambda} = 80$.

21.14. $\lambda_{02} = \dfrac{l_2}{l_1}\cdot\lambda_{01} = 0{,}7$ *мкм*.

21.15. $n_1 = \dfrac{r_1^2}{r_2^2-r_1^2} = 5$; $n_2 = n_1 + 1 = 6$; $\lambda = \dfrac{r_2^2-r_1^2}{R} = 525$ *нм*.

21.16. $\Delta r_x = \dfrac{\sqrt{m_2}-\sqrt{m_1}}{\sqrt{m_3}-\sqrt{m_1}}\cdot\Delta r = 3{,}2$ *мм*.

21.17. $n = \dfrac{m\lambda_0\cdot R}{r_3^2} = 1{,}33$.

21.18. $r_2 = \sqrt{r_1^2-2Rh} = 4$ *мм*.

21.19*. $r_6 = \sqrt{r_0^2+(m-1/2)\lambda_0\cdot R} \approx 4{,}0$ *мм*.

21.20*. $r_{10} = \sqrt{2m\lambda_0\cdot(n-1)/D} = 3$ *мм*.

21.21*. $R = \dfrac{d_1+d_2}{d_1-d_2}\cdot\dfrac{d_1\cdot d_2}{N\cdot\lambda} = 20$ *см*.

21.22. *а*) $l_{ког} = \dfrac{\lambda_1\cdot\lambda_2}{\lambda_2-\lambda_1} \approx \dfrac{\lambda_{1,2}^2}{\Delta\lambda} = 12$ *мкм* $\approx 0{,}01$ *мм* ;

б) $\tau_{ког} \approx \dfrac{\lambda_{1,2}^2}{c \cdot \Delta\lambda} \approx 4 \cdot 10^{-14}\ с$, *в)* $r_{ког} = \dfrac{\lambda \cdot L}{D} \approx 0{,}3\ мм$.

21.23. $r_{ког}^{(C)} = \dfrac{\lambda}{\beta} = 0{,}05\ мм$.

21.24*. $b_{max} \approx \dfrac{1}{2}\Delta x = \dfrac{1}{2}\dfrac{l}{d}\lambda$, где Δx – ширина интерференционной полосы.

Пояснение: при такой ширине щели центральный максимум интерференционной картины для двух нитевидных источников, расположенных у одного края каждой щели (они расположены на расстоянии d друг от друга) накладывается на минимум 1-го порядка интерференционной картины от нитевидных источников расположенных у другого её края.

§22. *Дифракция Френеля*

22.1. $r_m = \sqrt{m\lambda l}$.

22.2. $r_{min} = \sqrt{0{,}5\lambda l} = 0{,}5\ мм$.

22.3. $l = d^2/2\lambda = 1\ м$. В центре – светлое пятнышко, пятно Пуассона.

22.4. $I = 4I_0 \cdot \cos^2\left[\dfrac{\pi h(n-1)}{\lambda}\right]$.

22.5. *а)* $h_{max} = \dfrac{3\lambda}{8(n-1)}$; *б)* $h_{min} = \dfrac{7\lambda}{8(n-1)}$; *в)* $h_0 = \dfrac{3\lambda}{4(n-1)}$.

22.6. $l = \dfrac{r^2 L}{n\lambda L - r^2} = 2\ м$.

22.7. $\lambda = \dfrac{(r_2^2 - r_1^2)(l+L)}{2lL} = 0{,}6\ мкм$.

22.8. $h = \dfrac{5\lambda}{8(n-1)} = 2{,}5\ мкм$.

22.9. $l = d^2/4\lambda = 0{,}5\ м$.

22.11. $h = \dfrac{\lambda}{2(n-1)}$.

22.12. *а)* $I \approx 0$; *б)* $I = I_0/2$.

22.13. *а*) $I = 4I_0$; *б*) $I = 2I_0$; *в*) $I = I_0$.

22.14. *а*) $h = \dfrac{\lambda}{4(n-1)} = 0{,}25$ *мкм; б*) $h = \dfrac{3\lambda}{4(n-1)} = 1{,}5$ *мкм*;

в) $h = \dfrac{\lambda}{2(n-1)} = 0{,}5$ *мкм*.

§23. *Дифракция Фраунгофера на щели*

23.2. *а*) дифракция Фраунгофера, т.к. $b^2/(l\lambda) \approx 0{,}1 << 1$.

б) $I_0^* \approx \dfrac{b^2}{l\lambda} I_0 \approx 0{,}1 \cdot I_0 = 10$ *мВт/см*^{2}.

23.3. Дифракция Фраунгофера, т.к. $b^2/(l\lambda) \approx 0{,}1 << 1$; $\Delta x = 2\lambda l/b = 10$ *мм* >> b.

23.4. $I_0^*/I_1 = (3\pi/2)^2 \approx 22{,}2$.

23.5. $I(\varphi) = I_0^* \cdot \dfrac{\sin^2\alpha}{\alpha^2}$, где $\alpha = \dfrac{\pi b \sin\varphi}{\lambda}$, а I_0^* – интенсивность в центре дифракционной картины.

23.6. $\Delta x \approx (\lambda_{кр} - \lambda_{ф}) \cdot F/b \approx 0{,}7$ *мм*.

23.7. $\alpha = \pm\arcsin\left(\dfrac{m\lambda}{b}\right) = \pm 30°$, $m = 3$, $b = 6\lambda$.

23.8. Ширина уменьшится примерно в 2 раза, а высота I_0^* увеличится в 4 раза.

23.9. $\Delta x = \dfrac{2F\lambda}{\sqrt{b^2 - \lambda^2}}$.

23.10. Т.к. $b^2/\lambda = 0{,}5$ *м* дифракция Френеля на расстояниях примерно 5 – 100 *см* за преградой; дифракция Фраунгофера при $l >> 50$ *см*; геометрическая оптика $l < 5$ *см* .

23.11. $h \approx \lambda L/d = 40$ *м*.

23.12. Изображения объектов на грани различимости. Однако их различить ещё можно, так как $h > h_{min} \approx 1{,}22\lambda L/d \cong 0{,}75$ *м*.

23.13. $\dfrac{b^2}{L_1^* \cdot \lambda} \approx 1$ – дифракция Френеля; $\dfrac{b^2}{L_2^* \cdot \lambda} \approx 0{,}1 << 1$ – дифракция Фраунгофера.

23.14*. В центральной области дифракционной картины ($|\sin\varphi| < \lambda/b$) будет располагаться $2n - 1$ максимума с быстро уменьшающейся от центра к периферии амплитудой (см. Рис. *а*). При уменьшении ширины щелей (увеличении n) картина приближается к классической картине опыта Юнга.

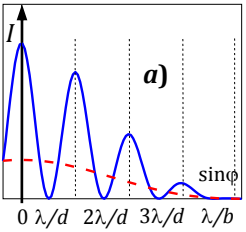


Рис. к ответу **23.14***

23.15*. Картина изменится на негативную по сравнению с описанной в ответе к предыдущей задаче – в центре будет располагаться минимум. См. рисунок к этому ответу – Рис. *б*.

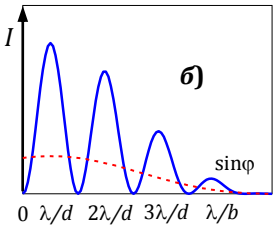


Рис. к ответу **23.15***

23.16. $\sin\varphi_{1,2} = \sin\varphi_0 \pm \lambda/b$; $\varphi_1 = 33{,}37°$; $\varphi_2 = 26{,}74°$; $\varphi_1' = 3{,}37°$; $\varphi_2' = 3{,}26°$.

23.17. $\sin\varphi_1 = \pm\lambda/b_1 = \pm 3{,}31°$.

23.18. $h = \dfrac{\lambda}{2(n-1)}$; $\varphi = \pm\arcsin\left(\dfrac{\lambda}{b}\right)$.

23.19. $\sin\beta_{1,2} = \sin\alpha \pm \lambda/b$;
а) $29{,}7° < \beta < 30{,}3°$; *б*) $33{,}4° < \beta < 26{,}7°$; *в*) $0° < \beta < 90°$.

§24. *Дифракционная решётка*

24.1. $d = 4\lambda = 2{,}8\cdot10^{-4}$ *см*; $n = 357$ *мм*$^{-1}$.

24.2. $\lambda = \dfrac{d\sin\Delta\varphi}{\sqrt{5-4\cos\Delta\varphi}} \approx 0{,}6$ *мкм*.

24.3. $\Delta x = \dfrac{2R}{(n-1)\cdot\sqrt{d^2/\lambda^2 - 1}} = 8$ *см*.

24.4. $D(\varphi) = \dfrac{\mathrm{tg}\varphi}{\lambda}$.

24.5. $\Delta\varphi_2 \approx \dfrac{2\lambda}{Nd\cdot\sqrt{1-(m\lambda/d)^2}} \approx 2\lambda/(Nd) \approx 11''$.

24.6. $m \geq \left[\dfrac{\lambda}{(\lambda_2-\lambda_1)\cdot nl}\right] + 1 = 4$, т.е. начиная с 4-го порядка.

24.7. *а*) главные максимумы будут расположены в два раза гуще; *б*) высота

главных максимумов уменьшится в 4 раза ($\sim N^2$); *в*) ширина главных максимумов останется прежней ($Nd = const$); *г*) площадь под кривой распределения интенсивности по экрану уменьшится в 2 раза.

24.8. $R = mN = ml/d \le l/\lambda$ ($m = 1, 2, ...$).

24.9. $d/3 \le b < d/2$ (0,8 *мкм* $\le b <$ 1,2 *мкм*).

24.10. $\lambda_2 = \dfrac{\sin\varphi_2}{2\sin\varphi_1} \cdot \lambda_1 = 497$ *нм* $\approx 0{,}5$ *мкм*.

24.11. $D_\varphi = \dfrac{m}{d \cdot \sqrt{1-(m\lambda/d)^2}}$.

24.12. $\Delta x = F \cdot \left(\dfrac{\lambda_{кр}}{\sqrt{d^2 - \lambda_{кр}^2}} - \dfrac{\lambda_{ф}}{\sqrt{d^2 - \lambda_{ф}^2}} \right) \approx 733$ *мм*.

24.13. $D_x = F \cdot D_\varphi = \dfrac{F}{\sqrt{d^2 - \lambda^2}} \approx 1{,}2$ *мм/нм*; $R = m\dfrac{l}{d} = 10^5$.

24.14. *а*) не изменится; *б*) уменьшится в 4 раза; *в*) удвоится; *г*) уменьшится в 2 раза.

24.15. *а*) не изменятся; *б*) уменьшится в 2 раза; *в*) не изменится; *г*) уменьшится в 2 раза.

24.17. $m^{max} = \left[\dfrac{d}{\lambda} \right] = 3$ ([...] – целая часть числа).

§25. *Поляризация света*

25.3. $I_{\text{I}} = I_*/2$.

25.4. $I = I_0/2$.

25.5. $I_{\text{I}}/I_* = P/(1-P) = 1/3$.

25.6. $P = \dfrac{k}{1+k}$. *а*) $P = 0{,}5$; *б*) $P = 0{,}91$.

25.7*. *а*) $P_{\text{II}} = \dfrac{2P_1}{1+P_1^2} \approx 0{,}995$; *б*) $P_\perp = 0$.

25.8*. $k = \dfrac{1-P_1}{1+P_1}\cdot\alpha_1^2 = 0{,}0475.$

25.9. $\alpha = \arccos(\sqrt{2}/n) = 45°.$

25.10. $P = \dfrac{n-1}{n-1+2\sin^2\alpha}$ или $P = \dfrac{n-1}{n-\cos 2\alpha} = 2/3$.

25.11. $P = \cos\alpha = 0{,}5.$

25.12*. Уменьшится в $k = \dfrac{1+P_1^2}{1-P_1^2} \approx$ 9,5 *раз.*

25.13. $P = \dfrac{n-1}{n\cdot(1-2\cos^2\theta)+1} = 0{,}5\,;\; k = \dfrac{n-1}{2(1-n\cdot\cos^2\theta)} = 1;\;\; P = \dfrac{k}{k+1}.$

25.14. $\alpha = \operatorname{arcctg}(n) \approx 37°.$

25.15. $\alpha_Б = \operatorname{arctg}\left(1/\sin\alpha_{пр}\right) = \operatorname{arctg}\sqrt{2} \approx 54°\,44'.$

25.16. *а*) $I_{\parallel} = \dfrac{1}{2}\cdot I_*\cos^2\theta = \dfrac{1}{8}\cdot I_*$; *б*) $I_{\perp} = \dfrac{1}{2} I_*\cdot\sin^2\theta = \dfrac{3}{8}\cdot I_*$.

25.17. Поляризация света может быть эллиптической, циркулярной и линейной.

25.18. *а*) Во всех трёх точках свет поляризован линейно;

б) $I_A = I_B = ½I_*$; *в*) $I_C = ½I_*\cdot\cos^2(\theta_1+\theta_2)$; *г*) $I_C = 0$.

25.19. Свет поляризован циркулярно; $I_1 = I_0$, $E_{01} = E_0/\sqrt{2}$.

25.20. *а*) $m\lambda_0 < h < (m+½)\cdot\lambda_0$; *б*) $(m+½)\cdot\lambda_0 < h < (m+1)\cdot\lambda_0$, где $m = 0, 1, 2, \ldots$

25.21. Интенсивность света будет изменяться от 0 до $I_0/4$, четыре раза за один оборот кристаллической пластинки.

25.22. $\Delta x = \dfrac{\lambda}{\varphi\cdot(n_e - n_o)} = 0{,}6$ *см.*

25.23*. С помощью поляризатора и пластинки в четверть волны.

25.24*. $h = \dfrac{\lambda}{2hK_2} \approx 1{,}6$ *мм.* **25.25*.** $E = \dfrac{1}{\sqrt{2K_3 h}} \approx 1{,}5\cdot 10^6$ *В/м.*

Справочные материалы

Скорость света в вакууме: $c \approx 3 \cdot 10$ *м/с*.

Элементарный заряд: $e \approx 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ *Кл*.

Масса электрона: $m_e \approx 0{,}91 \cdot 10^{-30}$ *кг.*

Масса протона: $m_p \approx 1{,}67 \cdot 10^{-27}$ *кг.*

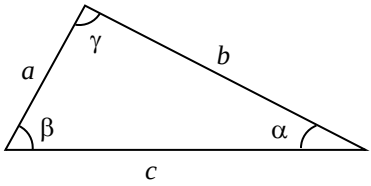
Электрическая постоянная: $\varepsilon_0 \approx 8{,}86 \cdot 10^{-12}$ *Кл*^{2} */(Н·м*^{2}*)*;

Магнитная постоянная: $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ *Н/А*^{2} .

Масса Земли: $M_З \approx 6 \cdot 10^{24}$ *кг.*

Средний радиус Земли: $R_З \approx 6{,}4 \cdot 10^6$ *м.*

Некоторые тригонометрические соотношения



Теорема косинусов:

$c^2 = a^2 + b^2 - 2\,ab \cdot \cos\gamma$.

Теорема синусов:

$$\frac{\sin\alpha}{a} = \frac{\sin\beta}{b} = \frac{\sin\gamma}{c}$$

$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}.$$

$$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}.$$

$$2\cos^2\frac{\alpha}{2} = 1 + \cos\alpha\,,$$

$$2\sin^2\frac{\alpha}{2} = 1 - \cos\alpha\,.$$

Формулы для приближенных вычислений[*)]

$\frac{1}{1\pm\delta} \approx 1 \mp \delta$, $\delta < 0{,}031$;

$\sqrt{1\pm\delta} \approx 1 \pm \frac{1}{2}\delta$, $\delta < 0{,}085$;

$sin\delta \approx \delta$, $\delta < 0{,}077$ *рад* (4,4°);

$cos\delta \approx 1 - \frac{1}{2}\delta^2$, $\delta < 0{,}387$ *рад*;

$e^{\pm\delta} \approx 1 \pm \delta$, $\delta < 0{,}045$;

$\ln(1\pm\delta) \approx \pm\delta$. $\delta < 0{,}045$;

Спектральный состав белого света

Цвет	Фиолетовый	Синий	Голубой
λ, *нм*	400–450	450–480	480–500

Цвет	Зелёный	Жёлтый	Оранжевый	Красный
λ, *нм*	500–560	560–590	590–620	620–760

[*)] Для указанных значений δ погрешность приближённых вычислений не превышает 0,1%