

Часть I. МЕХАНИКА. ЭЛЕКТРИЧЕСТВО

Раздел первый. МЕХАНИКА

§1. Кинематика материальной точки и абсолютно твёрдого тела

• **Кинематика** – раздел механики, изучающий движение тел без анализа причин, *обуславливающих* это движение. Простейшей моделью физического тела является **материальная точка** (МТ), которой называют тело, размерами которого можно пренебречь в условиях данной задачи.

Положение любого тела в пространстве может быть определено только по отношению к **системе отсчёта** (СО). Для количественного описания движения с последней связывается *система координат*, в простейшем случае – декартова прямоугольная система координат.

Положение МТ в такой системе задается радиус-вектором \vec{r} , проведённым из начала координат к данной точке:

$$\vec{r} = x \cdot \vec{e}_x + y \cdot \vec{e}_y + z \cdot \vec{e}_z. \quad (1.1)$$

• Вектор $\Delta\vec{r}$, соединяющий начальную и конечную точки движения, называется *перемещением*. Линия, которую описывает МТ при своём движении, представляет собой **траекторию**. Она задается уравнением кривой. **Путь** Δl – это *длина участка траектории*, причём всегда справедливо $\Delta l \geq |\Delta\vec{r}|$.

• Мгновенная скорость МТ есть первая производная радиус-вектора по времени.

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}. \quad (1.2)$$

В декартовой системе координат можно записать:

$$\vec{v} = V_x \cdot \vec{e}_x + V_y \cdot \vec{e}_y + V_z \cdot \vec{e}_z, \quad (1.3)$$

где $\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$ – базисные векторы (орты) координатных направлений, а проекции скорости равны соответственно:

$$V_x = \frac{dx}{dt}, V_y = \frac{dy}{dt}, V_z = \frac{dz}{dt}. \quad (1.4)$$

Нетрудно показать, что модуль вектора скорости $|\vec{v}| = \sqrt{V_x^2 + V_y^2 + V_z^2}$ равен путевой скорости:

$$v = \frac{dl}{dt}. \quad (1.5)$$

Зная мгновенную скорость как функцию времени, можно найти вектор перемещения МТ:

$$\Delta \vec{r} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{V}(t) dt, \quad (1.6)$$

а также изменение координат и пройденный путь:

$$\Delta x = \int_{t_1}^{t_2} V_x(t) dt; \Delta y = \int_{t_1}^{t_2} V_y(t) dt; \Delta z = \int_{t_1}^{t_2} V_z(t) dt; \Delta l = \int_{t_1}^{t_2} v(t) dt. \quad (1.7)$$

• Мгновенным ускорением называется первая производная скорости по времени:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{V}}{dt}, \quad \vec{a} = a_x \cdot \vec{e}_x + a_y \cdot \vec{e}_y + a_z \cdot \vec{e}_z, \quad (1.8)$$

где проекции ускорения равны: $a_x = \frac{dV_x}{dt}$, $a_y = \frac{dV_y}{dt}$ и $a_z = \frac{dV_z}{dt}$.

Зная функцию $\vec{a}(t)$, можно определить изменение вектора скорости за промежуток времени между моментами t_1 и t_2 :

$$\Delta \vec{V} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{a}(t) dt. \quad (1.9)$$

Если известны, кроме того, начальные положение $\vec{r}(0)$ и скорость $\vec{V}(0)$ МТ, то нетрудно узнать закон изменения скорости и закон движения материальной точки:

$$\vec{V}(t) = \vec{V}(0) + \int_0^t \vec{a}(t) dt; \quad (1.10)$$

$$\vec{r}(t) = \vec{r}(0) + \int_0^t \vec{V}(t) dt. \quad (1.11)$$

Вектор ускорения в общем случае составляет некоторый угол с касательной к траектории в данной точке. Часто оказывается удобным разложить вектор \vec{a} на две составляющие: касательную к траектории в данной точке – \vec{a}_τ и перпендикулярную к касательной – \vec{a}_n :

$$\vec{a} = \vec{a}_\tau + \vec{a}_n. \quad (1.12)$$

Векторы \vec{a}_τ и \vec{a}_n называют *тангенциальным* и *нормальным* ускорениями соответственно. При этом их модули равны:

$$a_n = \frac{v^2}{R_{кр}}; \quad a_\tau = \frac{dv}{dt}; \quad a = \sqrt{a_n^2 + a_\tau^2}, \quad (1.13)$$

где $R_{кр}$ – радиус кривизны траектории.

При описании криволинейного движения материальной точки удобно также пользоваться и угловыми характеристиками движения – угловыми перемещением, скоростью и ускорением.

• **Малым угловым перемещением** МТ называют **вектор** $\delta\vec{\varphi}$, модуль которого равен углу поворота радиуса, проведённого от оси вращения к этой точке, и направленный вдоль указанной оси в соответствии с правилом правого винта.

• **Угловая скорость** есть первая производная по времени углового перемещения:

$$\vec{\omega} = \frac{d\vec{\varphi}}{dt}. \quad (1.14)$$

При движении МТ по окружности радиуса R линейная и угловая скорости связаны между собой равенством:

$$\vec{V} = [\vec{\omega}, \vec{R}]. \quad (1.15)$$

• **Угловым ускорением** называют первую производную по времени от вектора угловой скорости:

$$\vec{\beta} = \frac{d\vec{\omega}}{dt}. \quad (1.16)$$

Если движение происходит в одной плоскости, то можно определить скалярную величину – угол поворота радиус-вектора МТ:

$$\Delta\varphi = \int_{t_1}^{t_2} \omega(t) dt. \quad (1.17)$$

Положение твёрдого тела (ТТ) в пространстве полностью определяется заданием координат трёх не совпадающих друг с другом точек, то есть заданием положения треугольника.

Простейшим типом движения ТТ является **поступательное**. При этом **каждая прямая, связанная жёстко с ТТ, движется параллельно самой себе**. При описании такого движения, когда все точки тела движутся по одинаковым траекториям, можно пользоваться соотношениями, определяющими кинематику ма-

териальной точки.

Другим простейшим видом представляется **вращение** ТТ около неподвижной оси, при котором **все точки тела движутся по окружностям, центры которых лежат на одной прямой**, называемой осью вращения. Описать такое движение можно всего лишь одной координатой, задав угол поворота ТТ относительно фиксированного направления.

Более сложным оказывается так называемое **плоское движение** ТТ, при котором **все его точки движутся в параллельных плоскостях**. Такое движение можно представить, комбинируя поступательное движение тела и его поворот вокруг оси перпендикулярной плоскостям, в которых движутся точки ТТ. Тогда скорость любой точки тела равна:

$$\vec{V}_i = \vec{V}_0 + [\vec{\omega}, \vec{r}_i], \quad (1.18)$$

где \vec{V}_0 – скорость поступательного движения оси поворота, $\vec{\omega}$ – угловая скорость поворота, \vec{r}_i – радиус вектор, проведённый от оси вращения к i -ой точке ТТ.

Необходимо подчеркнуть, что разложение движения на поступательное и вращательное может быть произведено *бесконечным числом способов*. Ось вращения может быть выбрана произвольно. При этом какую ось мы бы ни выбрали для описания движения, *угловая скорость будет иметь одно и то же значение*.

Интересно отметить, что из множества способов разложения движения всегда можно найти такой, когда распределение линейных скоростей точек тела можно находить, считая, что в данный момент тело совершает только поворот вокруг некоторой оси. Её мгновенная скорость равна нулю ($\vec{V}_0 = 0$) и она занимает разное положение в пространстве в разные моменты времени. Такую ось называют **мгновенной осью вращения**.

Приступая к решению задач по разделу кинематика, следует, прежде всего

- выбрать систему отсчёта, относительно которой рассматривается движение тел задачи, и
- связать с ней систему координат с учётом симметрии задачи (декартову, цилиндрическую, сферическую, ...).
- Далее необходимо спроектировать известные по условию задачи векторы (ускорения, скорости, начального смещения) на

оси выбранной системы координат и,

- используя приведенные выше соотношения для связи кинематических величин, записать соответствующие уравнения и найти искомые величины.

Примеры решения задач

1.1. Двигатель ракеты сообщает ей при взлёте постоянное ускорение \vec{a} , составляющее угол α с горизонтом. Через время τ после старта двигатель выключают. Найти расстояние L между точками старта и падения ракеты, считая, что её движение началось без начальной скорости. Сопротивлением воздуха пренебречь.

Решение

Систему отсчёта естественно связать с Землёй и использовать прямоугольную декартову систему координат, поместив её начало в точку старта (рис. 1.1).

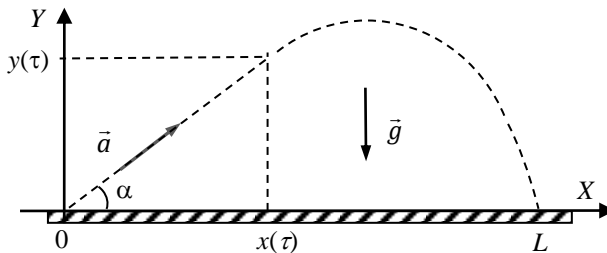


Рис. 1.1

По условию задачи известны точка вылета, начальная скорость ($\vec{V}_0 = 0$) и ускорения на первом (\vec{a}) и втором (\vec{g}) этапе движения. На этапе пока работает двигатель можно записать:

$$V_x(t) = V_{0x} + \int_0^t a_x(t) dt = (a \cdot \cos \alpha) \cdot t,$$

$$V_y(t) = V_{0y} + \int_0^t a_y(t) dt = (a \cdot \sin \alpha) \cdot t,$$

$$x(t) = x_0 + \int_0^t V_x(t) dt = (a \cdot \cos \alpha) \cdot \frac{t^2}{2},$$

$$y(t) = y_0 + \int_0^t V_y(t) dt = (a \cdot \sin \alpha) \cdot \frac{t^2}{2}.$$

После выключения двигателя:

$$\begin{aligned} V_x(t) &= V_x(\tau), \\ V_y(t) &= V_y(\tau) - g \cdot (t - \tau), \\ x(t) &= x(\tau) + V_x(\tau) \cdot (t - \tau), \\ y(t) &= y(\tau) - \frac{g(t - \tau)^2}{2}. \end{aligned}$$

Момент падения ракеты определяется условием $y(\tau_1) = 0$, где τ_1 – время всего полёта ракеты. Отсюда

$$\tau_1 = \tau \pm \sqrt{\frac{2y(\tau)}{g}}.$$

Физический смысл имеет только одно решение, соответствующее $\tau_1 > \tau$, т.е. $\tau_1 = \tau + \sqrt{\frac{2y(\tau)}{g}}$.

Искомая дальность полёта находится из условия:

$$\begin{aligned} L = x(\tau_1) &= a \cos \alpha \cdot \frac{\tau^2}{2} + a \cos \alpha \cdot \tau \sqrt{\frac{a \sin \alpha \cdot \tau^2}{g}} = \\ &= a \tau^2 \cdot \cos \alpha \cdot \left(\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{a \sin \alpha}{g}} \right). \end{aligned}$$

1.2. Точка A находится на ободе колеса радиуса R , которое катится без проскальзывания с постоянной скоростью \vec{V}_0 по горизонтальной плоскости. Найти скорость точки \vec{V}_A в произвольный момент времени. Написать уравнения траектории (в параметрической форме), по которой движется точка A , и найти её путь за один оборот колеса.

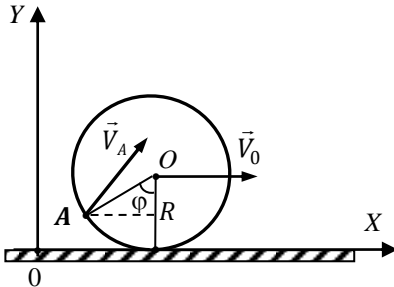


Рис. 1.2

Решение

Рассмотрение будем вести относительно системы отсчёта, связанной с Землёй. Системе координат расположим, как это показано на рисунке 1.2. Движение колеса – плоское. В частности, оно может быть представлено как совокупность поступательного пере-

мещения со скоростью движения оси колеса \vec{V}_0 и вращения относительно неё с угловой скоростью $\omega = \frac{V_0}{R}$. Если положение точки A относительно вертикального радиуса колеса охарактеризовать углом φ – см. рис. 1.2, то её координаты в неподвижной системе в произвольный момент времени t можно представить так:

$$\begin{aligned}x(t) &= V_0 t - R \sin \varphi, \\y(t) &= R - R \cos \varphi.\end{aligned}$$

или с учётом очевидных равенств $\varphi(t) = \omega t$ и $\omega = \frac{V_0}{R}$:

$$\begin{aligned}x(t) &= V_0 t - R \sin \frac{V_0}{R} t, \\y(t) &= R - R \cos \frac{V_0}{R} t.\end{aligned}$$

По сути, это, записанные в параметрической форме, уравнения циклоиды (параметром, при этом, выступает время t) – см. пунктир на рис. 1.2, *a*.

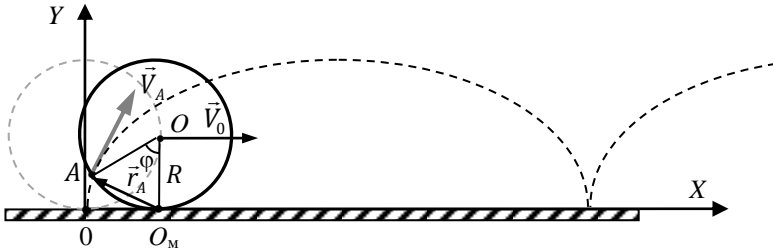


Рис. 1.2, *a*

Проекции скорости точки A по координатным осям равны:

$$\begin{aligned}V_x(t) &= \frac{dx}{dt}(t) = V_0 - V_0 \cdot \cos\left(\frac{V_0}{R} t\right) = V_0 \cdot \left[1 - \cos\left(\frac{V_0}{R} t\right)\right], \\V_y(t) &= \frac{dy}{dt}(t) = V_0 \cdot \sin\left(\frac{V_0}{R} t\right).\end{aligned}$$

Модуль скорости точки V , как мы знаем, равен её путевой скорости, поэтому:

$$\begin{aligned}
 V_A = v(t) &= \sqrt{V_x^2(t) + V_y^2(t)} = V_0 \sqrt{2 \left[1 - \cos\left(\frac{V_0}{R} t\right) \right]} = \\
 &= V_0 \sqrt{4 \sin^2\left(\frac{V_0}{2R} t\right)} = 2V_0 \cdot \left| \sin\left(\frac{V_0}{2R} t\right) \right|. \quad (*)
 \end{aligned}$$

За время T одного полного оборота колеса его ось смещается на расстояние, равное периметру колеса (окружности):

$$V_0 \cdot T = 2\pi R, \text{ т.е. } T = \frac{2\pi R}{V_0}.$$

Тогда путь, пройденный точкой A за это время T (период) вдоль траектории равен:

$$\begin{aligned}
 \Delta l &= \int_0^T V(t) dt = 2V_0 \int_0^T \left| \sin\left(\frac{V_0}{2R} t\right) \right| dt = 4V_0 \int_0^{T/2} \sin\left(\frac{V_0}{2R} t\right) dt = 8R \left[-\cos\left(\frac{V_0}{2R} t\right) \right]_0^{T/2} = \\
 &= 8R \left(-\cos\frac{\pi}{2} + 1 \right) = 8R.
 \end{aligned}$$

Отметим, что распределение скоростей точек колеса в любой момент времени можно найти также, считая, что оно совершает поворот относительно мгновенной оси вращения O_M (так как проскальзывание отсутствует, то в любой момент времени скорость точек касания колеса и плоскости равна нулю). Тогда $\vec{V}_A = [\vec{\omega}, \vec{r}_A]$ и, находя r_A по теореме косинусов ($r_A^2 = 2R^2 - 2R^2 \cdot \cos\varphi = 4R^2 \sin^2 \frac{\varphi}{2}$), получаем:

$$V_A = \omega \cdot 2R \left| \sin\frac{\varphi}{2} \right| = 2V_0 \left| \sin\frac{\varphi}{2} \right| = 2V_0 \left| \sin\left(\frac{V_0}{2R} t\right) \right|.$$

Естественно, что мы получили такой же результат (*), как и ранее.

1.3. Зависимость модуля скорости частицы V от пройденного пути $\Delta l \equiv s^*)$ определяется функцией $V(s) = V_0 - bs$.

- а) Найти зависимость пути s от времени t .
- б) Определить зависимость модуля скорости V от t .

^{*)} В этой задаче путь для компактности нам удобнее обозначить одной буквой.

Решение

а) Заданную зависимость $V(s)$ от пройденного пути представим в виде:

$$\frac{ds}{dt} = -b \left(s - \frac{V_0}{b} \right). \quad (1)$$

Равенство (1) представляет собой дифференциальное уравнение первого порядка. Если провести замену переменной s на $u = s - \frac{V_0}{b}$, то, поскольку дифференциалы величин ds и du (малые приращения) не отличаются, равенство (1) принимает вид:

$$\frac{du}{dt} = -bu. \quad (2)$$

Это так называемое уравнение с разделяющимися переменными. Сначала оно приводится к виду:

$$\frac{du}{u} = -b dt. \quad (3)$$

А затем выполняется интегрирование правой и левой частей:

$$\ln u = -bt + \text{const}. \quad (4)$$

Константу интегрирования удобно представить как $\ln u_0$, тогда после простых преобразований и потенцирования получим:

$$u(t) = u_0 e^{-bt}. \quad (5)$$

Возвращаясь к исходной переменной $s = u + \frac{V_0}{b}$, запишем:

$$s(t) = \frac{V_0}{b} + u_0 e^{-bt}. \quad (6)$$

Константа u_0 , определяется из начальных условий – $s(0) = 0$:

$$0 = \frac{V_0}{b} + u_0 \cdot 1 \Rightarrow u_0 = -\frac{V_0}{b}.$$

Итак, мы получили, что путь зависит от времени по закону:

$$s(t) = \frac{V_0}{b} \cdot (1 - e^{-bt}). \quad (8)$$

б) Зависимость модуля скорости от времени получим, дифференцируя полученную функцию $s(t)$ (путь) по времени (8):

$$V(t) = V_0 \cdot e^{-bt}. \quad (9)$$

Полученные зависимости представлены графически на рисун-

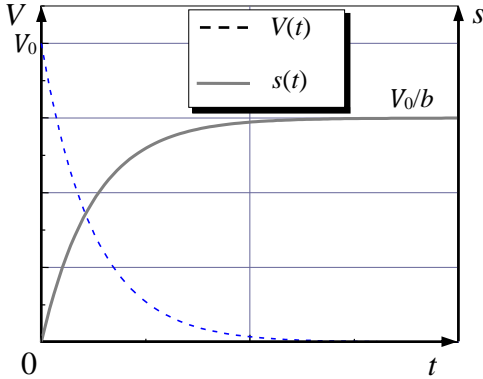


Рис. 1.3

ке 1.3 и имеют ясный, как нам кажется, физический смысл, который мы предлагаем продумать читателю самостоятельно.

1.4*. Лодка пересекает реку с постоянной относительно воды и перпендикулярной берегам скоростью $V_{\text{отн}} = 0,3 \text{ м/с}$. Ширина реки равна $H = 63 \text{ м}$. Скорость течения изменяется по параболическому закону $u(y) = u_0 - 4 \frac{u_0}{H^2} \left(y - \frac{H}{2} \right)^2$, где y - расстояние от берега, u_0 - константа, равная 5 м/с . Найти снос лодки L вниз по течению от пункта её отправления до места причаливания на противоположном берегу.

Решение

Как известно, механическое движение всегда носит относительный характер - его характеристики различны в разных системах отсчёта. Поскольку в задаче дана скорость лодки **относительно воды**, будем использовать две системы отсчёта - «неподвижную», связанную с берегом, и «движущуюся» -

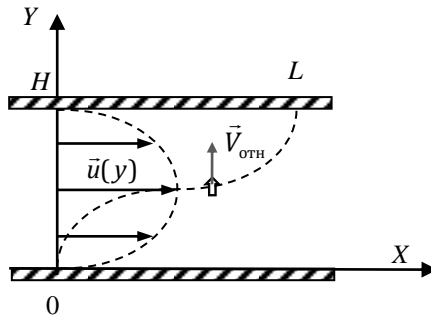


Рис. 1.4

связанную с водой в реке. Направим координатные оси обеих систем отсчёта вдоль берега (OX) и перпендикулярно к нему (OY). По закону сложения скоростей Галилея скорость лодки относительно неподвижной системы отсчёта равна сумме скорости лодки относительно движущейся системы отсчёта (воды) и скорости движущейся системы отсчёта относительно неподвижной (берега):

$$\vec{V} = \vec{u} + \vec{V}_{\text{отн}}$$

Сложное движение лодки можно представить как сумму двух более простых – вдоль берега и перпендикулярно к нему. Первое происходит со скоростью движения воды относительно берега $u(y)$, второе – со скоростью лодки относительно воды $V_{\text{отн}}$. Поскольку вдоль оси OY движение является равномерным закон этого движения можно записать в виде:

$$y(t) = V_{\text{отн}} \cdot t. \quad (1)$$

Это позволяет определить зависимость изменения скорости лодки вдоль оси OX **от времени**. Последнее необходимо для определения изменения координаты в каждом направлении, как интеграл соответствующих функций скорости по времени в пределах «времени переправы» τ :

$$\Delta y(\tau) = y(\tau) = H = \int_0^{\tau} V_y(t) dt, \quad (2)$$

$$\Delta x(\tau) = x(\tau) = L = \int_0^{\tau} V_x(t) dt. \quad (3)$$

Интеграл в равенстве (2) легко вычисляется и, поскольку ширина реки H известна, это позволяет найти время переправы:

$$H = \int_0^{\tau} V_y(t) dt = \int_0^{\tau} V_{\text{отн}} dt = V_{\text{отн}} \cdot \tau \Rightarrow \tau = H / V_{\text{отн}}. \quad (4)$$

Для определения сноса лодки вниз по течению $L = x(\tau)$ придётся провести довольно кропотливую, но несложную процедуру вычисления соответствующих интегралов:

$$L = \int_0^{\tau} u(t) dt = \int_0^{\tau} u_0 dt - 4 \frac{u_0}{H^2} \int_0^{\tau} \left[y(t) - \frac{H}{2} \right]^2 dt =$$

$$\int_0^{\tau} u_0 dt - 4 \frac{u_0}{H^2} \int_0^{\tau} \left(V_{\text{отн}} \cdot t - \frac{H}{2} \right)^2 dt =$$

$$= u_0 \tau - 4 \frac{u_0}{H} \frac{1}{V_{\text{отн}}} \frac{1}{3} \left(V_{\text{отн}} \cdot t - \frac{H}{2} \right)^3 \Bigg|_0^{\tau} =$$

$$= u_0 \tau - 4 \frac{u_0}{H} \frac{1}{V_{\text{отн}}} \frac{1}{3} \left[\left(V_{\text{отн}} \cdot \tau - \frac{H}{2} \right)^3 + \left(\frac{H}{2} \right)^3 \right] =$$

[подставим найденное ранее значение $\tau = H/V_{\text{отн}}$]

$$= u_0 \cdot \frac{H}{V_{\text{отн}}} - 4 \frac{u_0}{H} \frac{1}{V_{\text{отн}}} \frac{1}{3} \left[\left(V_{\text{отн}} \cdot \frac{H}{V_{\text{отн}}} - \frac{H}{2} \right)^3 + \left(\frac{H}{2} \right)^3 \right] =$$

$$= \frac{u_0}{V_{\text{отн}}} \cdot H - \frac{4}{3} \frac{1}{H} \frac{u_0}{V_{\text{отн}}} \left[\left(H - \frac{H}{2} \right)^3 + \left(\frac{H}{2} \right)^3 \right] = \frac{u_0}{V_{\text{отн}}} \cdot H - \frac{4}{3} \frac{1}{H^2} \frac{u_0}{V_{\text{отн}}} \frac{H^3}{4} =$$

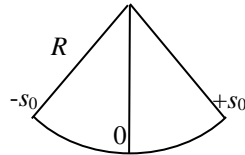
$$= \frac{u_0}{V_{\text{отн}}} \cdot H - \frac{1}{3} \frac{u_0}{V_{\text{отн}}} \cdot H = \frac{2}{3} \frac{u_0}{V_{\text{отн}}} \cdot H .$$

Итак, снос лодки с учётом численных данных задачи равен:

$$L = \frac{2}{3} \frac{u_0}{V_{\text{отн}}} \cdot H = 700 \text{ м.}$$

Задачи для самостоятельного решения

1.5. Атом в молекуле, совершая так называемые «маятниковые колебания», движется по дуге окружности радиуса R по закону $s = s_0 \cdot \cos(\omega t)$ (s – криволинейная координата вдоль дуги). Найти полное ускорение атома в точках а) $s = 0$ и б) $s = \pm s_0$. Считать $R = 10^{-9} \text{ м}$, $s_0 = 10^{-10} \text{ м}$ и $\omega = 10^{13} \text{ рад} \cdot \text{с}^{-1}$.



1.6. Частица движется по круговой орбите радиуса R так, что зависимость угла поворота радиус-вектора от времени имеет вид: $\varphi(t) = a + bt - ct^2$. Найти зависимость от времени: 1) угловой скорости, 2) линейной скорости, 3) тангенциального ускорения, 4) нормального ускорения и 5) полного ускорения частицы.

1.7. Шар вращается вокруг оси, проходящей через его центр с помощью электромотора с частотой $\nu = 1800 \text{ об/мин}$. После выключения электромотора шар, вращаясь равнозамедленно, совершил $N = 150$ оборотов и остановился. Сколько времени про-

шло с момента выключения до остановки.

1.8. Диск электропроигрывателя вращается с постоянной угловой скоростью, делая $\nu = 33,3$ об/мин. После выключения двигателя диск останавливается за счёт трения через $\tau = 20$ с. Считая движение равнозамедленным, найти, сколько оборотов сделает диск после выключения двигателя до полной остановки.

1.9. Маховик вращается, совершая $\nu_0 = 20$ об/с. После выключения двигателя, вращавшего маховик, он остановился, сделав $N = 250$ оборотов. Считая движение равнозамедленным, найти угловое ускорение маховика.

1.10. Закон изменения радиус-вектора частицы имеет вид: $\vec{r}(t) = 3t^2 \cdot \vec{e}_x + 2t^2 \cdot \vec{e}_y + 4 \cdot \vec{e}_z$. Вычислить а) модуль перемещения $|\Delta\vec{r}|$ за первые 10 с движения; б) путь Δl , пройденный частицей за это время. Объяснить полученные результаты.

1.11. Закон изменения радиус-вектора частицы имеет вид: $\vec{r} = 3t^2 \cdot \vec{e}_x + 2t \cdot \vec{e}_y + 1 \cdot \vec{e}_z$ (м). Найти: а) зависимости от времени скорости \vec{V} и ускорения \vec{a} частицы, б) модуль скорости в момент времени $\tau = 1$ с, в) приближённое значение пути Δl_{11} , пройденно-го частицей за 11-ю секунду движения.

1.12. Точка движется ускоренно по окружности вокруг неподвижной оси. Указать направления векторов линейной и угловой скорости, а также линейного и углового ускорения.

1.13. Укажите на чертеже направления вектора линейного ускорения математического маятника в следующих случаях: а) в момент прохождения положения равновесия, б) в крайнем положении, в) в промежуточном положении. Какие силы создают ускорение в рассмотренных случаях?

1.14. Укажите на чертеже направление углового ускорения точек диска в следующих случаях: а) диск вращается вокруг собственной неподвижной оси с возрастающей угловой скоростью, б) скорость вращения диска остается неизменной, а направление

оси вращения поворачивается.

1.15. Точка совершает гармонические колебания вдоль оси X с амплитудой $A = 4$ см и частотой $\nu = 5$ Гц. Найти проекции скорости V_x и ускорения a_x точки в тот момент, когда её смещение от положения равновесия определено координатой $x_1 = 2$ см.

1.16. Точка движется по окружности радиуса $R = 20$ см с постоянным тангенциальным ускорением $a_\tau = 5$ см/с². Через какое время после начала движения нормальное ускорение a_n будет: а) равно тангенциальному, б) вдвое больше тангенциального?

1.17. Компоненты скорости частицы изменяются со временем по законам: $V_x = A \cdot \cos \omega t$, $V_y = A \cdot \sin \omega t$ и $V_z = 0$, где A и ω – константы. Найти модуль скорости частицы, модуль ускорения, а также угол между векторами скорости и ускорения. На основании полученных результатов сделать вывод о характере движения частицы.

1.18. Зависимость координат частицы от времени имеет вид: $x = A \cdot \cos \omega t$, $y = A \cdot \sin \omega t$ и $z = 0$ (A и ω – константы). Определить радиус-вектор \vec{r} , скорость \vec{V} и ускорение \vec{a} частицы, а также их модули. Найти:

а) скалярное произведение векторов \vec{r} и \vec{V} ; б) скалярное произведение векторов \vec{r} и \vec{a} . Что означают полученные результаты?

в) Записать уравнение траектории частицы.

г) В каком направлении движется по траектории частица?

д) Охарактеризовать движение частицы.

1.19. Модуль скорости частицы меняется по закону $V = V_0 e^{-bt}$. Каков физический смысл константы b ?

1.20. Материальная точка движется по прямой с начальной скоростью $V_0 = 4$ м/с, причём ускорение точки направлено в сторону, **противоположную** вектору \vec{V}_0 , и его модуль изменяется со временем по закону $a = kt^2$. Определить перемещение точки за первые $\tau = 3$ с движения и её среднюю скорость за этот же промежуток времени. ($k = 1$ м/с⁴).

1.21. Цилиндрическое тело *замедленно* вращается в вязкой среде вокруг своей оси. При этом модуль углового ускорения прямо пропорционален угловой скорости. Найти:

- а) закон изменения угловой скорости и построить график $\omega = f(t)$;
 б) за какой промежуток времени угловая скорость уменьшится в $n_1 = 6$ раз, если известно, что в $n_2 = 2$ раза она уменьшается за время $t_2 = 20$ с. Начальная скорость вращения равна ω_0 .

1.22. Колесо вращается с постоянным угловым ускорением $\beta = 2 \text{ рад/с}^2$. Через $\tau = 0,5$ с после начала движения полное ускорение точек обода колеса стало равно $a = 13,6 \text{ см/с}^2$. Найти радиус колеса.

1.23. Цилиндр катится без скольжения со скоростью \vec{V}_0 (см. рис. 1.4). Найти скорости точек 1, 2 и 3. Выразить их через орты координатных осей.

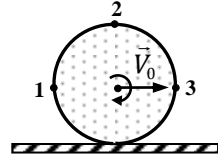


Рис. 1.4

1.24. Найти ускорение точки 2 в условиях предыдущей задачи.

1.25*. На обод колеса, имеющего неподвижную горизонтальную ось, намотана нить, на конце которой подвешен груз. В некоторый момент груз начинает опускаться с постоянным ускорением a_0 и при этом приводит во вращение колесо. Найти полное ускорение точек обода колеса в зависимости от высоты h , на которую опускается груз. Радиус колеса R .

1.26. Лодка пересекает реку с постоянной относительно воды скоростью $\vec{V}_{\text{отн}}$, перпендикулярной к течению. Скорость течения реки, ширина которой d , равна нулю у берегов и линейно возрастает по мере приближения к середине реки, где достигает максимального значения u_0 {т.е. $u(y) = 2u_0y/d$ при $0 \leq y \leq d/2$ и $u(y) = 2u_0 - 2u_0y/d$ при $d/2 \leq y \leq d$ }. Каков снос лодки ΔX вниз по течению, от места её отправления до причала на противоположном берегу реки? Оси X и Y направлены вдоль и перпендикулярно берегу соответственно.

§2. Динамика материальной точки

Изучая механическое движение, динамика выясняет причины того или иного характера этого движения. Они обусловлены взаимодействием между телами. *Мерой взаимодействия тела с окружающими его телами и полями является сила.*

Основу динамики материальной точки составляют законы Ньютона. *Первый закон*, даёт критерий выбора *инерциальных систем отсчета (ИСО)*: *в таких системах тело, на которое не действуют другие тела, движется равномерно и прямолинейно.*

Для нахождения ускорения материальной точки используют равенство, соответствующее *второму закону Ньютона*:

$$m \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = \vec{F}. \quad (2.1)$$

Здесь \vec{r} – радиус вектор, определяющий положение точки в пространстве, \vec{F} – сумма всех сил, действующих на материальную точку. С точки зрения математики записанное равенство может рассматриваться как дифференциальное уравнение второго порядка, решая которое с учётом начальных условий движения, можно найти зависимость координат материальной точки от времени (**закон движения**). По этой причине уравнение второго закона Ньютона называют также **уравнением движения**. Необходимо помнить, что второй закон Ньютона *справедлив только в инерциальных системах отсчета.*

В декартовых координатах уравнение второго закона Ньютона приобретает вид

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = F_x, \quad m \frac{d^2 y}{dt^2} = F_y, \quad m \frac{d^2 z}{dt^2} = F_z. \quad (2.2)$$

Силовое воздействие всегда носит характер взаимодействия. При этом, как утверждает *третий закон Ньютона*:

Силы взаимодействия двух МТ равны по модулю, противоположно направлены и действуют вдоль прямой, соединяющей эти точки.

При анализе движения тел с помощью законов Ньютона приходится иметь дело с различными типами сил. Для многих из них известны законы, определяющие зависимость силы взаимодействия

от расстояний, характеристик тел, состояния их движения.*)

1. Силы Всемирного тяготения. Две материальные точки с массами m_1 и m_2 притягиваются друг к другу с силами

$$\vec{F}_{12} = G \frac{m_1 m_2}{r^2} \frac{\vec{r}_{12}}{r} \quad \text{и} \quad \vec{F}_{21} = -\vec{F}_{12}. \quad (2.3)$$

Вблизи поверхности Земли сила тяжести равна:

$$F_G = G \frac{mM}{(R_3 + h)^2} \approx G \frac{mM}{R_3^2} = mg, \quad (2.4)$$

где h – высота тела массой m над поверхностью Земли, $g = G \frac{M}{R_3^2}$ – ускорение свободного падения, M – масса Земли, R_3 – её радиус.

2. Упругие силы, возникающие при деформации тел (в частности, это различные *силы реакции опор, натяжения нитей* и т.д.). В некотором интервале деформаций тел (например, пружин, стержней) выполняется закон Гука:

$$F_{\text{упр}} = k \cdot |l - l_0|, \quad (2.5)$$

где $|l - l_0|$ – величина деформации тела, k – коэффициент упругости. При этом сила упругости всегда противоположна направлению деформации тела.

3. Силы трения

Для *сухого трения скольжения* в первом приближении сила не зависит от модуля скорости:

$$\vec{F}_{\text{тр}}^{\text{ск}} = -\mu F_N \cdot \frac{\vec{V}}{V}, \quad F_{\text{тр}}^{\text{ск}} = \mu F_N, \quad (2.6)$$

где \vec{V} – скорость относительного движения тел, F_N – нормальная составляющая силы реакции опоры, μ – коэффициент трения скольжения.

При движении тел в жидких или газообразных средах возникает *сила вязкого трения*. При малых скоростях она пропорциональна скорости движения тела относительно среды:

$$\vec{F}_{\text{тр}}^{\text{вязк}} = -r \cdot \vec{V}, \quad (2.7)$$

где r – коэффициент вязкого трения.

*) Подробнее о законах этих взаимодействий см. П.К. Кашкаров, А.И. Ефимова, А.В. Зотеев, С.Н. Козлов «Курс лекций по общей физике для химических факультетов университетов» § 3.4 (стр. 41 – 43), а также в других разделах данного пособия.

4. Электромагнитные силы, возникающие при взаимодействии электрически заряженных частиц друг с другом или с электрическими и магнитными полями, описываются *обобщённой силой Лоренца*:

$$\vec{F}_L = q\vec{E} + q[\vec{v}, \vec{B}], \quad (2.8)$$

где \vec{E} и \vec{B} – векторы напряжённости электрического и индукции магнитного поля, а \vec{v} – скорость частицы.

При решении задач на эту тему следует

- *выбрать инерциальную систему отсчёта;*
- на рисунке изобразить все силы, действующие на тела, рассматриваемые в задаче и спроецировать их на координатные оси;
- записать равенства, соответствующие второму закону Ньютона (уравнения движения) в проекциях на каждую ось координат;
- если в задаче рассматривается движение двух и более тел, необходимо добавить равенства, связывающие ускорения этих тел (*уравнения кинематической связи*).
- Решить полученную систему уравнений, найдя искомые величины.

Примеры решения задач

2.1. Найти ускорения тел в системе, изображённой на рисунке. Массы всех грузов известны. Блоки считать невесомыми, а нить нерастяжимой, трением пренебречь.

Решение

а) Инерциальную систему отсчёта, свяжем с Землёй. Начало одномерной системы координат выберем на уровне осей неподвижных блоков.

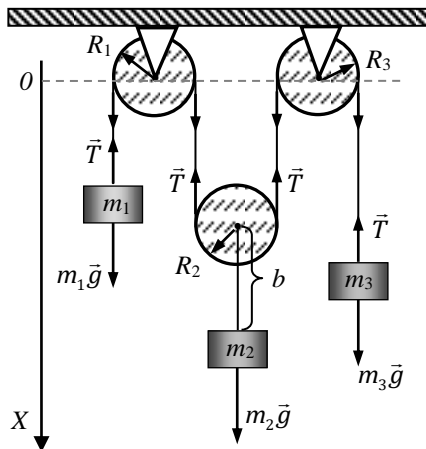


Рис. 2.1

б) Так как блоки по условию задачи невесомы, то сила натяжения нити будет постоянна по величине вдоль всей нити.

в) Запишем уравнения движения для каждого из тел:

$$m_1 a_{1x} = m_1 g - T, \quad (1)$$

$$m_2 a_{2x} = m_2 g - 2T, \quad (2)$$

$$m_3 a_{3x} = m_3 g - T. \quad (3)$$

г) Уравнение кинематической связи можно получить, выразив длину нити через координаты тел системы:

$$L = x_1 + \pi R_1 + (x_2 - b) + \pi R_2 + (x_2 - b) + \pi R_3 + x_3 = \text{const.}$$

Продифференцировав это равенство дважды, получаем связь между проекциями ускорений тел:

$$a_{1x} + 2a_{2x} + a_{3x} = 0. \quad (4)$$

д) Объединяя записанные уравнения (1–4) в систему, находим:

$$a_{1x} = \frac{m_1 m_2 - 3m_2 m_3 + 4m_1 m_3}{m_1 m_2 + m_2 m_3 + 4m_1 m_3} g,$$

$$a_{2x} = \frac{m_1 m_2 + m_2 m_3 - 4m_1 m_3}{m_1 m_2 + m_2 m_3 + 4m_1 m_3} g,$$

$$a_{3x} = \frac{m_2 m_3 - 3m_1 m_2 + 4m_1 m_3}{m_1 m_2 + m_2 m_3 + 4m_1 m_3} g.$$

2.2. Свинцовая дробинка помещена в высокий сосуд с жидкостью и отпущена без начальной скорости. Считая, что сила вязкого трения пропорциональна скорости движения дробинки, найти закон изменения этой скорости от времени $V(t)$. Размеры дробинки, свойства жидкости и коэффициент силы вязкого трения r считать известными.

Решение

Укажем, прежде всего, все силы, действующие на дробинку: $m\vec{g}$ – сила тяжести, \vec{F}_A – архимедова сила, \vec{F}_c – сила сопротивления (вязкого трения) со стороны жидкости. Выберем инерциальную систему отсчёта, связанную с Землёй. Поскольку движение является одномерным, достаточно использовать всего одну координатную ось X , направленную вертикально вниз (см. рис. 2.2).

Тогда в проекциях на эту ось уравнение движения дробинки (запись второго закона Ньютона) будет иметь вид:

$$m \frac{dV}{dt} = mg - F_A - F_c. \quad (1)$$

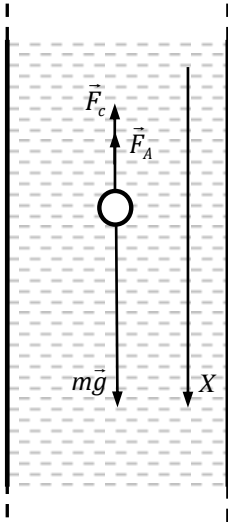


Рис. 2.2

Сила вязкого трения при движении тела в жидкости зависит от скорости движения. При небольших скоростях эта зависимость, как и предложено считать в условии данной задачи, прямо пропорциональная: $F_c = r \cdot V$ (коэффициент пропорциональности r зависит от размеров и формы тела, а также от вязких свойств среды). Архимедова сила равна $F_A = \rho g v$, где v – объём тела, а ρ – плотность жидкости, т.е. является константой, не зависящей от скорости.

Подставляя соответствующие величины в уравнение движения шарика, получаем:

$$m \frac{dV}{dt} = mg - r \cdot V - F_A. \quad (2)$$

Это дифференциальное уравнение относительно искомой функции $V(t)$. Чтобы решить приведём его к виду, удобному для интегрирования, используя стандартный приём замены переменной (см., например, задачу 1.3):

$$\frac{dV}{dt} = -\frac{r}{m} \left(V - \frac{mg - F_A}{r} \right), \quad (3)$$

$$u = V - \frac{mg - F_A}{r}, \quad \frac{du}{dt} = -\frac{r}{m} u. \quad (4)$$

Теперь переменные разделяются – $\frac{du}{u} = -\frac{r}{m} dt$, и можно проинтегрировать обе части равенства:

$$\ln u = -\frac{r}{m} t + C_1. \quad \text{Откуда после потенцирования находим:}$$

$$u(t) = C \cdot e^{-\frac{r}{m} t}.$$

Вернёмся теперь к исходной функции:

$$V(t) = \frac{mg - F_A}{r} + C \cdot e^{-\frac{r}{m} t}.$$

Подстановка начального условия задачи $V(0) = 0$ позволяет

определить константу интегрирования $C = -\frac{mg - F_A}{r}$, и записать окончательно искомый закон изменения скорости дробинки:

$$V(t) = \frac{mg - F_A}{r} \left(1 - e^{-\frac{r}{m}t} \right).$$

Видно, что скорость дробинки сначала увеличивается довольно быстро, но затем её рост замедляется, и она экспоненциально стремится к скорости “установившегося движения”:

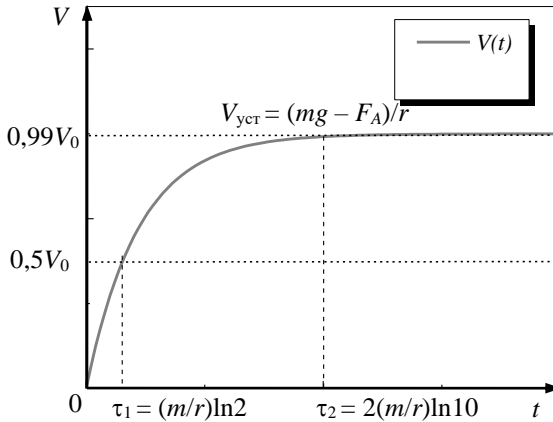


Рис. 2.3

$$V_{\text{уст}} = \frac{mg - F_A}{r}, \quad V(t) = V_{\text{уст}} \cdot \left(1 - e^{-\frac{r}{m}t} \right).$$

Данная зависимость представлена на рисунке 2.3.

2.3. Через какой промежуток времени τ в условиях предыдущей задачи скорость шарика достигнет а) половины от значения установившейся скорости? б) 99% от $V_{\text{уст}}$?

Решение

Для ответа на поставленные вопросы достаточно решить алгебраические уравнения:

а) $0,5V_{уст} = V_{уст} \cdot \left(1 - e^{-\frac{r}{m}\tau_1}\right)$, откуда $e^{-\frac{r}{m}\tau_1} = 0,5$, $\frac{r}{m}\tau_1 = \ln 2$,

$$\tau_1 = \frac{m}{r} \ln 2 \approx 0,3 \text{ с.}$$

б) $0,99V_0 = V_0 \left(1 - e^{-\frac{r}{m}\tau_2}\right)$, откуда $e^{-\frac{r}{m}\tau_2} = 0,01$, $\frac{r}{m}\tau_2 = 2 \ln 10$,

$$\tau_2 = 2 \frac{m}{r} \ln 10 \approx 2 \text{ с.}$$

Данные моменты времени отмечены на рисунке 2.3.

2.4. Однородное электрическое ($E = 300 \text{ В/м}$) и магнитное ($B = 10^{-4} \text{ Тл}$) поля направлены взаимно перпендикулярно. Каковы должны быть направление и модуль скорости электрона, чтобы его траектория была прямолинейной?

Решение

Движение электрона будет прямолинейным в случае, если у него отсутствует ускорение или оно совпадает по направлению с вектором начальной скорости электрона. Последний случай не может быть реализован, т.к. со стороны магнитного поля на движущуюся заряженную частицу действует сила Лоренца:

$$\vec{F}_L = q[\vec{v}, \vec{B}],$$

где \vec{v} – скорость движения частицы, q – её заряд. Эта сила всегда направлена перпендикулярно вектору скорости. Ускорение электрона может быть равно нулю, если сила Лоренца окажется скомпенсирована силой, действующей на электрон со стороны электрического поля: $\vec{F}_s = q\vec{E}$. Итак, $q\vec{E} = -q[\vec{v}, \vec{B}]$. Скорость электрона, при этом, должна быть равна по модулю:

$$V = \frac{E}{B} = \frac{300 \text{ В/м}}{10^{-4} \text{ Тл}} = 3 \cdot 10^6 \text{ м/с},$$

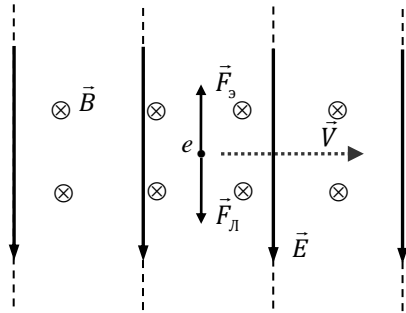


Рис. 2.4

а её направление должно обеспечить противоположное направление векторов \vec{E} и $[\vec{V}, \vec{B}]$. Чтобы определить это направление нужно вспомнить правило «левой руки» и учесть отрицательный знак заряда электрона (см. рис. 2.4).

2.5. На столе лежит доска массы $M = 1$ кг, а на доске – груз массы $m = 2$ кг. Какую силу F нужно приложить к доске, чтобы доска

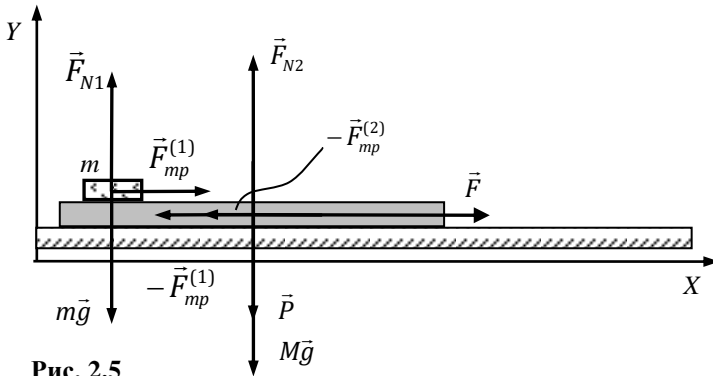


Рис. 2.5

выскользнула из-под груза? Коэффициент трения между грузом и доской $\mu_1 = 0,25$, а между доской и столом $\mu_2 = 0,5$.

Решение

Выберем инерциальную систему отсчёта, связанную с Землёй. Направим одну из координатных осей этой системы отсчёта горизонтально вдоль поверхности стола (OX) и другую – перпендикулярно к ней (OY). Укажем на рисунке все силы, действующие на груз и доску в условиях данной задачи. Далее запишем уравнения движения груза и доски в проекциях на выбранные оси координат:

$$ma_1 = F_{mp}^{(1)}, \quad (1)$$

$$Ma_2 = F - F_{mp}^{(1)} - F_{mp}^{(2)}, \quad (2)$$

$$0 = mg - F_{N1}, \quad (3)$$

$$0 = Mg + P - F_{N2}. \quad (4)$$

В уравнении (2) учтено, что по 3-му закону Ньютона силы трения, действующие между грузом и доской, равны по модулю и противоположны по направлению. По той же причине равны модули сил P и F_{N1} :

$$P = F_{N1}. \quad (5)$$

Пусть приложенная к доске сила F такова, что груз не скользит по поверхности доски – тела движутся совместно. Это позволяет записать очень простое уравнение кинематической связи:

$$a_1 = a_2 = a. \quad (6)$$

В уравнениях (1) и (2) сила $F_{mp}^{(1)}$ – сила трения покоя, а $F_{mp}^{(2)}$ – трения скольжения. Последняя по закону Кулона – Амонтона для трения скольжения имеет значение

$$F_{mp}^{(2)} = F_{mp}^{ck} = \mu_2 \cdot F_{N2}. \quad (7)$$

Условие совместного движения тел, очевидно, предполагает, что сила F имеет значение меньше искомого, так как с ростом этой силы растёт ускорение системы и должна увеличиваться сила $F_{mp}^{(1)}$, обеспечивающая ускорение грузу (см. уравнение (1)).

При некотором значении ускорения, а значит и силы F , сила достигает максимального для трения покоя величины $\mu_1 \cdot F_{N1}$ и дальнейшее увеличение F приведёт к соскальзыванию груза. Это значение силы F_{min} и требуется определить по условию задачи.

Подставляя в уравнения движения значения сил трения $\mu_1 \cdot F_{N1}$ и $\mu_2 \cdot F_{N2}$, получаем искомую пороговую величину силы F , при которой ещё возможно движение без проскальзывания:

$$F_{nop} = (\mu_1 + \mu_2) \cdot (M + m)g.$$

Доска выскользнет из-под груза, если сила F превысит найденное пороговое значение, то есть при условии:

$$F > (\mu_1 + \mu_2) \cdot (M + m)g.$$

Задачи для самостоятельного решения

2.6. Воздушный шар массы M опускается с постоянной скоростью. Балласт какой массы Δm надо выбросить, чтобы шар начал подниматься с той же скоростью? Подъёмную силу F шара считать известной и постоянной.

2.7. Оценить частоту вращения и ускорение электрона в атоме водорода в модели Бора, приняв радиус орбиты $r = 10^{-10}$ м. Заряд электрона $e = -1,6 \cdot 10^{-19}$ Кл, масса электрона $m_e = 9,1 \cdot 10^{-31}$ кг. Электрическая постоянная системы СИ $\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12}$ Ф/м.

2.8. Найти скорость электрона, который движется в магнитном поле, модуль индукции которого $B = 2 \cdot 10^{-3}$ Тл, по винтовой линии с радиусом $R = 2$ см и шагом $h = 5$ см. m_e и e известны.

2.9. Каковы нормальное и тангенциальное ускорения электрона, который движется в совпадающих по направлению электрическом и магнитном полях с напряжённостью \vec{E} и индукцией \vec{B} соответственно? Рассмотреть два случая: 1) скорость электрона направлена вдоль полей и 2) скорость электрона направлена перпендикулярно к ним. Масса m_e и заряд e электрона известны.

2.10. Однозарядные ионы изотопов калия с молярными массами $\mu_1 = 39$ г/моль и $\mu_2 = 41$ г/моль ускоряются электрическим полем с разностью потенциалов $u = 300$ В и попадают в однородное магнитное поле, перпендикулярное направлению их движения. Индукция магнитного поля $B = 8 \cdot 10^{-2}$ Тл. Найти: а) на каком расстоянии S друг от друга ионы попадут на фотопластинку (см. рис. 2.6), б) какой из ионов раньше достигнет фотопластинки, если в магнитное поле они влетают одновременно. Взаимодействием ионов пренебречь.

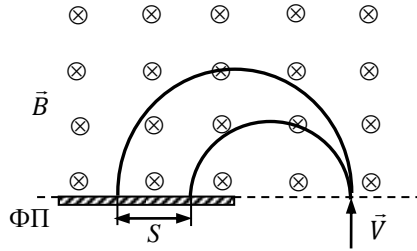


Рис. 2.6

2.11. В масс-спектрометре Бэйнбриджа расстояние между выходной щелью селектора скоростей (см. рис. 2.7) и входной щелью прибора, регистрирующего ионы, $l = 400$ мм. Индукция магнитных полей $B_1 = B_2 = 50$ мТл. При плавном изменении напряженности электрического поля селектора наблюдаются пики ионного тока при значениях напряженности $E_1 = 120$ В/см и $E_2 = 160$ В/см. Определить относительные атомные массы A_1 и A_2 соответствующих ионов, полагая их однозарядными. Идентифицировать эти ионы (т.е. указать, какому химическому элементу они соответствуют).

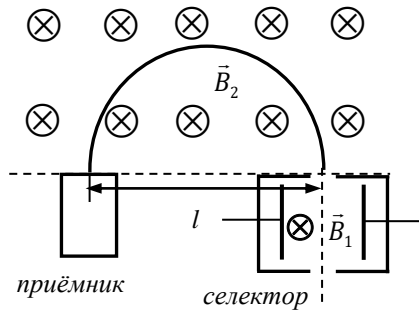


Рис. 2.7

§3. Динамика твёрдого тела

• При **поступательном движении** твёрдого тела все его точки движутся по одинаковым траекториям и в любой момент времени имеют одинаковые кинематические характеристики. Следовательно, в этом случае достаточно описать движение *центра масс* тела, используя второй закон Ньютона так же, как это рекомендовалось в предыдущем разделе.

○ **Центр масс** тела – это точка, положение которой определяется равенством:

$$\vec{r}_c = \frac{\sum_{i=1}^n \Delta m_i \vec{r}_i}{\sum_{i=1}^n \Delta m_i}. \quad (3.1)$$

где \vec{r}_i – радиус вектор i – го малого элемента, на которые можно разбить тело, Δm_i – масса этого элемента. Очевидно, масса тела $m = \sum_{i=1}^n \Delta m_i$, тогда $x_c = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^n m_i x_i$; $y_c = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^n m_i y_i$; $z_c = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^n m_i z_i$.

Легко показать, что импульс системы материальных точек, равный $\vec{P} = \sum_{i=1}^n \Delta m_i \vec{V}_i$, можно записать, используя скорость центра масс:

$$\vec{P} = m \vec{V}_c. \quad (3.2)$$

В соответствии с теоремой о движении центра масс в инерциальной системе отсчёта он движется так же, как материальная точка массы m под действием всех внешних сил, приложенных к телу (и при тех же начальных условиях, конечно):

$$m \vec{a}_c = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i. \quad (3.3)$$

• Для анализа **вращательного и плоского движений** твёрдого тела вводятся дополнительные понятия.

○ **Момент силы** \vec{F} относительно точки пространства O :

$$\vec{N} = [\vec{r}, \vec{F}], \quad (3.4)$$

где \vec{r} – радиус-вектор, проведённый из точки O в точку приложения силы \vec{F} .

○ Момент импульса материальной точки относительно точки O :

$$\vec{M} = [\vec{r}, \vec{p}] \text{ или } \vec{M} = [\vec{r}, \Delta m \vec{V}]. \quad (3.5)$$

○ Момент импульса твёрдого тела (совокупность материальных точек) относительно точки O :

$$\vec{M} = \sum_i^n [\vec{r}_i, \vec{p}_i] \text{ или } \vec{M} = \sum_i^n [\vec{r}_i, \Delta m_i \vec{V}_i], \quad (3.6)$$

где \vec{r}_i – радиус вектор i -го элемента ТТ массой Δm_i , проведённый из точки O .

○ В инерциальной системе отсчёта производная по времени от момента импульса твёрдого тела относительно неподвижной точки пространства O равна суммарному моменту внешних сил, действующих на это тело, относительно той же точки O *):

$$\frac{d\vec{M}}{dt} = \sum_{i=1}^n \vec{N}_i^{\text{внешн}}. \quad (3.7)$$

• При описании **вращения** ТТ **вокруг неподвижной оси** векторы моментов сил $\vec{N}_i^{\text{внешн}}$ и импульса \vec{M} можно спроецировать на некоторую ось OZ , содержащую точку O . Указанные проекции называют **моментами относительно оси**. Это позволяет перейти к скалярной форме записи **уравнения моментов**:

$$\frac{dM_z}{dt} = \sum_{i=1}^n N_{zi}^{\text{внешн}}. \quad (3.8)$$

Можно показать, что $M_z = \left(\sum_{i=1}^n \Delta m_i R_i^2 \right) \omega = I_z \omega$. Здесь I_z – *момент*

инерции твёрдого тела относительно оси OZ , который находится суммированием моментов инерции малых элементов, составляющих ТТ:

$$I_z = \sum_{i=1}^n \Delta m_i R_i^2. \quad (3.9)$$

где R_i – расстояние от i -го элемента тела до оси OZ .

С учётом этого равенство (3.8) приводит к основному **уравне-**

*) Это утверждение повторяет “уравнение моментов” для системы МТ, доказательство которого, см., например, П.К. Кашкаров, А.И. Ефимова, А.В. Зотеев, С.Н. Козлов «Курс лекций по общей физике для химических факультетов университетов» § 4.2 (стр. 47–49).

нию динамики вращательного движения твёрдого тела:

$$I_z \beta = \sum_{i=1}^n N_{zi}^{\text{внеш}}. \quad (3.10)$$

Здесь $\beta = d\omega/dt$ – проекция углового ускорения на ось OZ . Записанное равенство является аналогом второго закона Ньютона, но для вращательного движения ТТ.

- При любом разбиении **плоского движения** ТТ на поступательное и вращательное ось вращения ориентирована перпендикулярно плоскостям, в которых происходит движение точек ТТ. Однако при наличии внешних сил эта ось движется с ускорением и уравнение, полученное для оси, неподвижной относительно инерциальной СО, вообще говоря, неприменимо. В единственном случае, когда ось проходит через центр масс тела – точку «С», уравнение (3.10) сохраняет свой вид и для такого случая:

$$I_c \beta = \sum_{i=1}^n N_{ci}^{\text{внеш}}, \quad (3.10, a)$$

где индекс “с” отражает отмеченное выше условие выбора оси вращения. Поступательная компонента движения описывается уравнением (3.3)

- Как мы видели, при анализе как вращательного, так и плоского движения используется момент инерции ТТ относительно оси. В ряде случаев для вычисления моментов инерции тел оказывается полезной «теорема о параллельных осях» (**теорема Гюйгенса-Штейнера**). Её содержание состоит в следующем: если известен момент инерции твёрдого тела относительно оси, **проходящей через его центр масс** I_c , то момент инерции I_z относительно любой другой **параллельной ей** оси OZ равен

$$I_z = I_c + ml^2, \quad (3.12)$$

где m – масса тела, а l – расстояние между осями.

Для однородных **тел вращения** момент инерции относительно оси симметрии OZ удобно вычислять с помощью формулы:

$$I_z = \frac{\pi\rho}{2} \int_0^h r^4(z) dz. \quad (3.13)$$

Здесь ρ – плотность тела; $r(z)$ – уравнение образующей тела вращения. Эта зависимость определяется формой тела. Интеграл вычисляется вдоль оси симметрии тела в пределах его высоты h .

- При решении задач на динамику вращательного и плоско-

го движения твёрдого тела нужно, прежде всего,

✓ выполнить все пункты методических рекомендаций предыдущего раздела;

✓ если одно или несколько тел задачи совершают вращательное движение относительно неподвижной в инерциальной системе отсчёта оси, то для этих тел необходимо записать соответствующий закон динамики (3.10);

✓ если тело совершает плоское движение, то законы динамики записываются для вращения относительно оси, проходящей через центр масс тела и для ускорения центра масс тела (3.10 и 3.3).

Далее следует записать

✓ уравнения кинематической связи, которое определяет соотношение между линейными ускорениями центров масс тел и угловыми ускорениями тел, совершающих вращательное или плоское движения.

✓ Решить полученную систему уравнений, найдя искомые величины.

Примеры решения задач

3.1. Найти момент инерции тонкого кольца относительно оси, лежащей **в плоскости кольца** и проходящей через его центр. Масса кольца $m = 0,2$ кг, диаметр кольца $D = 0,6$ м.

Решение

Предложим два способа решения задачи. Первый основан на прямом использовании определения момента инерции, второй – на применении теоремы о моменте инерции плоских тел (см. задачу 3.7) и результате вычисления момента инерции кольца относительно оси, перпендикулярной его плоскости (см. задачу 3.6).

а) Разобьём кольцо на малые элементы массы $\Delta m_i^{*)}$ – участки

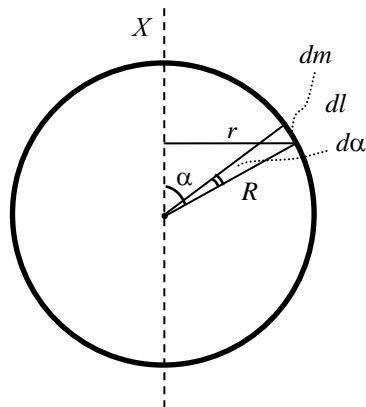


Рис. 3.1

*) Несколько позже мы перейдём к бесконечно малым величинам dm , dl и $d\alpha$, обозначенным на рисунке.

дуги окружности. Положение элемента удобно характеризовать углом, который образует радиус-вектор, соединяющий центр кольца и данный элемент массы с осью. По определению момент инерции кольца относительно оси OX равен:

$$I_x = \sum_{i=1}^n \Delta m_i r_i^2,$$

где r_i – расстояние от оси до i -го элемента тела. При увеличении числа элементов разбиения n уменьшаются величины Δm_i и можно перейти к пределу $\sum_{i=1}^n \Delta m_i r_i^2 \rightarrow \int_{\Omega} r^2 dm$, где интегрирование ведётся по всей области “ Ω ” распределения массы тела. Расстояние от оси до произвольного элемента тела равно (см. рис. 3.1):

$$r = R \cdot \sin \alpha.$$

Величина dm легко выражается через плотность материала кольца и размер элемента массы (см. рис. 3.1):

$$dm = \rho dl = \rho R d\alpha.$$

Здесь ρ – линейная плотность кольца (масса, приходящаяся на единицу его длины).

Как мы видим, интеграл по объёму тела сводится к обычному определённому – по всем значениям угла α , характеризующим положение всех элементов тела, т.е. от 0 до 2π . Итак,

$$I = \int_{\Omega} r^2 dm = \rho R^3 \int_0^{2\pi} \sin^2 \alpha d\alpha = \rho R^3 \cdot \frac{1}{2} \cdot 2\pi = \rho \pi R^3.$$

Далее учтём, что масса всего кольца равна $m = \rho \cdot l = \rho \cdot 2\pi R$, и запишем окончательно:

$$I = \frac{mR^2}{2} = \frac{mD^2}{8}.$$

б) Тот же результат можно получить и, не проводя интегрирования. Нужно учесть, почти очевидное – момент инерции кольца, относительно оси, проходящей через его центр перпендикулярно плоскости кольца (ось OZ), равен $I_z = mR^2$.*)

Моменты инерции, относительно любой оси, проходящей через его центр и лежащей в плоскости кольца, очевидно, одинаковы (например, взаимно перпендикулярные оси OX и OY). Тогда, используя теорему о моменте инерции плоских тел (см. задачу 3.7), получаем:

*) Ведь ВСЕ элементы кольца находятся на одном и том же расстоянии от его оси – R .

$$I_z = I_x + I_y = 2I_x = 2I_y \Rightarrow I_x = \frac{I_z}{2} = \frac{mR^2}{2} = \frac{mD^2}{8} = 0,009 \text{ кг}\cdot\text{м}^2.$$

3.2. Машина Атвуда (прибор для изучения законов равнопеременного движения) представляет собой систему с двумя грузами одинаковой массы m , связанными нитью, перекинутой через массивный блок радиуса R (см. рис. 3.2). Если на один из грузов положить небольшой грузик Δm , то система придёт в ускоренное движение. Пусть экспериментально измеренное ускорение первого груза оказалось равным a . Определить по этим данным момент инерции блока I_z . Считать, что невесомая и нерастяжимая нить не скользит по блоку, а сам блок вращается без трения.

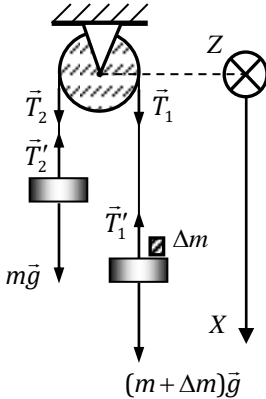


Рис. 3.2

Выберем инерциальную систему отсчёта, связанную с Землёй. Укажем все силы, действующие на грузы и блок. Т.к. нам предстоит рассмотреть *поступательное* движение грузов и *вращательное* движение блока, одну координатную ось направим вертикально вниз (OX), а другую (OZ) – перпендикулярно плоскости рисунка от нас вдоль оси блока^{*)}. Тогда в проекциях на эти оси соответствующие уравнения движения будут иметь вид:

$$(m + \Delta m)a_{1x} = (m + \Delta m)g - T'_1 \quad (1)$$

$$ma_{2x} = mg - T'_2 \quad (2^{\text{й}} \text{ закон Ньютона}), \quad (2)$$

$$I_z \beta_z = (T_1 - T_2) \cdot R \quad (3)$$

(уравнение динамики вращательного движения барабана). Здесь I_z – момент инерции блока относительно оси Z .

Знак проекций моментов сил \vec{T}_1 и \vec{T}_2 выбран с учётом направления оси Z : проекция вектора момента силы \vec{T}_1 относительно любой точки на этой оси положительна, а силы \vec{T}_2 – отрицательна.

^{*)} На рисунке оси вынесены вправо.

Решение

Сила натяжения \vec{T}'_2 , с которой нить действует на груз, равна по модулю силе \vec{T}_2 , с которой нить действует на блок. Также обстоит дело и с силами \vec{T}'_1 и \vec{T}_1 . Это следует из условия *невесомости* нити. Уравнения кинематической связи можно получить, выразив длину нити через координаты тел системы:

$$L = x_1 + \pi R + x_2.$$

Дифференцируя это равенство дважды по времени и учитывая *нерастяжимость* нити ($L = \text{const}$), получаем связь между проекциями линейных ускорений грузов:

$$a_{1x} = -a_{2x} = a. \quad (4)$$

Для того, чтобы вышеприведенная система уравнений была полной, необходимо связать линейное ускорение поступательно движущихся грузов с угловым ускорением вращающегося блока. Т.к. в соответствии с выбором направления оси Z момент силы \vec{T}'_1 обеспечивает блоку положительную проекцию углового ускорения β_z , то проекция ускорения первого груза также положительна $a_{1x} > 0$. Вспомним из кинематики, как связано тангенциальное ускорение точки при движении по окружности с её угловым ускорением:

$$a_\tau = \beta \cdot R.$$

Нить не скользит по поверхности блока, поэтому её точки имеют такое же ускорение. Линейное ускорение точек нити на её вертикальных участках имеет равное по модулю значение. А в силу нерастяжимости нити мы можем и для ускорений грузов окончательно записать *уравнение кинематической связи*:

$$a = \beta \cdot R. \quad (5)$$

Совместное решение системы уравнений (1) – (5) приводит к искомому результату для момента инерции блока:

$$I_z = \left(\frac{g}{a} m - m - 2M \right) R^2.$$

3.3. Найти ускорение центра масс шара массой m , скатывающегося по наклонной плоскости, образующей угол α с горизонтом. Коэффициент трения между поверхностью шара и наклонной плоскостью равен μ .

Решение

Выберем инерциальную систему отсчёта, связанную с Землёй.

Одну из осей (X) неподвижной декартовой системы координат направим вдоль направления качения шара, т.е. параллельно плоскости, две другие – перпендикулярно к ней (см. рис. 3.3).

Силы, действующие на шар, изображены на рисунке. Уравнения динамики поступательного движения имеют вид:

$$ma_x = mg \cdot \sin\alpha - F_{mp}, \quad (1)$$

$$0 = F_N - mg \cdot \cos\alpha, \quad (2)$$

где $a_x = a$ – проекция ускорения центра масс шара на ось X . Относительно оси, проходящей через центр масс перпендикулярно плоскости качения, отличный от нуля момент имеет только сила трения. Поэтому:

$$I_c \beta = F_{mp} \cdot R. \quad (3)$$

Для дальнейшего необходимо уточнить характер движения шара. Если проскальзывание отсутствует, то F_{mp} является силой трения покоя и $0 \leq F_{mp} < \mu F_N$, где μ – коэффициент трения скольжения. Следовательно, F_{mp} представляет собой, наряду с a_x , F_N и β неизвестную величину. Для полноты системы необходимо добавить ещё одно уравнение. Отсутствие проскальзывания позволяет связать линейное и угловое ускорения шара:

$$a_x = \beta \cdot R. \quad (4)$$

Решая систему уравнений (1) – (4), получаем:

$$a = \frac{mg \sin\alpha}{m + I_c / R^2}.$$

И, с учётом момента инерции шара $I_c = \frac{2}{5} mR^2$ приходим к результату для ускорения в *отсутствии проскальзывания*:

$$a = \frac{5}{7} g \sin\alpha.$$

При наличии проскальзывания величины a и β больше не связаны. В этом случае дополнительным уравнением является выражение для силы трения скольжения:

$$F_{mp}^{ск} = \mu F_N = \mu \cdot mg \cdot \cos\alpha.$$

И мы получаем ответ для линейного и углового ускорений:

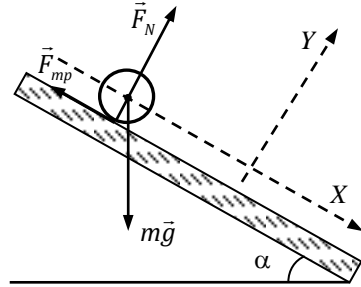


Рис. 3.3

$$a = g(\sin\alpha - \mu \cdot \cos\alpha) \quad \text{и} \quad \beta = \frac{5\mu g \cdot \cos\alpha}{2R}.$$

3.4. (Задача о послушной катушке) На горизонтальной поверхности находится катушка с намотанной на неё нитью. За нить тянут с силой F под углом α к горизонту. При этом катушка катится без проскальзывания. Найти ускорение центра масс катушки. Массу катушки m , её размеры (см. рис. 3.4) и момент инерции I_c считать заданными. При каком значении угла α катушка останется неподвижной?

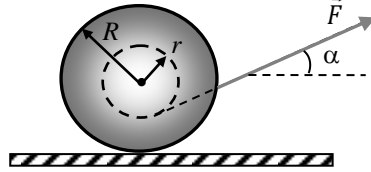


Рис. 3.4

Решение

Укажем все силы, действующие на катушку. Выберем инерциальную систему отсчёта, связанную с Землёй. Т.к. катушка может совершать **плоское движение**, представим его как совокупность *поступательного* и *вращательного*. Направим одну из координатных осей этой системы отсчёта вдоль горизонтальной поверхности (OX), вторую – вертикально вверх (OY). Так как моменты всех сил, приложенных к телу, и его возможное угловое ускорение направлены вдоль оси катушки, выберем третью координатную ось, проходящей через центр масс катушки перпендикулярно плоскости рисунка от нас (на рис. 3.5 эта ось вынесена влево).

Запишем уравнения движения катушки в проекциях на выбранные оси координат (a_x – ускорение центра масс катушки):

$$ma_x = F \cdot \cos\alpha - F_{\text{тр}}, \quad (1)$$

$$0 = F_N + F \cdot \sin\alpha - mg \quad (2)$$

(2^й закон Ньютона, поступательное движение);

$$I_c \beta_z = F_{mp} \cdot R - F \cdot r \quad (3)$$

(уравнение динамики вращательного движения катушки).

Здесь I_c – момент инерции катушки относительно оси Z_c . Обратим внимание на знаки проекций

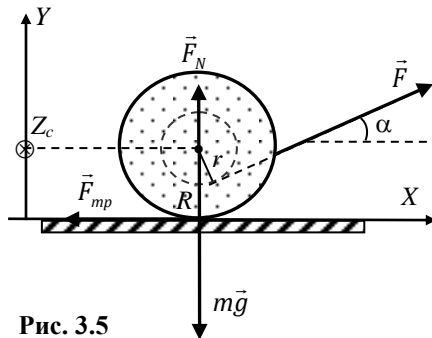


Рис. 3.5

моментов сил и углового ускорения на эту ось, а также на **согласованность** знаков проекций линейного и углового ускорений катушки – положительный знак проекции линейного ускорения оси катушки a_x соответствует ускоренному вращению катушки по часовой стрелке, т.е. положительной проекции углового ускорения β_z .

Условие отсутствия проскальзывания при качении позволяет связать проекции этих ускорений:

$$a_x = \beta_z R. \quad (5)$$

Решая совместно уравнения (1) – (5) находим искомое ускорение оси и центра масс катушки:

$$a_x = \frac{F}{m + I_c / R^2} \cdot \left(\cos \alpha - \frac{r}{R} \right). \quad (6)$$

Проанализируем полученный результат. Видно, что знак проекции определяется соотношением величин $\cos \alpha$ и $\frac{r}{R}$. При ма-

лых углах наклона α “тянущей” нити, когда $\cos \alpha > \frac{r}{R}$, катушка

катится с ускорением вправо. Если же $\cos \alpha < \frac{r}{R}$ (наклон нити

большой), ускорение направлено влево. Наконец, при $\alpha = \arccos\left(\frac{r}{R}\right)$

ускорение катушки равно нулю и при соответствующих начальных условиях она может оставаться неподвижной.

Задачи для самостоятельного решения

3.5. Найти момент инерции тонкого обруча относительно оси, проходящей через центр обруча перпендикулярно его плоскости. Масса обруча m , его радиус R .

3.6. Найти момент инерции однородного диска относительно оси, проходящей через его центр и направленной перпендикулярно плоскости диска. Масса диска m , радиус R .

3.7. Доказать, что для любого *плоского* тела $I_z = I_x + I_y$, где I_x , I_y и I_z – моменты инерции относительно осей X , Y и Z соответственно. X , Y и Z – взаимно перпендикулярные оси, причём тело лежит в плоскости XOY , а ось Z перпендикулярна этой плоскости.

3.8. Вычислить момент инерции тонкого однородного диска относительно оси, проходящей через центр диска и лежащей в его плоскости. Масса диска $m = 2$ кг, радиус диска $R = 0,4$ м.

3.9. Найти момент инерции тонкого стержня относительно оси, проходящей через его середину для случаев: а) ось перпендикулярна стержню; б) ось образует со стержнем угол α . Масса стержня m , его длина l .

3.10. Показать, что момент инерции двухатомной молекулы относительно оси, проходящей через центр масс молекулы перпендикулярно её оси, равен $I_z = \mu l^2$. Здесь $\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$ – “приведённая масса молекулы”, а l – расстояние между атомами (“длина молекулы”). Атомы считать материальными точками с массами m_1 и m_2 .

3.11*. Найти момент инерции однородного сплошного конуса относительно его оси симметрии. Масса конуса m , радиус основания R .

3.12*. Найти момент инерции однородного шара относительно оси, проходящей через его центр. Масса шара m , радиус R .

3.13. Вычислить момент инерции и момент импульса земного шара относительно его оси суточного вращения. Воспользоваться справочными данными о параметрах земного шара.

3.14. Однородный круглый диск диаметром $d = 10$ см и массой $m = 1$ кг вращается вокруг своей оси, делая $\nu = 100$ об/мин. Постоянная сила трения, будучи приложена по касательной к ободу диска, останавливает его за время $\tau = 1$ мин. Найти модуль этой силы.

3.15. На блок массой $M = 9$ кг намотана нить, к концу которой привязан груз массой $m = 2$ кг. Найти ускорение груза и силу натяжения нити. Блок считать однородным цилиндром, а нить невесомой и нерастяжимой. Трением пренебречь.

3.16. Для определения момента инерции махового колеса ра-

диуса $R = 0,5$ м относительно оси, проходящей через его центр масс, колесо обмотали тонкой проволокой, к которой привязали гирию массой $m = 8$ кг. Продолжительность опускания гири с высоты $h = 2$ м при разматывании проволоки составила $\tau = 2$ с. Найти момент инерции махового колеса, пренебрегая трением.

3.17. Сплошной цилиндр массой $m = 1$ кг насажен на ось. К оси цилиндра прикреплена невесомая нить, которая перекинута через блок. К концу нити подвешен груз массы $M = 2$ кг (см. рис. 3.6). Считая, что цилиндр катится без проскальзывания, найти:

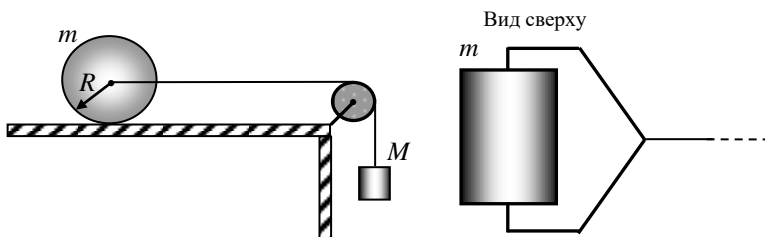


Рис. 3.6

а) ускорение груза, б) модуль силы трения, действующей на цилиндр. При каком значении коэффициента трения не будет происходить проскальзывания?

3.18* За веревку, намотанную на сплошной цилиндр, тянут с силой \vec{F} – см. рис. 3.7. Радиус цилиндра R , масса m . При каком значении коэффициента трения скольжения μ цилиндр будет катиться без проскальзывания?

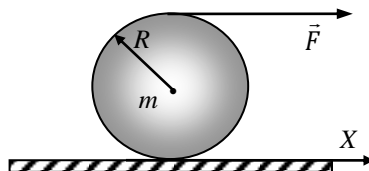


Рис. 3.7

3.19. В условиях, описанных в задаче 3.4, найти силу трения между катушкой и столом.

3.20* На горизонтальной плоскости лежит катушка, масса которой $m = 50$ г, а момент инерции относительно её оси $I = 5 \cdot 10^{-6}$ кг·м². На катушку намотана невесомая и нерастяжимая нить. Радиус внешнего слоя витков $r = 2$ см, радиус торцов катушки $R = 3$ см (см. рисунок к задаче 3.4). Коэффициент трения скольжения между катушкой и плоскостью $\mu = 0,2$. Как ведет себя катушка,

если сила F , с которой тянут за нить, и угол α имеют следующие значения: а) $F = 0,128 \text{ Н}$ и $\alpha = 30^\circ$; б) $F = 0,1 \text{ Н}$ и $\alpha = 48,2^\circ$; в) $F = 0,1 \text{ Н}$ и $\alpha = 30^\circ$ и г) $F = 0,1 \text{ Н}$ и $\alpha = 60^\circ$.

3.21. Однородный сплошной цилиндр массы $m = 1 \text{ кг}$ удерживают в горизонтальном положении на двух намотанных на него невесомых нитях – см. рис. 3.8. Цилиндр отпускают без начальной скорости. а) За какое время τ цилиндр опустится на высоту $h = 50 \text{ см}$? б) Какое натяжение T испытывает при движении цилиндра каждая из нитей?

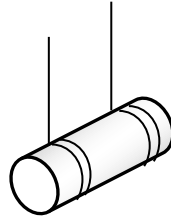


Рис. 3.8

3.22*. Однородный тонкий стержень массы m подвешен горизонтально к потолку на двух вертикальных нитях, прикрепленных к концам стержня. Одну из нитей пережигают. Найти натяжение другой нити сразу же после этого.

3.23*. Гироскоп одного из авиагоризонтов характеризуется следующими данными: масса $m = 5 \text{ кг}$; момент инерции относительно собственной оси $I_c = 8 \cdot 10^{-3} \text{ кг} \cdot \text{м}^2$; гироскоп вращается вокруг собственной оси с частотой $\nu = 20 \text{ 000 об/мин}$. Определить период прецессии, вызванной тем, что центр тяжести гироскопа отстоит от точки опоры на расстояние $l = 0,25 \text{ см}$.

3.24*. Найти угловую скорость прецессии наклонённого под углом $\alpha = 30^\circ$ к вертикали волчка, быстро вращающегося с угловую скоростью ω . Расстояние от точки опоры до центра тяжести волчка равно l , а его осевой момент инерции равен I_c .

3.25*. Доказать равенство $\vec{M}_O = \vec{M}_C + [\vec{R}, \vec{P}]$, где \vec{M}_O момент импульса системы материальных точек относительно начала O лабораторной системы отчета (« L -система»); \vec{M}_C – момент импульса относительно центра масс « C » («собственный» момент импульса), \vec{R} – радиус-вектор центра масс в L -системе, \vec{P} – импульс системы материальных точек относительно L -системы.

3.26. Обруч радиуса R и массы m катится без проскальзывания с постоянной скоростью \vec{V}_0 по горизонтальной плоскости. Найти модуль момента импульса обруча $\vec{M}_{1,2}(t)$, относительно точек 1 и 2 (см. рис. 3.9).

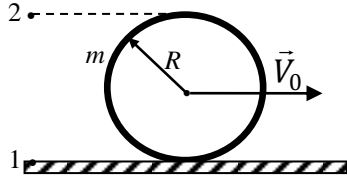


Рис. 3.9

3.27. Однородный цилиндр радиуса R и массы m катится без проскальзывания с постоянной скоростью \vec{V}_0 по горизонтальной плоскости. Найти моменты импульса цилиндра $\vec{M}(t)$, относительно различных точек – 1, 2, 3, 4 и 5, указанных на рисунке 3.10.

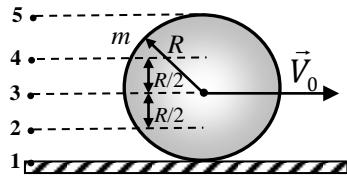


Рис. 3.10

3.28. Небольшой брусок массы m соскальзывает с высоты h по наклонной плоскости, составляющей с горизонтом угол α – см. рис. 3.11. Чему равны относительно точки O а) момент результирующей силы \vec{N} , действующей на брусок; б) момент импульса бруска $\vec{M}(t)$?

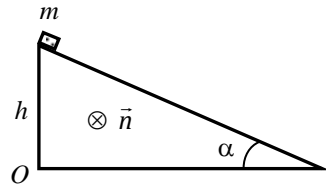


Рис. 3.11

3.29. Небольшой мячик массы m брошен под углом α к горизонту с начальной скоростью \vec{V}_0 . Чему равны относительно точки бросания: а) момент силы, действующей на мячик; б) момент импульса мячика $\vec{M}(t)$. Сопротивлением воздуха пренебречь.

§4. Работа силы, мощность, энергия

• А) Работа силы

○ *Элементарной работой* δA называется скалярное произведение вектора силы \vec{F} на вектор малого перемещения МТ $d\vec{l}$ *):

$$\delta A = (\vec{F}, d\vec{l}) = F \cdot \cos\alpha \cdot dl. \quad (4.1)$$

Работа силы на конечном участке траектории 1 – 2 может быть найдена интегрированием вдоль траектории «L» движения МТ:

$$A_{12} = \int_{"L"} (\vec{F}, d\vec{l}) = \int_{"L"} (F \cdot \cos\alpha) dl. \quad (4.2)$$

Учитывая связь малого перемещения с мгновенной скоростью МТ $d\vec{l} = \vec{V} \cdot dt$, работа может быть записана также в виде:

$$A_{12} = \int_{t_1}^{t_2} (\vec{F}, \vec{V}) dt. \quad (4.3)$$

○ Скалярное произведение векторов силы и скорости позволяет определить *мощность силы* P :

$$P = (\vec{F} \cdot \vec{V}). \quad (4.4)$$

Очевидно, если векторы \vec{F} и \vec{V} перпендикулярны, мощность силы равна нулю, и работа не совершается.

Мощность можно определить и как работу, совершаемую в единицу времени:

$$P(t) = \frac{\delta A}{dt}. \quad (4.5)$$

• Если МТ движется по окружности, то элементарная работа, совершаемая при малом угловом перемещении $d\vec{\varphi}$:

$$\delta A = (\vec{N}, d\vec{\varphi}) = (\vec{N}, \vec{\omega}) dt,$$

при повороте радиус-вектора на конечный угол $\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$:

$$A_{12} = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} (\vec{N}, d\vec{\varphi}) = \int_{t_1}^{t_2} (\vec{N}, \vec{\omega}) dt. \quad (4.6)$$

• Б) Потенциальная энергия

*) Малое перемещение $d\vec{l}$ совпадает с элементарным приращением радиус-вектора $d\vec{r}$ МТ, однако в дальнейшем символом $d\vec{r}$ мы будем обозначать **только** перемещения в **радиальном направлении** при рассмотрении силовых полей, обладающих центральной или осевой симметрией.

○ Силы, работа которых *не зависит от формы траектории* движения МТ, а определяется лишь начальным и конечным положением МТ, называются *потенциальными*^{*)} или **консервативными**. К этому классу относятся гравитационные, упругие и электростатические силы.

Для таких сил работа при перемещении МТ по замкнутой кривой «С» (по контуру) равна нулю. Математически это можно записать следующим образом:

$$\oint_{\text{«С»}} (\vec{F}, d\vec{l}) = 0. \quad (4.7)$$

Для потенциальных сил можно ввести скалярную функцию координат $U(x, y, z)$, частные производные которой определяют вектор силы $\vec{F}(x, y, z)$:

$$\vec{F} = - \left(\frac{\partial U}{\partial x} \vec{e}_x + \frac{\partial U}{\partial y} \vec{e}_y + \frac{\partial U}{\partial z} \vec{e}_z \right) \equiv -\text{grad}(U). \quad (4.8)$$

Такая функция U называется **потенциальной энергией МТ в поле сил**. Работа, совершаемая потенциальной силой при элементарном перемещении МТ, равна:

$$dA = (\vec{F}, d\vec{l}) = - \left(\frac{\partial U}{\partial x} dx + \frac{\partial U}{\partial y} dy + \frac{\partial U}{\partial z} dz \right) \equiv -dU. \quad (4.9)$$

Для случая перемещения на конечное расстояние работа потенциальной силы определится через разность потенциальных энергий в начальном и конечном положениях МТ:

$$A_{12} = - \int_1^2 dU = U(\vec{r}_1) - U(\vec{r}_2) \equiv U_1 - U_2. \quad (4.10)$$

Отметим, что измеряемые в опытах физические величины – сила и работа силы – равны производной и разности значений потенциальной энергии. Следовательно, функция $U(x, y, z)$ определена с точностью до произвольной постоянной величины. Однако если принять значение функции $U(x, y, z)$ равным нулю в некоторой точке с координатами x_0, y_0, z_0 , то работа, совершаемая силовым полем по перемещению МТ в указанное положение

$$A_{10} = U(x, y, z) - U(x_0, y_0, z_0) = U(x, y, z), \quad (4.11)$$

^{*)} Эти понятия совпадают для **стационарного случая**, о котором мы и будем вести речь в дальнейшем, когда нет явной зависимости сил от времени (т.е. $\partial F / \partial t = 0$).

будет целиком определяться введенной таким образом функцией $U(x,y,z)$. При этом говорят, что потенциальная энергия *нормирована* в точке x_0, y_0, z_0 .

• В) Кинетическая энергия

Если сила совершает работу при перемещении МТ под действием только этой силы, то происходит изменение модуля скорости. Можно доказать, что работа равна в этом случае:

$$A_{12} = \frac{mv_2^2}{2} - \frac{mv_1^2}{2}. \quad (4.12)$$

Введём понятие *кинетической энергии МТ*, определив её как *половину произведения массы материальной точки на квадрат её скорости*:

$$T = \frac{mv^2}{2}. \quad (4.13)$$

Тогда, изменение кинетической энергии МТ движущейся под действием силы определяется работой этой силы (равнодействующей):

$$\int_{(1)}^{(2)} dT \equiv T_2 - T_1 = \int_{(1)}^{(2)} dA \equiv A_{12}. \quad (4.13)$$

Кинетическую энергию материальной точки можно связать также с её импульсом:

$$T = \frac{p^2}{2m}.$$

Кинетическая энергия – аддитивная величина. Для системы материальных точек она равна:

$$T = \sum_{i=1}^n \frac{m_i v_i^2}{2}.$$

Если механическая система представляет собой твёрдое тело, вращающееся вокруг закреплённой оси OZ , то его полная кинетическая энергия равна:

$$T = \sum_{i=1} \frac{\Delta m_i v_i^2}{2} = \frac{\omega^2}{2} \sum_i \Delta m_i R_i^2 = \frac{I_z \omega^2}{2}, \quad \text{или } T = \frac{M_z^2}{2I_z}. \quad (4.14)$$

Если тело совершает плоское движение:

$$T = \frac{mv_0^2}{2} + \frac{I_z \omega^2}{2}. \quad (4.15)$$

• Задачи этого раздела, как правило, связаны с нахождением конкретного выражения для потенциальной энергии силового

поля или, наоборот, с определением векторной функции $\vec{F}(x, y, z)$ по известной зависимости потенциальной энергии от координат (равенство 4.8).

Примеры решения задач

4.1. Доказать, что любая *центральный сила* является потенциальной.

Решение

Напомним, что сила, действующая на МТ, называется *центральной*, если её модуль зависит только от расстояния r между МТ и некоторым центром O , а направлена она вдоль прямой, проведенной от этого центра к МТ. Математически это свойство можно описать следующим образом:

$$\vec{F}(\vec{r}) = F_r(r) \cdot \vec{e}_r \equiv F_r(r) \cdot \frac{\vec{r}}{r}.$$

Здесь F_r – означает *проекцию* вектора \vec{F} на направление \vec{r} , \vec{e}_r – единичный вектор, задающий радиальное направление от центра поля.

Найдём работу, совершаемую центральной силой при перемещении МТ из положения 1 в положение 2:

$$A_{12} = \int_{"L"} (\vec{F}, d\vec{l}) = \int_{"L"} F_r(r) (\vec{e}_r, d\vec{l}).$$

Скалярное произведение $(\vec{e}_r, d\vec{l}) = dl \cdot \cos \alpha$ равно *приращению модуля радиус-вектора \vec{r}* , т.е. dr (см. рис. 4.1). С учетом этого **криволинейный** интеграл вдоль траектории L сводится просто к **определённому** интегралу от скалярной функции $F_r(r)$:

$$A_{12} = \int_{r_1}^{r_2} F_r(r) dr = U(r_1) - U(r_2), \text{ где}$$

$$U(r) = -\int F_r(r) dr. \quad (4.16)$$

То есть работа силы по перемещению МТ может быть выражена через разность значений

некоторой скалярной функции, соответствующих начальному и конечному положению МТ. Следовательно, взятая с обратным

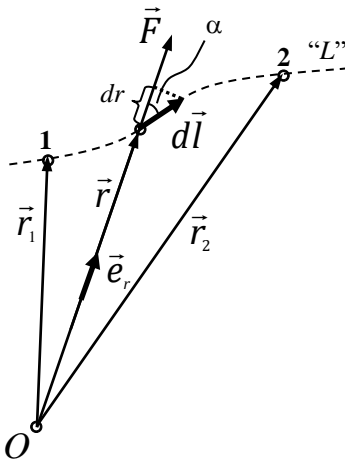


Рис. 4.1

знаком первообразная функции $F_r(r)$ представляет в данном случае выражение для потенциальной энергии МТ в поле центральной силы.

Задача

4.2. Найти потенциальную энергию МТ, находящейся в центральном силовом поле вида: $\vec{F} = -F_0 \cdot \exp(-r/r_0) \cdot \vec{e}_r$, где F_0 и r_0 – положительные константы.

Решение

Используем полученное выше равенство (4.16), связывающее силу и потенциальную энергию взаимодействия в центральном силовом поле. Тогда, с учётом $F_r = -F_0 \cdot \exp(-r/r_0)$, можем записать:

$$U(r) = \int (F_0 e^{-r/r_0}) dr + C = -F_0 \cdot r_0 e^{-r/r_0} + C.$$

Если положить, что $U(r \rightarrow \infty) = 0$, то получим

$$U(r) = -F_0 \cdot r_0 \cdot e^{-r/r_0}.$$

Задача

4.3. Потенциальная энергия частицы, находящейся в центрально-симметричном силовом поле, имеет вид:

$$U(r) = a/r^2 - b/r,$$

где a и b – положительные константы. а) Найти значение r_0 , соответствующее равновесному положению частицы, б) выяснить, устойчиво ли это положение, в) найти максимальное значение силы притяжения, г) изобразить графики зависимости $U(r)$ и $F_r(r)$ – проекции силы на радиус-вектор \vec{r} .

Решение

а) Силовое поле центрально-симметрично, энергия и сила взаимодействия частицы с полем зависят только от расстояния r от центра этого поля. Для рассмотрения такого взаимодействия удобно использовать сферическую систему координат. Определим силу, воспользовавшись соотношением (4.8) и учитывая отсутствие зависимости от направления, т.е. от θ и φ :

$$\vec{F} = -\frac{\partial U}{\partial r} \vec{e}_r = \left(\frac{2a}{r^3} - \frac{b}{r^2} \right) \vec{e}_r.$$

В положении равновесия, действующая на частицу сила должна быть равна нулю. Приравнявая к нулю выражение в скобках, полу-

чаем соответствующее равновесное расстояние: $r_0 = \frac{2a}{b}$.

б) Устойчиво ли это положение? Можно определить направление силы при малом отклонении частицы из найденного положения равновесия. Положение устойчиво, если сила направлена в сторону этого положения. Однако так как данное расстояние соответствует экстремуму потенциальной энергии взаимодействия $\left(\frac{\partial U}{\partial r} = 0\right)$, проще выяснить характер этого экстремума.

Положение устойчиво, если потенциальная энергия минимальна и неустойчиво в противном случае. Определим знак второй производной потенциальной энергии при $r = r_0$:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial r^2} = \left(\frac{6a}{r^4} - \frac{2b}{r^3}\right)\Bigg|_{r_0} = \frac{1}{r_0^3} \cdot b = \frac{b^4}{8a^3} > 0.$$

Следовательно, в этой точке функция $U(r)$ имеет минимум – положение равновесия устойчиво.

в) Для нахождения экстремума силы взаимодействия продифференцируем радиальную проекцию силы F_r и приравняем её к нулю:

$$\frac{\partial F}{\partial r} = \left(\frac{6a}{r^4} - \frac{2b}{r^3}\right)\Bigg|_{r_1} = 0. \Rightarrow r_1 = \frac{3a}{b}.$$

$$\text{Так как при данном расстоянии } F_r(r_1) = \left(\frac{2a}{r^3} - \frac{b}{r^2}\right)\Bigg|_{r_1} = -\frac{b^3}{27a^2} < 0,$$

можно утверждать, что это расстояние соответствует максимальной силе притяжения (сила направлена к центру поля).

Модуль этой силы равен $F_{max} = \frac{b^3}{27a^2}$.

з) Представим графически полученные результаты – рис. 4.2.

Если полная энергия частицы, находящейся в таком поле, невелика, то частица совершает колебательное движение вблизи равновесного положения^{*)}. При больших энергиях частица может удалиться от положения равновесия на расстояния, значительно

^{*)} Рассмотренный пример моделирует поведение атома вблизи узла кристаллической решётки, а при повышении энергии (например, нагрев вещества) – возможность плавления и испарения.

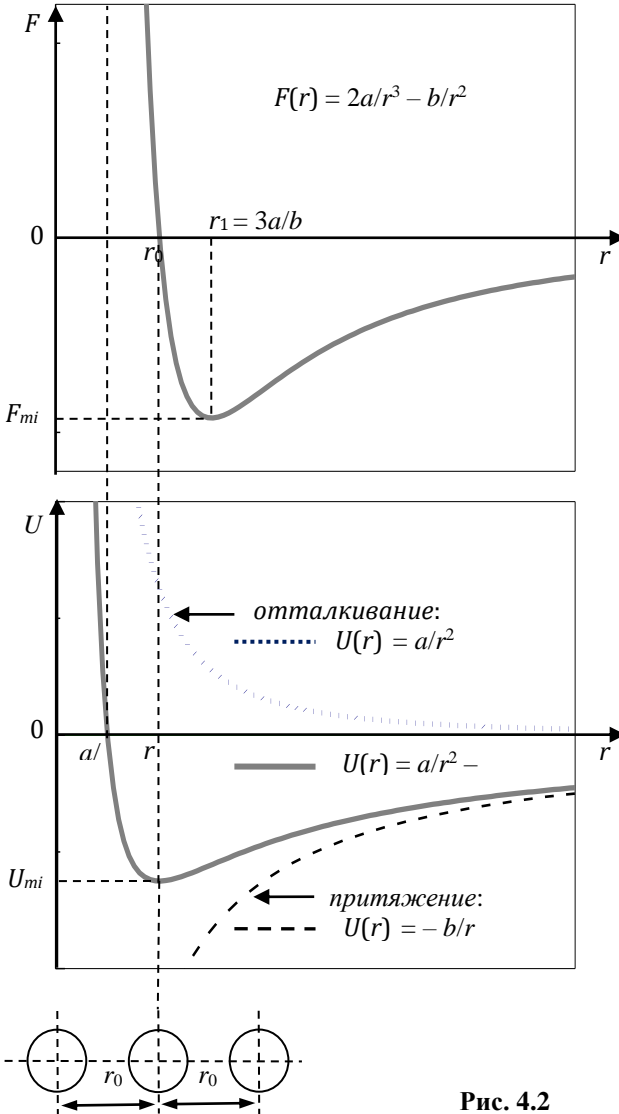


Рис. 4.2

превышающие r_0 , и её взаимодействие с полем становится пренебрежимо малым.

Задачи для самостоятельного решения

4.4. Тело массой m движется под действием постоянной силы \vec{F} . Найти зависимость его кинетической энергии T от времени, если начальная скорость тела равна нулю.

4.5. Маховик вращался с постоянной скоростью, делая $v_0 = 10$ об/с; его кинетическая энергия $T_0 = 8 \cdot 10^3$ Дж. За какое время постоянный вращающий момент сил $N = 50$ Н·м, приложенный к этому маховику, увеличит его угловую скорость в два раза?

4.6. Какую работу надо совершить, чтобы увеличить частоту оборотов маховика от 0 до 120 об/мин? Массу маховика $m = 0,5$ тонн можно считать распределённой по ободу диаметром $D = 1,5$ м. Трением пренебречь.

4.7. Определить потенциальную энергию U сжатой пружины как функцию её деформации x , считая, что упругая сила пропорциональна третьей степени величины деформации с коэффициентом пропорциональности β .

4.8. Потенциальная энергия частицы имеет вид $U = a \cdot (x/y - y/z)$, где a – константа. Найти силу, действующую на частицу как функцию её координат.

4.9* Найти потенциальную энергию небольшого тела массы m на различных расстояниях r от центра Земли. Величину потенциальной энергии на бесконечно большом удалении считать равной нулю. Рассмотреть случаи $r > R$ и $r < R$ (R – радиус Земного шара).

4.10* Подсчитать гравитационную энергию U шара радиуса R , равномерно заполненного веществом с постоянной объёмной плотностью ρ . Гравитационную постоянную G считать известной.

4.11* Горизонтальная пружина, на конце которой прикреплено тело известной массы m , сжата силой F и находится в покое. Один конец пружины закреплён. Внезапно сила F меняет своё направление на противоположное. Определить, пренебрегая массой пружины, во сколько раз получающееся при этом наибольшее растяжение пружины l_2 больше её первоначального сжатия l_1 .

4.12* При движении иона в ускорителе по окружности радиуса R его кинетическая энергия T возрастает пропорционально пройденному пути s ($T = bs$). Найти зависимость от s силы F , действующей на ион.

§5. Законы сохранения в механике. Элементы гидродинамики

• Закон сохранения механической энергии

Механическая система может быть представлена совокупностью n материальных точек (частиц) с массами m_1, \dots, m_n , координатами $\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_n$ и скоростями $\vec{V}_1, \dots, \vec{V}_n$. Между ними действуют внутренние силы \vec{f}_{ij} . Пусть внешние силы \vec{F}_i , действующие со стороны тел, не включенных в систему, **зависят только от координат – стационарные поля внешних сил**. Под полной механической энергией системы W будем понимать сумму кинетической и потенциальной энергий этих частиц:

$$W(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_n, \vec{V}_1, \dots, \vec{V}_n) = T(\vec{V}_1, \dots, \vec{V}_n) + U^{\text{вз}}(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_n) + U^{\text{внешн}}(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_n). \quad (5.1)$$

При этом потенциальная энергия обусловлена как взаимодействием частиц друг с другом – $U^{\text{вз}}(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_n)$, так и с **внешними стационарными полями** – $U^{\text{внешн}}(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_n)$.

Если внутренние и внешние силы **консервативны** (см. с. 49), тогда для любых двух состояний системы механическая энергия одинакова:

$$W_2 - W_1 = 0, \quad W = \text{const}. \quad (5.2)$$

Отметим, что присутствие неконсервативных сил, которые **не совершают работы**, также не приведет к нарушению соотношений (5.2). Поэтому закон сохранения энергии в механике может быть сформулирован в наиболее общем виде так*):

Если в системе тел и на систему действуют только консервативные силы, то полная механическая энергия этой системы постоянна во времени.

При наличии неконсервативных сил (внутренних или внешних) величина W будет изменяться со временем, и это изменение определяется работой указанных сил:

$$W_2 - W_1 = A_{12}^{(\text{нк})}. \quad (5.3)$$

• Закон сохранения импульса

* Механическая энергия, очевидно, также сохраняется для изолированной системы тел ($\vec{F}_i = 0$) в отсутствие внутренних неконсервативных сил.

Импульс механической системы (системы n материальных точек) определяется как векторная сумма импульсов частиц, образующих систему:

$$\vec{P} = \sum_{i=1}^n \vec{p}_i = \sum_{i=1}^n m_i \vec{V}_i. \quad (5.4)$$

Исходя из законов Ньютона, можно доказать, что в инерциальной системе отсчёта *производная по времени импульса такой системы равна сумме внешних сил, действующих на систему*:

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i^{\text{внеш}}. \quad (5.5)$$

Отсюда очевидно вытекает условие, при котором сохраняется импульс такой системы:

$$\sum_{i=1}^n \vec{F}_i^{\text{внеш}} = 0. \quad (5.6)$$

Итак, если векторная сумма внешних сил, действующих на систему, в любой момент времени равна нулю, то полный импульс этой системы постоянен во времени.

Закон сохранения импульса оперирует векторными величинами, поэтому, если существует неподвижная ось (например, ось OX), для которой *сумма проекций всех внешних сил в любой момент времени равна нулю, то сохраняется компонента импульса вдоль этой оси*. Математически это можно записать так:

$$P_x = P_{x0} = \text{const}, \quad \text{если} \quad \sum_{i=1}^n F_{ix}^{\text{внеш}} = 0.$$

Сам вектор \vec{P} и другие его компоненты (P_y и P_z в нашем примере) могут изменяться со временем.

Закон сохранения импульса предсказывает возможность ускорения отдельных тел системы за счёт действия внутренних сил при обязательном сохранении полного импульса механической системы. Речь идет о так называемом *реактивном движении*, которое возникает при отделении от тела его частей, обладающих определенной скоростью \vec{u} относительно этого тела. Такое движение описывается уравнением Мещерского

$$m(t) \frac{d\vec{V}}{dt} = -\mu \vec{u} + \vec{F}^{\text{внеш}}, \quad (5.7)$$

где $\mu = \frac{dm}{dt}$ – темп изменения массы тела, $\vec{F}^{\text{внеш}}$ – равнодействующая внешних сил, действующих на тело.

- **Закон сохранения момента импульса**

Для системы частиц (в частности, и для твёрдого тела) справедливо уравнение моментов (см. §3):

$$\frac{d\vec{M}}{dt} = \sum_{j=1}^n \vec{N}_j^{\text{внеш}}, \text{ где } \vec{M} = \sum_{i=1}^n [\vec{r}_i, \vec{p}_i]; \vec{N}_j^{\text{внеш}} = [\vec{r}_j, \vec{F}_j^{\text{внеш}}].$$

Отсюда следует формулировка закона сохранения момента импульса: **если в любой момент времени сумма моментов внешних сил, действующих на тела системы, относительно неподвижной точки пространства равна нулю, то полный момент импульса этой системы постоянен во времени.**

Приведенный закон является векторным. Следовательно, даже в случае, когда $\sum_{j=1}^n \vec{N}_j^{\text{внеш}} \neq 0$, неизменной оказывается величина на проекции момента импульса системы на некоторую неподвижную ось, для которой равна нулю алгебраическая сумма проекций моментов внешних сил. То есть,

$$\text{если } \sum_{i=1}^n N_{zi}^{\text{внеш}} = 0, \quad \text{то } M_z = M_{z0} = \text{const} . \quad (5.8)$$

В частности, для твёрдого тела, вращающегося относительно неподвижной оси OZ , $M_z = I_z \omega$, и при соблюдении условия (5.8) величина M_z будет постоянной и при возможных изменениях момента инерции I_z . Подчеркнём, что кинетическая энергия при этом непостоянна, ибо $T = \frac{M_z^2}{2I_z}$ (см. 4.14).

Изменение величины T при вариациях I_z определяется работой внутренних **неконсервативных** сил в механической системе.

Применение законов сохранения может существенно упростить решение ряда задач по сравнению с динамическим подходом. Для некоторых задач это единственно возможный путь. В частности, речь идёт о ситуациях, когда силы, действующие между телами на определённом интервале времени, неизвестны (например, при столкновении тел).

- **Элементы гидродинамики**

Простейшей моделью является стационарное (**ламинарное**) течение **несжимаемой** жидкости или газа, в котором отсутствуют силы трения между слоями, характеризующиеся **вязко-**

стью. Для любого сечения тонкой *трубки тока* при таком течении справедливы уравнения Бернулли

$$p + \rho gh + \frac{\rho V^2}{2} = \text{const}, \quad (5.9)$$

и неразрывности струи:

$$SV = \text{const}. \quad (5.10)$$

Здесь p – давление в движущейся жидкости или газе, ρ – плотность жидкости (газа), h – высота данного сечения площади S относительно произвольно выбранного уровня, V – скорость частиц жидкости в этом сечении. Уравнение Бернулли можно применять для реальной жидкости или газа*), если выполнено условие:

$$\frac{\rho VL}{\eta} \gg 1, \quad (5.11)$$

где L – характерный линейный размер сечения трубы, например, её радиус R , η – коэффициент вязкости жидкости. Безразмерная величина в левой части равенства (5.11) носит название **числа Рейнольдса** Re . При выполнении условия (5.11) влияние вязкости невелико. Однако течение остается ламинарным только при числах Рейнольдса меньше критического значения:

$$Re_{кр} = \frac{\rho VR}{\eta} \approx 1000. \quad (5.12)$$

При протекании по трубе вязкой жидкости или газа в условиях ламинарности течения ($Re < 1000$) *переносимый в единицу времени через поперечное сечение трубы объём жидкости Q (поток)* определяется формулой Пуазейля:

$$Q = \frac{p_1 - p_2}{l} \cdot \frac{\pi R^4}{8\eta}. \quad (5.13)$$

В этом соотношении первая дробь имеет смысл *перепада давления на единицу длины* трубы l , R – радиус трубы.

- Приступая к решению задач этого раздела, следует
- ✓ выполнить рекомендации раздела 2 данного пособия;
- ✓ выбрать направления осей системы координат инерциальной СО следует с учётом требований $\sum_{i=1}^n F_{ix}^{внеш} = 0$ или

*) Газ можно считать несжимаемым при скоростях потока много меньше скорости звука.

$\sum_{j=1}^n N_{zj}^{внеш} = 0$ соответствующих законов сохранения.

✓ Проанализировать, какие из законов сохранения или гидродинамические соотношения применимы в данных условиях.

Только после этого можно записывать соответствующие равенства.

Примеры решения задач

5.1. Вертикальный столб длины l падает, поворачиваясь вокруг опирающегося на землю нижнего конца. Какова линейная скорость центра масс столба в момент падения на землю?

Решение

Ответ на вопрос задачи можно искать двумя способами. В первом используется закон сохранения механической энергии, во втором – теорема о кинетической энергии. Конечно, отличие этих подходов определяется лишь выбором системы тел, включаемых в рассматриваемую систему.

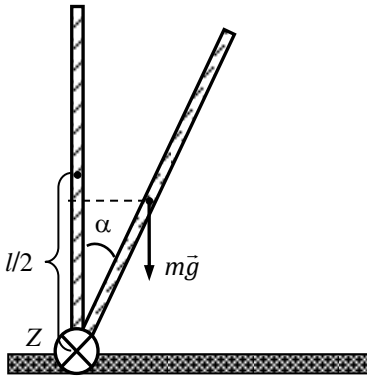


Рис. 5.1

а) Пусть система состоит из столба и Земли, на поверхность которой столб опирается нижним концом. Тогда сила тяготения между этими телами – внутренняя сила системы, а сама система изолирована (внешние силы не действуют). Так как сила гравитационного взаимодействия консервативна, а сопротивлением воздуха мы будем пренебрегать, то полная механическая энергия системы не изменяется во времени вплоть до момента падения столба на землю (неупругий удар). Запишем равенство исходной механической энергии системы и энергии столба в произвольный момент времени до падения:

$$mg \frac{l}{2} = mg \frac{l}{2} \cos \alpha + \frac{I_z \omega^2}{2}. \quad (1)$$

Здесь учтено, что столб – твёрдое тело, совершающее при па-

дении вращательное движение относительно оси, проходящей через точку его опоры перпендикулярно плоскости рисунка (ось Z). Принято (нормировка потенциальной энергии), что нулевое значение потенциальной энергии гравитационного взаимодействия система имеет, когда центр масс столба оказывается на поверхности земли (столб упал).

Равенство (1) позволяет найти зависимость угловой скорости падающего столба от угла его отклонения от вертикального положения α :

$$\omega = \sqrt{\frac{mgl}{I_z}(1 - \cos\alpha)}. \quad (2)$$

Если считать столб однородным тонким стержнем, то его момент инерции относительно выбранной оси равен $I_z = \frac{ml^2}{3}$ и равенство (2) принимает вид:

$$\omega = \sqrt{\frac{3g}{l}(1 - \cos\alpha)}. \quad (3)$$

Линейная скорость центра масс стержня равна

$$V_c = \omega r_c = \omega \cdot \frac{l}{2} = \frac{1}{2} \sqrt{3gl(1 - \cos\alpha)}. \quad (4)$$

В момент падения $\alpha = \pi/2$ и скорость центра масс:

$$V_c = \frac{1}{2} \sqrt{3gl}. \quad (5)$$

б) По теореме о кинетической энергии её изменение равно работе над телом внешней силы

$$\Delta T = A_{12}. \quad (6)$$

Посмотрим, какой результат даёт применение этой теоремы в рассматриваемом случае. В процессе падения столба его кинетическая энергия увеличивается благодаря действию момента силы притяжения Земли. Проекция момента этой силы на ось Z

равна $N_z = mg \frac{l}{2} \sin\alpha$. Работа силы при повороте твёрдого тела относительно оси согласно (4.6) равна

$$A_{12} = \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} N_z d\alpha = mg \frac{l}{2} \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \sin\alpha d\alpha = mg \frac{l}{2} (-\cos\alpha) \Big|_{\alpha_1}^{\alpha_2}.$$

При падении столба угол меняется от 0 до $\pi/2$. Следовательно:

$$A_{12} = mg \frac{l}{2} (-\cos\alpha) \Big|_0^{\pi/2} = mg \frac{l}{2} . \quad (7)$$

Изменение кинетической энергии равно её значению в момент падения столба:

$$\Delta T = \frac{I_z \omega^2}{2} . \quad (8)$$

Сравнивая правые части выражений (7) и (8) получаем максимальную угловую скорость падения

$$\omega = \sqrt{\frac{mgl}{I_z}} = \sqrt{\frac{3g}{l}} ,$$

и искомую линейную скорость центра масс столба:

$$V_c = \omega r = \sqrt{\frac{3g}{l}} \cdot \frac{l}{2} = \frac{1}{2} \sqrt{3gl} . \quad (9)$$

Как видим, результат не отличается от ранее полученного – (4).

Задача

5.2. (Крутильный баллистический маятник). К потолку на тонкой проволоке подвешен однородный деревянный стержень массы $m = 400$ г (рис. 5.2). Модуль кручения проволоки*) равен $D = 0,3$ Н·м/рад. В конец стержня попадает пуля массы $m_1 = 10$ г, летевшая горизонтально и перпендикулярно стержню. С какой скоростью летела пуля, если пуля застряла в стержне, и он повернулся на максимальный угол $\alpha_0 = 0,8$ рад?

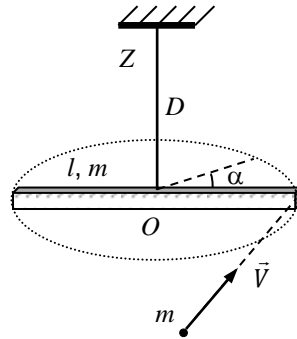


Рис. 5.2

Решение

Внешние силы, действующие на тела системы пуля–маятник – силы тяжести и реакции проволоки. Момент первой силы относительно точки O – вектор, лежащий в горизонтальной плоскости. Поэтому проекция этого момента на ось Z равна нулю. Т.о., момент импульса системы должен сохраняться вплоть до появ-

*) Коэффициент пропорциональности между возникающим вращательным моментом упругих сил и углом закручивания подвеса.

ления момента сил реакции при закручивании подвеса, т.е. до начала поворота стержня. Запишем соответствующее равенство:

$$m_1 V \cdot \frac{l}{2} = \left[I_z + m_1 \left(\frac{l}{2} \right)^2 \right] \cdot \omega. \quad (1)$$

Здесь учтено, что момент инерции – аддитивная величина, равная сумме момента инерции стержня I_z и пули $m_1 \left(\frac{l}{2} \right)^2$ относительно оси Z . Вспомним, что момент инерции тонкого стержня I_z относительно оси, проходящей через его середину перпендикулярно к стержню равен (см. задачу 3.4 при $\alpha = \pi/2$):

$$I_z = \frac{ml^2}{12}. \quad (2)$$

Это позволяет определить начальную угловую скорость вращения маятника сразу после соударения с пулей:

$$\omega = \frac{6m_1 V}{(3m_1 + m)l}. \quad (3)$$

Механическая энергия системы при этом **не сохраняется** – часть её переходит во внутреннюю в процессе **абсолютно неупругого** соударения (**действуют неконсервативные силы**).

Определить максимальный угол поворота маятника, однако, можно, используя как раз закон сохранения механической энергии, но после завершения неупругого соударения, когда в системе действуют только консервативные силы:

$$\frac{\left[I_z + m_1 \left(\frac{l}{2} \right)^2 \right] \cdot \omega^2}{2} = \frac{D\alpha_0^2}{2}. \quad (4)$$

Здесь в левой части – кинетическая энергия вращающегося твёрдого тела (маятника с застрявшей пулей) сразу после окончания неупругого соударения. Считаем, что удар очень короткий и маятник не успевает повернуться за время соударения. В правой – потенциальная энергия системы, запасённая в результате деформации кручения упругого подвеса (аналог энергии деформированной пружины $\frac{kx^2}{2}$). Значение этой энергии можно получить, рассчитав модуль работы момента упругих сил $N = D\alpha$ при повороте тела на угол α_0 :

$$|A| = \int_0^{\alpha_0} Nd\alpha = \int_0^{\alpha_0} D\alpha d\alpha = \frac{D\alpha_0^2}{2}. \quad (5)$$

Учтено, что при максимальном закручивании проволоки до угла α_0 кинетическая энергия вращательного движения маятника обращается в 0*). Используя равенства (2 – 4), приходим к искомому результату для скорости пули:

$$V = \frac{\alpha_0}{m_1} \sqrt{D \left(\frac{m}{3} + m_1 \right)} = 16 \text{ м/с.}$$

Задача

5.3. Используя закон сохранения энергии, найти линейную скорость движения центра масс цилиндра, скатывающегося без проскальзывания с высоты H по наклонной плоскости, у её основания.

Решение

Движение будем рассматривать относительно системы отсчёта, связанной с Землей. В механическую систему включим цилиндр, наклонную плоскость и Землю. Далее нужно выяснить, сохраняется ли механическая энергия в этой системе. Сила тяжести $m\vec{g}$ – консервативна, нормальная составляющая силы реакции опоры \vec{F}_N всегда перпендикулярна скорости цилиндра и работы не совершает. При отсутствии проскальзывания мгновенная скорость точки приложения силы трения \vec{F}_{mp} равна нулю относительно опоры (это сила трения покоя!), поэтому работа этой силы также равна нулю. Следовательно, механическая энергия системы постоянна. Тогда запись закона сохранения механической энергии системы имеет вид:

$$W = \frac{mV_c^2}{2} + \frac{I_c\omega^2}{2} + mg \cdot y = const.$$

Величину \mathcal{E} определим из начальных условий. При $t = 0$ координата и скорости равны соответственно: $y(0) = H$, $V_c(0) = 0$,

* Конечно, математически тождественную равенству (4) запись можно трактовать и как результат применения к маятнику теоремы о кинетической энергии $\Delta T = A_{12}$ (см. решение предыдущей задачи).

$\omega(0) = 0$. Получаем уравнение:

$$mg(H - y) = \frac{mV_c^2}{2} + \frac{I_c\omega^2}{2}.$$

С учётом кинематической связи скоростей $V_c = R\omega$ и выражения для момента инерции цилиндра $I_c = \frac{mR^2}{2}$ находим скорость центра масс цилиндра в нижней точке плоскости ($y = 0$):

$$V_c = \sqrt{\frac{4}{3}gH}.$$

Задача

5.4. Человек массой $m_ч$ переходит из центра вращающейся с угловой скоростью ω круглой горизонтальной платформы радиусом R и массой m на её край. Найти угловую скорость вращения системы в новом состоянии и изменение кинетической энергии. Человека принять за МТ. Трением в оси платформы пренебречь.

Решение

Момент внешних сил относительно оси вращения OZ $N_z = 0$, следовательно, момент импульса системы “платформа + человек” M_z постоянен во времени.

$$I_{нл}\omega = I_{нл}\omega_1 + m_чR^2\omega_1, \quad (1)$$

$$I_{нл} = \frac{mR^2}{2}, \quad (2)$$

$$\omega_1 = \frac{I_{нл}\omega}{I_{нл} + m_чR^2} = \frac{m\omega}{m + 2m_ч}, \quad (3)$$

$$\Delta T = \frac{M_z^2}{2} \left(\frac{1}{I_{нл} + m_чR^2} - \frac{1}{I_{нл}} \right) = -\frac{mm_чR^2\omega^2}{2(m + 2m_ч)}. \quad (4)$$

Механическая энергия системы уменьшилась, благодаря наличию неконсервативных сил трения, совершающих отрицательную работу в процессе перемещения человека.

Задача

5.5. Определить вторую космическую скорость, т.е. скорость, которую необходимо сообщить телу для того, чтобы оно для преодолело гравитационное притяжение Земли.

Решение:

При решении данного вопроса предполагается наличие гравитационного взаимодействия ракеты только с Землей. Этим взаимодействием, очевидно, можно пренебречь лишь на очень («бесконечно») большом расстоянии от Земли. Будем считать, что потенциальная энергия системы тел ракета – Земля в этом случае равна нулю. Тогда закон сохранения полной механической энергии для неё может быть записан в виде:

$$\frac{mV_{II}^2}{2} + U_0 = 0,$$

где U_0 – потенциальная энергия взаимодействия ракеты с Землей у поверхности Земли.

Величина U_0 определяется работой силы тяготения при перемещении тела с поверхности Земли ($r = R_3$) на бесконечно удаленное расстояние: $U_0 = \int_{R_3}^{\infty} F_r dr$ (см. 4.11), где R_3 – радиус Земли.

Проекция силы тяготения F_r определяется из закона всемирного тяготения: $F_r = -G \frac{mM_3}{r^2}$, где m и M_3 – массы ракеты и Земли, r – расстояние от центра Земли до ракеты. Тогда

$$U_0 = -GmM_3 \int_{R_3}^{\infty} \frac{dr}{r^2} = -GmM_3 \left(-\frac{1}{r} \right) \Big|_{R_3}^{\infty} = -G \frac{mM_3}{R} = -mgR_3.$$

Здесь использовано равенство $g = G \frac{M_3}{R_3^2}$ для ускорения свободного падения у поверхности Земли.

Как мы видим, *потенциальная энергия притяжения величина отрицательная*. Окончательно из закона сохранения энергии получаем:

$$V_{II} = \sqrt{2Rg}.$$

Задача

5.6*. Два одинаковых цилиндрических бака соединены узкой трубкой с краном посередине. Радиус баков $R = 20$ см, радиус трубки $r = 1$ мм. Длина трубки $l = 1$ м. Проходное отверстие крана совпадает с сечением трубки. В один из баков налита вода до высоты $h = 50$ см, второй бак был вначале пустой. В момент времени $t = 0$ кран открывают. Определить: 1) характер течения воды в трубке в первые секунды, 2) время τ , по истечении которого разность уровней воды в баках уменьшается в e раз. Вязкость воды принять равной $\eta = 1 \cdot 10^{-3}$ Па·с.

Решение

Характер течения воды в трубке (см. рис. 5.3) определяется **числом Рейнольдса**:

$$Re = \frac{\rho V r}{\eta}. \quad (1)$$

Значение максимальной скорости течения воды в трубке V_{\max} можно получить, используя **формулу Пуазейля**:

$$Q_0 = \frac{(p_1 - p_2)}{l} \cdot \frac{\pi r^4}{8\eta} = \frac{\rho g h_0 \cdot \pi r^4}{8\eta l}. \quad (2)$$

С другой стороны, поток Q равен произведению средней скорости истечения жидкости на площадь поперечного сечения трубки $Q_0 = V_{\max} \cdot \pi r^2$. Выражая отсюда V_{\max} , получаем максимальное значение числа Рейнольдса для течения воды в условиях данной задачи:

$$Re_{\max} = \frac{\rho^2 g h_0 \pi r^3}{8\eta^2 l} \approx 600 < 1000 - \text{т.е. течение ламинарное.} \quad (3)$$

Объём воды dQ , протекающий по трубке за время dt при произвольном значении разности уровней воды h определяется по формуле Пуазейля:

$$dQ = \frac{\rho g h \pi r^4}{8\eta l} dt, \quad (4)$$

Этот объём связан с изменением *уровня воды* dx в левом баке равенством $dQ = \pi R^2 dx$. Изменение *разности уровней* в баках равно $dh = -2dx$, поэтому

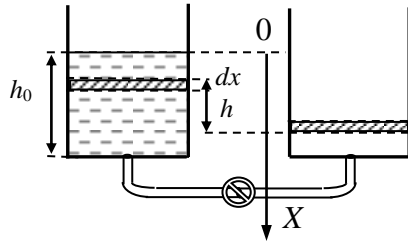


Рис. 5.3

$$dQ = -\frac{\pi R^2 dh}{2}. \quad (5)$$

Приравнивая правые части равенств (4) и (5), получаем дифференциальное уравнение:

$$\frac{\rho g h \pi r^4}{8 \eta l} dt = -\frac{\pi R^2 dh}{2}.$$

В результате разделения переменных получаем:

$$\frac{dh}{h} = -\frac{\rho g r^4}{4 R^2 \eta l} dt.$$

После интегрирования: $\ln h = -\frac{\rho g r^4}{4 R^2 \eta l} t + C$, где C - некоторая константа. Потенцируя последнее уравнение, получаем:

$$h = A e^{-\alpha t}; \text{ где } \alpha = \frac{\rho g r^4}{4 R^2 \eta l},$$

$A = e^C$ - новая константа, которую можно найти из начальных условий. При $t = 0$, $h = h_0$, отсюда $A = h_0$. Окончательно получаем закон изменения для разности уровней воды в баке:

$$h(t) = h_0 \cdot e^{-\alpha t}.$$

Отсюда мы можем дать ответ на вопрос задачи:

$$\tau = 1/\alpha = \frac{4 R^2 \eta l}{\rho g r^4} = 1,6 \cdot 10^4 \text{ с} \approx 4,5 \text{ час.}$$

Задачи для самостоятельного решения

5.7. Два протона с энергией $T = 0,5 \text{ МэВ}$ каждый летят навстречу друг другу и испытывают «лобовое столкновение». До какого минимального расстояния r_{\min} они могут сблизиться, если учитывать только электрическое взаимодействие между ними?

5.8. Груз положили на чашку весов без толчка. Сколько делений n_0 покажет стрелка весов при первоначальном отбросе, если после успокоения качаний она показывает $n_1 = 5$ делений. Весы можно представить себе в виде пружинного динамометра.

5.9. Движущаяся частица претерпевает абсолютно упругое столкновение с покоящейся частицей такой же массы. Доказать, что после столкновения, если оно не было лобовым, частицы разлетятся под прямым углом друг к другу. Как будут двигаться

частицы после центрального удара?

5.10. Навстречу друг другу летят две частицы с массами m_1 и m_2 . Между ними происходит неупругий удар. Известно, что кинетическая энергия первой частицы в $n = 20$ раз больше, чем у второй. При каком соотношении масс после удара частицы будут двигаться в сторону частицы с меньшей энергией?

5.11. Может ли произойти ионизация атома ^{133}Cs ударом атома ^{16}O с кинетической энергией $T_0 = 4 \text{ эВ}$? Энергия ионизации $\epsilon_{\text{ион}} = 3,9 \text{ эВ}$.

5.12. В ядерной физике часто бывает нужно уменьшить скорость нейтронов, выделяющихся при ядерных реакциях. Это происходит, например, при упругом ударе нейтрона о медленно движущееся (практически – неподвижное) ядро углерода (графит) или ядро дейтерия (тяжелый водород). Во сколько раз уменьшится скорость нейтрона при упругом лобовом столкновении нейтрона с покоящимся ядром углерода? Принять, что масса ядра углерода в $n = 12$ раз больше массы нейтрона. После лобового столкновения направление движения нейтрона меняется на противоположное.

5.13. Решить предыдущую задачу для случая соударения нейтрона с ядром дейтерия, массу которого можно принять равной удвоенной массе нейтрона.

5.14. Обруч и диск одинаковой массы катятся без проскальзывания с одинаковой скоростью движения их центров масс. Кинетическая энергия обруча равна при этом $T_1 = 40 \text{ Дж}$. Найти кинетическую энергию диска T_2 .

5.15. Шар массой $m = 1 \text{ кг}$, катящийся без проскальзывания, ударяется о стенку и откатывается от неё. Скорость центра масс шара до удара о стенку $V_0 = 11 \text{ см/с}$, после удара $V = 9 \text{ см/с}$. Найти количество теплоты Q , выделившееся при ударе.

5.16. Однородный стержень длиной $l = 0,85 \text{ м}$ может свободно вращаться вокруг горизонтальной оси, проходящей через его конец. Какую минимальную скорость необходимо сообщить нижнему концу стержня, чтобы он сделал полный оборот вокруг оси. В исходном положении подвешенный стержень покоился.

5.17. Стержень, описанный в предыдущей задаче, отклонили до горизонтального положения и отпустили. Определить скорость центра масс стержня в момент прохождения им положения равновесия?

5.18*. Однородный стержень длины l может вращаться без трения вокруг горизонтальной оси, отстоящей на расстоянии $l/3$ от одного из концов стержня. Стержень, занимавший сначала горизонтальное положение, отпустили без толчка. Найти **модуль линейного ускорения** опускающегося конца стержня в момент, когда стержень составляет с горизонтом угол α .

5.19. Однородному цилиндру сообщают начальный импульс, в результате чего он катится без проскальзывания вверх по наклонной плоскости с начальной скоростью V_0 . Какова скорость цилиндра на высоте h от основания? На какую максимальную высоту поднимется цилиндр? Как изменятся результаты для шара?

5.20*. Стержень длины l падает, скользя одним концом по гладкой горизонтальной поверхности. В начальный момент стержень занимал вертикальное положение и покоился. Найти скорость центра масс стержня в момент его приземления.

5.21*. Однородный стержень длиной l подвешен в вертикальном положении и может свободно вращаться вокруг горизонтальной оси, проходящей через его верхний конец. Горизонтально летевшая пуля попадает в стержень и застревает в нем. На каком расстоянии x от верхнего конца должна находиться точка попадания пули, чтобы импульс системы “пуля – стержень” остался неизменным сразу после удара.

5.22*. Линейка массы $m = 100$ г и длины $l = 30$ см лежит на гладком столе. По линейке наносят удар в точке, отстоящей от её центра на расстояние $a = 5$ см. При этом линейке мгновенно сообщается импульс $p = 6 \cdot 10^{-2}$ кг·м/с. Найти расстояние от центра линейки до точки O линейки, которая в момент удара его “не почувствует”^{*)}. Как движется линейка сразу после удара?

5.23. Человек массы $m_ч = 60$ кг стоит на краю покоящейся го-

^{*)} Т.е. её мгновенная скорость будет равна нулю в момент удара.

горизонтальной платформы массы $m = 120$ кг, имеющей форму однородного диска. Платформа может вращаться без трения относительно оси, проходящей через её центр. На какой угол повернется платформа, если человек пойдет вдоль края платформы и, обойдя её, вернется на прежнее место на платформе?

5.24. На стуле, который может свободно вращаться вокруг вертикальной оси и обычно используется при лекционных демонстрациях под названием скамьи Жуковского, сидит экспериментатор, не касаясь ногами пола. Опишите, как будет двигаться скамья с экспериментатором в следующих случаях:

а) Экспериментатор неподвижен, в руках у него стержень с осью, на которую насажено велосипедное колесо, которое может вращаться вокруг этой оси с малым трением. Экспериментатор поднимает колесо над головой и, удерживая ось одной рукой в вертикальном положении, другой рукой раскручивает колесо. б) Раскрутив таким образом колесо, наклоняет ось, придав ей горизонтальное положение. в) Экспериментатор поворачивает ось до вертикального направления, противоположного исходному (а).

5.25. В системе, описанной в предыдущей задаче, неподвижному экспериментатору дают в руки раскрученное колесо так, что, удерживая колесо над головой, он остается неподвижным. Как будет двигаться экспериментатор, если он а) повернёт ось колеса горизонтально? б) повернёт её вниз? Ответы необходимо обосновать.

5.26. На старте установлена ракета массой m для запуска в вертикальном направлении. Каким должен быть расход топлива в единицу времени μ , чтобы обеспечить ракете начальное ускорение $2g$? (g – ускорение свободного падения). Скорость истечения газов из сопла относительно ракеты считать постоянной и равной u .

5.27*. Найти скорость ракеты в тот момент, когда её масса за счёт сгорания топлива уменьшилась в $e = 2,7$ раза по сравнению с её значением на старте. Начальная скорость ракеты равна нулю. Скорость газовой струи относительно ракеты равна u , постоянна и направлена против движения ракеты. Влиянием внешних сил пренебречь.

5.28. С поверхности Земли вертикально вверх запускают ракету массой $m_0 = 1$ кг. Масса газов, вылетающих из ракеты за единицу времени $\mu = 0,1$ кг/с. Какой должна быть скорость газов относительно ракеты u , чтобы она могла оторваться от Земли?

5.29. Цилиндрический сосуд высоты $h = 0,5$ м и радиуса $R = 10$ см наполнен доверху водой. В дне сосуда открывается отверстие радиуса $r = 1$ мм. Пренебрегая вязкостью воды, определить время τ , за которое вся вода вытечет из сосуда.

5.30*. В условиях предыдущей задачи найти закон движения уровня воды в сосуде $h(t)$ и зависимость скорости его движения от времени $V(t)$.

5.31. Площадь поршня шприца $S_1 = 4$ см², а площадь отверстия $S_2 = 1$ мм², ход поршня $l = 40$ мм. Пренебрегая вязкостью воды и трением поршня о стенки, определить, сколько времени будет вытекать из шприца вода, если давить на поршень с постоянной силой $F = 5$ Н.

5.32. По горизонтальной трубе радиуса $R = 12,5$ мм течёт вода. Поток воды через сечение трубы $Q = 3 \cdot 10^{-5}$ м³/с. Определить: 1) характер течения, 2) перепад давления на единицу длины трубы dp/dl . Вязкость воды принять равной $\eta = 1 \cdot 10^{-3}$ Па·с.

Раздел второй. ЭЛЕКТРИЧЕСТВО

§6. Закон Кулона. Напряжённость электрического поля.

Теорема Гаусса

• Согласно закону Кулона, **сила взаимодействия двух точечных зарядов в вакууме пропорциональна их величинам q_1 и q_2 и обратно пропорциональна квадрату расстояния между ними r** . Она направлена вдоль прямой, соединяющей эти заряды. Заряды одного знака отталкиваются, а противоположных знаков – притягиваются. Если заряды помещены в однородную жидкую или газообразную диэлектрическую среду, то сила взаимодействия между ними ослабляется в ϵ раз, где ϵ – относительная диэлектрическая проницаемость среды. С учётом этого закон Кулона для силы, действующей на второй заряд со стороны первого, может быть записан в виде (в системе единиц СИ):

$$\vec{F}_{21} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q_1 \cdot q_2}{r^2} \cdot \frac{\vec{r}}{r}, \quad (6.1)$$

где \vec{r} – радиус-вектор, проведённый от первого заряда ко второму, $\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \text{ Ф/м}$ – электрическая постоянная.

• Взаимодействие неподвижных зарядов осуществляется посредством *электрического поля*. Его основной количественной характеристикой является **вектор напряжённости**, который определяется для данной точки поля (\vec{r}) как *отношение силы, действующей на пробный точечный заряд, помещённый в эту точку, к величине заряда $q_{пр}$* :

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{\vec{F}(\vec{r})}{q_{пр}}. \quad (6.2)$$

Зная напряжённость в разных точках $\vec{E}(\vec{r})$ можно найти силу, действующую со стороны поля на *любой* точечный заряд q , оказавшийся в данной точке поля:

$$\vec{F}(\vec{r}) = q \cdot \vec{E}(\vec{r}). \quad (6.3)$$

• В вакууме для электрических полей выполняется **принцип суперпозиции**, согласно которому напряжённость электрического поля, создаваемого группой N зарядов в данной точке равна векторной сумме напряжённостей электрических полей, созданных каждым из зарядов в этой точке по отдельности:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \sum_{i=1}^N \vec{E}_i. \quad (6.4)$$

Для **системы N точечных зарядов** напряжённость резуль-

тирующего поля в вакууме равна:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^N \frac{q_i}{r_i^2} \frac{\vec{r}_i}{r_i}, \quad (6.5)$$

где \vec{r}_i – радиус-вектор, проведённый от заряда с номером i в точку наблюдения поля \vec{r} .

Для нахождения напряжённости электрического поля, созданного протяжёнными заряженными телами, необходимо разбить их на малые элементы, являющиеся точечными зарядами. В этом случае заряд распределён непрерывно, и в выражении (6.5) сумма переходит в интеграл. Для одномерных заряженных тел (стержни, нити) удобно использовать понятия линейной плотности заряда:

$$\lambda = \frac{dq}{dl}. \quad (6.6)$$

Напряжённость в интересующей нас точке равна в этом случае:

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_L \frac{\lambda}{r^2} \frac{\vec{r}}{r} dl. \quad (6.7)$$

Интегрирование ведётся по всем элементам длины dl вдоль заряженной нити (“ L ”). При распределении заряда по поверхности или объёму тела вводятся соответственно поверхностная и объёмная плотности заряда

$$\sigma = \frac{dq}{dS} \quad \text{и} \quad \rho = \frac{dq}{dV}, \quad (6.8)$$

смысл которых нетрудно понять по аналогии с определением (6.6).

• Решение задач о нахождении вектора \vec{E} для электрических полей, созданных протяжёнными заряженными телами с плоской, цилиндрической и сферической симметрией, существенно упрощается при использовании вытекающей из закона Кулона **теоремы Гаусса**:

Поток вектора напряжённости электрического поля Φ в вакууме через любую замкнутую поверхность “ Σ ” пропорционален алгебраической сумме зарядов, расположенных в области пространства “ Ω ”, ограниченной этой поверхностью. Коэффициент пропорциональности в системе СИ равен $1/\epsilon_0$:

$$\Phi = \frac{1}{\epsilon_0} \sum_{i=1}^N q_i.$$

Напомним, что элементарным потоком $d\Phi$ вектора \vec{E} через

элемент поверхности $d\vec{S}$ является величина: $d\Phi = E_n dS$, где E_n – проекция вектора \vec{E} на нормаль \vec{n} к элементу поверхности $d\vec{S}$. Полный поток находят суммированием элементарных по всей поверхности “ Σ ”:

$$\Phi = \oint_{\Sigma} (\vec{E}, d\vec{S}). \quad (6.9)$$

С учётом этого, утверждение теоремы Гаусса в аналитической форме можно окончательно записать в виде:

$$\oint_{\Sigma} (\vec{E}, d\vec{S}) = \frac{1}{\epsilon_0} \sum_{i=1}^N q_i, \quad (6.10)$$

где N – число частиц или тел с зарядами q_i в области пространства “ Ω ”, охваченной поверхностью “ Σ ”.

Или, если заряд распределён в этой области пространства “ Ω ” непрерывно с объёмной плотностью $\rho(\vec{r})$, то вместо (6.10) получим:

$$\oint_{\Sigma} (\vec{E}, d\vec{S}) = \frac{1}{\epsilon_0} \int_{\Omega} \rho(\vec{r}) dV. \quad (6.11)$$

• Задачи этого раздела, как правило, связаны с нахождением напряжённости электрического поля от группы точечных зарядов или от протяжённых заряженных тел. Подход, использующий принцип суперпозиции (соотношения 6.5), применим для любых задач, хотя решение в аналитическом виде возможно лишь для задач, обладающих определённой симметрией. **При использовании теоремы Гаусса наличие симметрии является принципиально необходимым**, ибо решение всегда построено на расчёте поверхностного интеграла в 6.11, сводящегося к произведению модуля вектора \vec{E} на площадь части поверхности “ Σ ”, для которой рассчитывается поток вектора напряжённости Φ .

Примеры решения задач

6.1. Найти напряжённость электрического поля, создаваемого равномерно заряженным тонким стержнем длины $2a$, в точке A , находящейся на перпендикуляре к стержню на расстоянии R от его середины. Линейная плотность заряда стержня $\lambda > 0$.

Решение

В этом примере розобьём стержень на малые элементы длиной

dx ($dx \ll R$) и воспользуемся принципом суперпозиции электрических полей (см. рис. 6.1). Из точки A они представляются точечными зарядами величиной $dq = \lambda \cdot dx$.

Напряжённость электрического поля, создаваемого в точке A всеми элементами стержня, определяется равенством (6.7). При интегрировании вдоль стержня ("L"), очевидно, будут складываться векторы $d\vec{E}$ различного направления.

Разложим эти векторы на две компоненты $d\vec{E}_\perp$ и $d\vec{E}_\parallel$. Тогда

$$\vec{E} = \int_L d\vec{E} = \int_L d\vec{E}_\perp + \int_L d\vec{E}_\parallel.$$

В силу симметрии задачи сумма векторов от всех участков стержня равна нулю, и суммирование существенно упрощается:

$$\vec{E} = \int_L d\vec{E}_\perp.$$

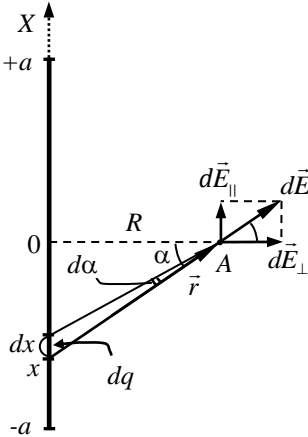


Рис. 6.1

Так как теперь складываются только сонаправленные векторы $d\vec{E}_\perp$, то можно перейти к суммированию их модулей:

$$E = \int_L dE_\perp = \int_L (dE \cdot \cos\alpha) = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \int_L \frac{\cos\alpha dx}{r^2}. \quad (*)$$

Для интегрирования удобно перейти к одной переменной – углу α . Выразим для этого координату элемента стержня:

$$x = R \cdot \operatorname{tg}\alpha \text{ и отсюда: } dx = \frac{R}{\cos^2 \alpha} d\alpha.$$

Подставляя в равенство (*) $r^2 = \frac{R^2}{\cos^2 \alpha}$, получаем:

$$E = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 R} \int_{-\alpha_0}^{+\alpha_0} \cos\alpha d\alpha = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 R} \sin\alpha_0, \text{ где } \sin\alpha_0 = \frac{a}{\sqrt{a^2 + R^2}}. \text{ И отсюда}$$

окончательно:

$$\vec{E} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 R} \cdot \frac{a}{\sqrt{a^2 + R^2}} \vec{e}_\perp.$$

Если стержень очень длинный (“бесконечный”, $a \rightarrow \infty$), то:

$$E = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 R}. \quad (6.12)$$

6.2. Решить ту же задачу для бесконечно длинной нити, используя теорему Гаусса.

Решение

Задача обладает осевой симметрией, в соответствие с которой линии электрического поля могут представлять собой либо окружности в плоскости перпендикулярной нити и с центрами на ней, либо иметь радиальное направление в указанной плоскости. С учётом свойств электростатического поля силовые линии не могут быть замкнутыми, следовательно, остаётся вариант с радиальным расположением линий (см. рис. 6.2).

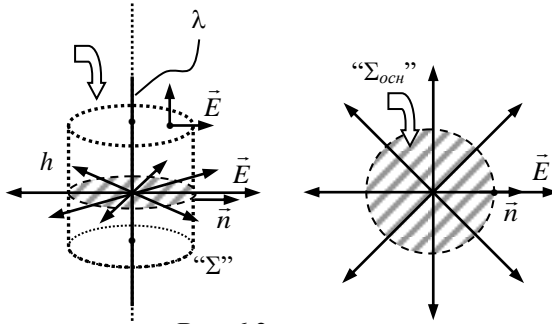


Рис. 6.2

Далее, нужно выбрать замкнутую поверхность “ Σ ” для применения теоремы Гаусса, чтобы на её отдельных частях вектор \vec{E} был перпендикулярен нормали к поверхности, а на других параллелен ей и постоянен по модулю. Таким свойством обладает поверхность цилиндра, коаксиального с рассматриваемым стержнем, который сверху и снизу имеет круглые основания (“ $\Sigma_{\text{осн}}$ ”). Поток вектора \vec{E} через такую замкнутую поверхность:

$$\Phi = \oint_{\Sigma} E_n dS = \int_{\Sigma_{\text{бок}}} E_n dS + \int_{\Sigma_{\text{осн}}} E_n dS. \quad (1)$$

На боковой поверхности цилиндра $\vec{E} \uparrow \uparrow \vec{n}$ и $E_n \cdot dS = E \cdot dS$. Кроме того, из соображений осевой симметрии модуль вектора \vec{E} постоянен на боковой поверхности. Следовательно

$$\oint_{\Sigma_{бок}} E_n dS = E(r) \cdot \int_{\Sigma_{бок}} dS = E(r) \cdot S_{бок} = E(r) \cdot 2\pi r h.$$

На основаниях цилиндра $\vec{E} \perp \vec{n}$ и $E_n \cdot dS = 0$.

Таким образом, поверхностный интеграл в равенстве (6.9) удалось представить в виде произведения скалярных величин:

$$\oint_{\Sigma} (\vec{E}, d\vec{S}) = E(r) \cdot 2\pi r \cdot h. \quad (2)$$

Согласно теореме Гаусса: $\Phi = \frac{1}{\epsilon_0} \lambda h$. Отсюда: $E(r) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r}$, что

совпадает с результатом, полученным в задаче 6.1^{*)}.

Отметим, что *ключевым моментом* в проведенном решении является переход от интеграла (1) к произведению (2), основанный **на анализе симметрии задачи** и невозможный при произвольной форме заряженного тела.

6.3. Определить напряжённость электрического поля $E(x)$ на оси равномерно заряженного кольца радиуса R . Заряд кольца q , x – расстояние от центра кольца.

Решение

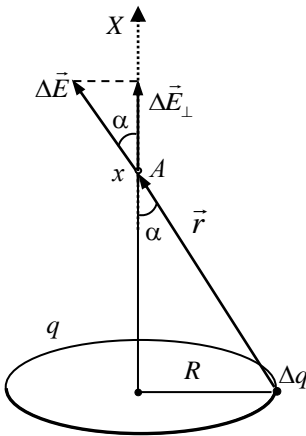


Рис. 6.2

При решении задачи воспользуемся принципом суперпозиции. Для этого разобьём кольцо на элементы – точечные заряды Δq , каждый из которых создает в точке A напряжённость

$$\Delta \vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\Delta q}{r^2} \cdot \frac{\vec{r}}{r} = \frac{\Delta q}{4\pi\epsilon_0 (R^2 + x^2)} \cdot \frac{\vec{r}}{r}.$$

Вследствие симметрии задачи вклад в общую напряжённость дадут лишь составляющие напряжённости $\Delta \vec{E}_\perp$ (сравните со случаем задачи 6.1). Поэтому напряжённость в точке A будет определяться только суммой этих составляющих $\Delta \vec{E}_\perp$ по всем эле-

^{*)} С той только разницей, что в задаче 6.1 расстояние от стержня было обозначено буквой R , т.к. буква r использовалась, как обычно, для обозначения радиус-вектора.

ментам кольца:

$$E(x) = \sum(\Delta E \cdot \cos\alpha) = \sum \frac{\Delta q x}{4\pi\epsilon_0(R^2 + x^2)^{3/2}} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{x}{(R^2 + x^2)^{3/2}}.$$

Зависимость проекции на ось X вектора напряжённости E_x представлена на рис. 6.3. Видно, что на малых расстояниях от центра кольца эта зависимость *линейная*, на больших – обратно пропорциональная квадрату расстояния (кольцо “становится” точечным зарядом). Направлен вектор \vec{E} вдоль оси X .

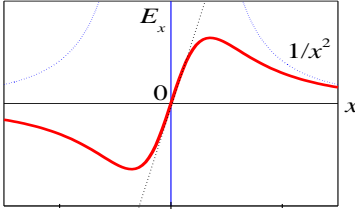


Рис. 6.3

6.4. Определить напряжённость электрического поля \vec{E} на оси тонкого равномерно заряженного диска радиуса R . Поверхностная плотность заряда диска равна σ .

Решение

При решении этой задачи воспользуемся также принципом суперпозиции. Для этого диск разобьём на кольца радиуса r и шириной dr . Тогда для напряжённости поля такого кольца $dE(x)$ можно записать (см. рис. 6.4 и задачу 6.3):

$$dE = \frac{x dq}{4\pi\epsilon_0(r^2 + x^2)^{3/2}},$$

где $dq = \sigma \cdot dS = \sigma \cdot 2\pi r dr$. Напряжённость поля диска получается интегрированием dE по всем значениям r от 0 до R :

$$E(x) = \int_0^R \frac{2\pi r \sigma x}{4\pi\epsilon_0(r^2 + x^2)^{3/2}} dr = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left(1 - \frac{x}{\sqrt{R^2 + x^2}} \right).$$

Нетрудно видеть, что при $R \rightarrow \infty$ получается такой же результат, как и для поля бесконечной плоскости: $E = \sigma/2\epsilon_0$.

6.5. Определить напряжённость поля $E(r)$ **внутри** шара радиуса R , объёмная плотность заряда которого $\rho(r) = \alpha \cdot r^{1/2}$, где α – коэффициент пропорциональности, r – расстояние от центра шара. Диэлектрическая проницаемость материала шара равна ϵ .

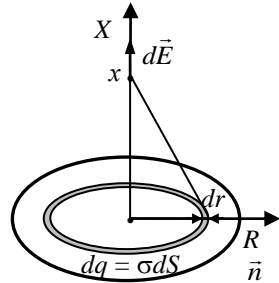


Рис. 6.4

Решение

Исходя из радиальной симметрии электрического поля, выберем замкнутую поверхность “ Σ ” – сферу с центром, совпадающим с центром шара и с радиусом $r < R$. Для такой поверхности поток вектора напряжённости можно представить в виде

$$\Phi = \oint_{\Sigma} E_n dS = E(r) \oint_{\Sigma} dS = E(r) \cdot 4\pi r^2.$$

Сумма зарядов, оказавшихся внутри поверхности “ Σ ”, равна

$$\int_{\Omega} \rho dV = 4\pi\alpha \int_0^r r^2 \sqrt{r} dr = \frac{8\pi\alpha}{7} r^{7/2}.$$

Согласно теореме Гаусса, можно записать:

$$E(r) \cdot 4\pi r^2 = \frac{1}{\epsilon_0 \epsilon} \frac{8\pi\alpha}{7} r^{7/2} \quad \text{откуда} \quad E(r) = \frac{2\alpha}{7\epsilon\epsilon_0} r^{3/2}.$$

Задачи для самостоятельного решения

6.6. Найти силу, действующую на точечный заряд $q = 3 \cdot 10^{-7}$ Кл, расположенный в центре равномерно заряженного полукольца радиуса $R = 0,2$ м и имеющего заряд $Q = 10^{-5}$ Кл.

6.7. Определить напряжённость электрического поля E вдоль оси однородно заряженного тонкого прямого стержня длиной $l = 0,5$ м с зарядом $q = 10^{-6}$ Кл на расстоянии $x = 0,5$ м от конца стержня.

6.8* Определить силу взаимодействия точечного заряда q с заземленной металлической пластинкой, находящейся на расстоянии a от заряда. Найти поверхностную плотность заряда $\sigma(r)$ на пластинке и полную величину индуцированного заряда Q на пластинке. r – расстояние от заряда до соответствующей точки поверхности пластинки. Размеры пластинки много больше расстояния a .

6.9. Полусфера заряжена равномерно с поверхностной плотностью заряда σ . Определить напряжённость электрического поля $E(0)$ в центре полусферы.

6.10. Определить, используя теорему Гаусса, напряжённость электрического поля E бесконечной плоскости. Заряд по плоскости распределен равномерно с поверхностной плотностью σ .

6.11. Определить напряжённость электрического поля $E(r)$ бесконечного диэлектрического цилиндра a) внутри и б) вне цилиндра. Заряд распределен внутри цилиндра равномерно с объёмной плотностью ρ ; r – расстояние от оси цилиндра, диэлектрическая проницаемость материала цилиндра ϵ .

6.12. Определить напряжённость электрического поля $E(r)$ внутри и вне равномерно заряженного диэлектрического шара с объёмной плотностью заряда ρ . r – расстояние от центра шара, диэлектрическая проницаемость материала шара ϵ .

6.13*. Бесконечная плоскость равномерно заряжена с плотностью заряда σ . В плоскости имеется круглое отверстие радиуса R . Найти напряжённость электрического поля $E(h)$ в точке, лежащей на перпендикуляре к плоскости, проходящем через центр отверстия на расстоянии h от плоскости.

6.14*. Найти напряжённость электрического поля E в сферической полости, однородно заряженного шара с объёмной плотностью заряда ρ . Расстояние между центром полости и центром шара равно b .

6.15. С какой силой F (на единицу длины) отталкиваются две одноименно заряженные бесконечно длинные параллельные нити с одинаковой плотностью заряда $\lambda = 3 \text{ мкКл/м}$, находящиеся на расстоянии $b = 2 \text{ см}$ друг от друга?

6.16. Определить напряжённость электрического поля $E(x)$ внутри и вне однородно заряженного плоского слоя толщиной d с плотностью заряда ρ . x – расстояние от плоскости симметрии этого слоя. Диэлектрическая проницаемость материала слоя ϵ .

6.17*. Пластину, равномерно заряженную с поверхностной плотностью заряда σ , пронизывает поток вектора напряжённости электрического поля Φ . Найти составляющую силы F_n , перпендикулярную плоскости пластины, действующую на пластину в этом поле.

6.18. Определить силу притяжения F между двумя разноименно заряженными пластинами с поверхностной плотностью заряда σ . Площадь пластин S . Размеры пластин много больше расстояния между ними.

§7. Потенциал. Электроёмкость

• Поле сил неподвижного точечного заряда q является центральным. Ранее (§4) было доказано, что любое поле центральных сил потенциально. Потенциальная энергия пробного заряда q_{np} в поле заряда q равна:

$$U_{np}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q}{r} \cdot q_{np}. \quad (7.1)$$

Величина $\varphi(\vec{r})$, определяемая как *отношение потенциальной энергии пробного заряда, помещенного в данную точку электрического поля, к значению этого заряда, называется потенциалом*:

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{U_{np}(\vec{r})}{q_{np}}. \quad (7.2)$$

Для точки поля точечного заряда в вакууме, газообразном или жидком диэлектрике потенциал равен:

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q}{\epsilon r}. \quad (7.3)$$

Как и потенциальная энергия, потенциал определён с точностью до произвольной постоянной. В (7.3) использована нормировка потенциала $\varphi(\infty) = 0$. Такую нормировку можно выбрать для любой реальной системы зарядов. Для модельных задач с бесконечными заряженными объектами типа нити или плоскости $\varphi \rightarrow \pm\infty$ при $r \rightarrow \infty$, и необходима иная нормировка.

Если пробный заряд перемещается из точки 1 в точку 2, то силы электростатического поля совершают работу:

$$A_{12} = U_{np}(\vec{r}_1) - U_{np}(\vec{r}_2) = q_{np} \cdot [\varphi(\vec{r}_1) - \varphi(\vec{r}_2)] \equiv q_{np} \cdot (\varphi_1 - \varphi_2). \quad (7.4)$$

$\varphi_1 - \varphi_2$ называется разностью потенциалов точек 1 и 2 электростатического поля. Из сравнения (7.4) с общим определением для работы силы (4.2) следует, что:

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \int_{(1)}^{(2)} (\vec{E}, d\vec{l}). \quad (7.5)$$

В параграфе 4 была установлена взаимосвязь между силой и потенциальной энергией (формула 4.8: $\vec{F} = -grad(U)$). Отсюда непосредственно вытекает следующее равенство:

$$\vec{E} = -grad\varphi, \quad (7.6)$$

которое позволяет находить вектор \vec{E} в каждой точке пространства, если задана скалярная функция $\varphi(x, y, z)$.

Пусть имеется система точечных зарядов q_1, \dots, q_n , и соблюдены условия выполнения принципа суперпозиции для напряжённости электрических полей, создаваемых этими зарядами. Тогда можно записать принцип суперпозиции для потенциалов:

$$\varphi(\vec{r}) = \sum_{i=1}^n \varphi_i(\vec{r}), \quad (7.7)$$

где $\varphi_i(\vec{r})$ – потенциал поля i -го заряда, создаваемого им в отсутствие остальных зарядов.

Для системы точечных зарядов

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^N \frac{q_i}{|\vec{r}_i|}, \quad (7.8)$$

где \vec{r}_i – радиус-вектор, проведенный от заряда с номером i до точки наблюдения.

Для протяжённых тел, также, как и в случае расчёта напряжённости электрического поля, тело разбивается на малые участки, которые представляются из точки наблюдения точечными зарядами. Затем находится потенциал, создаваемый каждым из участков, и эти вклады суммируются. Например, при линейном распределении заряда вдоль нити “ L ” потенциал в точке наблюдения будет равен соответственно:

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_L \frac{\lambda dl}{|\vec{r}|}. \quad (7.9)$$

• Электроёмкость

Если два проводника, несущие заряды q и $-q$ разделены вакуумом, жидким или газообразным диэлектриком, напряжённость электрического поля \vec{E} этих проводников в любой точке пропорциональна заряду q . Следовательно, (**в отсутствие иных зарядов**) разность потенциалов между проводниками:

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \int_1^2 (\vec{E}, d\vec{l}) = \frac{1}{C} \cdot q. \quad (7.10)$$

Коэффициент пропорциональности $1/C$ **зависит только от формы, размеров проводников и от диэлектрических свойств среды между ними.**

Величину C называют **электроёмкостью** такой системы проводников.

Необходимым условием однозначности электроёмкости системы проводников-обкладок является близость расположения обкладок друг к другу по сравнению с их размерами. Этим достигается **независимость электрического поля между проводниками от внешних полей**. Именно это обстоятельство учтено в определении конденсатора.

Конденсатором называется система двух проводников, образующих изолированное от других тел электрическое поле при соприкосновении им равных и противоположных по знаку зарядов.

Аналитически электроёмкость можно вычислить, используя соотношения (7.10), для ограниченного числа систем, обладающих плоской, цилиндрической или сферической симметрией.

- В задачах, в которых требуется найти потенциал электрического поля или разность потенциалов используются два подхода. В первом используется знание потенциала поля точечного заряда и принципа суперпозиции полей. Второй, использующий соотношение (7.5), применим, когда известно явное выражение для вектора напряжённости \vec{E} как функции координат. При расчёте электроёмкости всегда реализуется второй подход, причём напряжённость электрического поля между обкладками конденсатора определяется с помощью теоремы Гаусса.

Примеры решения задач

7.1. Найти потенциал φ и модуль E напряжённости поля диполя как функции r и θ (r – расстояние от центра диполя, θ – угол между осью диполя и направлением от центра диполя к данной точке). Модуль дипольного момента равен $p = ql$, l – плечо диполя. Считать, что размеры диполя очень малы: $l \ll r$.

Решение

Потенциал в точке A равен сумме потенциалов поля каждого из зарядов – положительного $(+q)$ и отрицательного $(-q)$:

$$\varphi(r, \theta) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r_+} - \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r_-} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r - \frac{l}{2} \cos\theta} - \frac{1}{r + \frac{l}{2} \cos\theta} \right) \approx$$

$$\approx \left\{ \text{при условии } r \gg l \right\} \approx \frac{ql \cos \theta}{4\pi \epsilon_0 r^2} = \frac{1}{4\pi \epsilon_0} \cdot \frac{p \cdot \cos \theta}{r^2}.$$

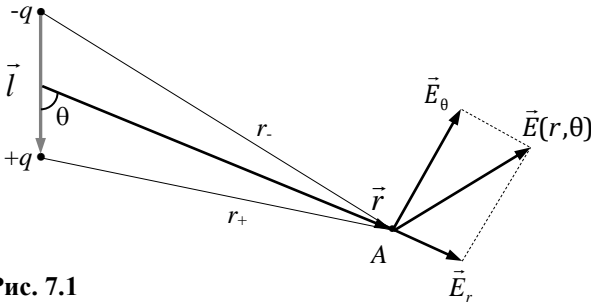


Рис. 7.1

Полученный результат для потенциала справедлив при $r \gg l$ (приближённые значения расстояний r_+ и r_- нетрудно получить, используя рисунок 7.1).

Проекции напряжённости электрического поля E_r и E_θ могут быть представлены как соответствующие проекции вектора **grad** φ в полярных координатах:

$$E_r = -\frac{\partial \varphi}{\partial r} = \frac{p \cos \theta}{2\pi \epsilon_0 r^3}; \quad E_\theta = -\frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} = \frac{p \sin \theta}{4\pi \epsilon_0 r^3}.$$

Соответственно, модуль напряжённости равен:

$$E(r, \theta) = \sqrt{E_r^2 + E_\theta^2} = \frac{p}{4\pi \epsilon_0 r^3} \sqrt{1 + 3 \cos^2 \theta}.$$

Задача

7.2. Определить потенциал и напряжённость электрического поля, созданного равномерно заряженным тонким кольцом на оси, проходящей через центр кольца перпендикулярно плоскости, в которой лежит кольцо. Радиус кольца R , его заряд q .

Решение

Воспользуемся принципом суперпозиции для потенциала. Как и при решении задачи 6.3 кольцо разбиваем на точечные заряды Δq_i , каждый из которых создает в точке A поле с потенциалом

$$\varphi_i = \frac{\Delta q_i}{4\pi \epsilon_0 r} = \frac{\Delta q_i}{4\pi \epsilon_0} \frac{1}{(R^2 + x^2)^{1/2}}.$$

Результат для $\varphi(x)$ получается суммированием φ_i по всем эле-

ментам кольца (см. рисунок к задаче 6.3):

$$\varphi(x) = \sum_i \varphi_i = \frac{q}{4\pi\epsilon_0(R^2 + x^2)^{1/2}}.$$

Используя связь между напряжённостью электрического поля и потенциалом (7.6) $E_x = -\frac{\partial\varphi}{\partial x}$, с учётом осевой симметрии задачи получаем модуль напряжённости поля кольца на его оси:

$$E(x) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{x}{(R^2 + x^2)^{3/2}}.$$

Такой же результат для напряжённости ранее был получен нами (см. задачу 6.3) непосредственным суммированием вкладов $\Delta\vec{E}$ от малых участков кольца. Однако при этом пришлось складывать разнонаправленные векторы, что существенно сложнее по сравнению с вышеприведенным способом.

Задача

7.3. Определить потенциал $\varphi(r)$ **на поверхности (а) и внутри (б)** равномерно заряженного по объёму диэлектрического шара радиуса R . Объёмная плотность заряда ρ , диэлектрическую проницаемость считать равной $\epsilon = 1$.

Решение

а) Нормируя потенциал на бесконечности $\varphi(\infty) = 0$, и с учётом того, что поле вне шара не отличается от поля точечного заряда, можно определить потенциал в точках на поверхности шара:

$$\varphi(R) = \int_R^\infty E(r)dr = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int_R^\infty \frac{dr}{r^2} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R} = \frac{\rho R^2}{3\epsilon_0}.$$

б) Найдём теперь поле в точках внутри шара. Применяя утверждение теоремы Гаусса для замкнутой сферической поверхности радиусом меньшим, чем у шара ($r < R$), приходим к равенству:

$$E(r) \cdot 4\pi r^2 = \frac{1}{\epsilon_0} \cdot \frac{4}{3} \pi r^3 \rho.$$

Отсюда получаем модуль напряжённости поля внутри шара на расстоянии r от его центра:

$$E(r) = \frac{\rho r}{3\epsilon_0}.$$

Теперь нетрудно найти и потенциал точек поля, находящихся

внутри шара ($r < R$), складывая удельные работы:

$$\begin{aligned}\varphi(r) &= \int_r^R E(r)dr + \int_R^\infty E(r)dr = \int_r^R E(r)dr + \varphi(R) = \int_r^R \frac{\rho r}{3\varepsilon_0} dr + \varphi(R) = \\ &= \frac{\rho}{6\varepsilon_0} (R^2 - r^2) + \varphi(R) = \frac{\rho}{2\varepsilon_0} \left(R^2 - \frac{r^2}{3} \right).\end{aligned}$$

Итак, потенциал в точках поля внутри шара равен:

$$\varphi(r) = \frac{\rho}{2\varepsilon_0} \left(R^2 - \frac{r^2}{3} \right).$$

Задача

7.4. Определить электроёмкость единицы длины коаксиального кабеля C_l (см. Рис. 7.2). Радиус внутренней жилы кабеля $a = 0,5$ мм, радиус оплетки кабеля $b = 3$ мм. Диэлектрическая проницаемость изолятора ε .

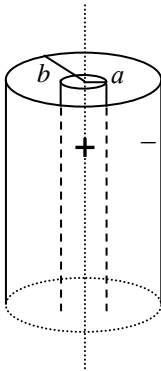


Рис. 7.2

Решение

Данная система проводников, по сути, представляет собой **цилиндрический конденсатор**. Чтобы найти поле в области между его обкладками можно использовать теорему Гаусса, действуя аналогично решению задачи 6.2 (см. стр. 78–79). Будем считать, что по жиле и оплётке (обкладкам) разноимённые заряды распределены с линейной плотностью λ . Тогда получим, что модуль напряжённости электрического поля

между ними равен $E(r) = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon\varepsilon_0 r}$. Разность по-

тенциалов между обкладками теперь нетрудно найти следующим образом:

$$\varphi_a - \varphi_b = \int_a^b E(r)dr = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon\varepsilon_0} \ln \frac{b}{a}.$$

Используя определение электроёмкости, для единицы длины коаксиального кабеля получаем:

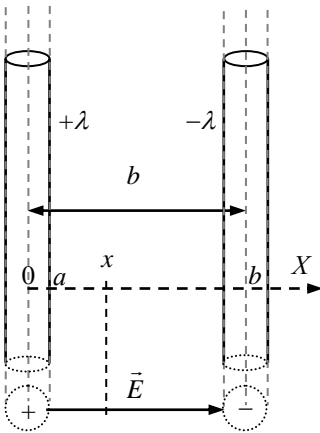
$$C_l = \frac{2\pi\varepsilon\varepsilon_0}{\ln \frac{b}{a}}.$$

Задача

7.5. Два длинных цилиндрических провода радиуса $a = 0,5$ мм расположены в воздухе параллельно друг другу (двухпроводная линия). Расстояние между их осями $b = 10$ мм. Найти электроёмкость этой системы проводов C_l , приходящуюся на единицу их длины.

Решение

По данным задачи $b \gg a$. Это позволяет считать, что заряды по поверхности проводников распределяются равномерно и напряжённость электрического поля между проводами можно найти, используя выражение (6.12) и принцип суперпозиции полей:



$\vec{E}(\vec{r}) = \vec{E}^+(\vec{r}) + \vec{E}^-(\vec{r})$. Направим координатную ось X из произвольной точки оси одного провода в сторону оси другого перпендикулярно к ней – см. рис. 7.3. Тогда в любой точке вдоль этой оси с координатами $a \leq x \leq b$ модуль напряжённости будет равен:

$$E(x) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{b-x} \right).$$

Для вычисления разности потенциалов между проводами выберем как раз путь вдоль прямой силовой линии, лежащей на оси X и соединяющей эти провода. Тогда разность

потенциалов между ними равна:

$$\varphi_a - \varphi_b = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \left(\int_a^{b-a} \frac{dx}{x} + \int_a^{b-a} \frac{dx}{b-x} \right) = \frac{\lambda}{\pi\epsilon_0} \ln \frac{b-a}{a}.$$

Отсюда с учётом условия $b \gg a$ получим:

$$C_l \approx \frac{\pi\epsilon_0}{\ln b/a} \approx 9,3 \text{ нФ/м}.$$

Задачи для самостоятельного решения

7.6. Найти потенциал φ в центре полусферы радиуса R , заряженной равномерно с поверхностной плотностью заряда σ .

7.7. Бесконечная плоскость заряжена равномерно с плотностью заряда σ . Ось X перпендикулярна к плоскости, начало отсчёта оси находится в точке её пересечения с плоскостью. а) Найти зависимость $\varphi(x)$. б) Можно ли в данном случае использовать нормировку потенциала $\varphi(\infty) = 0$?

7.8* Бесконечная пластина из диэлектрика с проницаемостью ε заряжена однородно с объёмной плотностью заряда ρ . Толщина пластины равна $2a$. Ось X перпендикулярна к пластине, начало координат расположено в середине пластины. Найти $\varphi(x)$: а) внутри и б) вне пластины. (Потенциал в середине пластины положить равным нулю). Пластина находится в воздухе.

7.9. а) Могут ли силовые линии электрического поля (в той его части, где отсутствуют электрические заряды) пересекаться между собой? б) Могут ли пересекаться или соприкасаться эквипотенциальные линии (поверхности), соответствующие различным потенциалам?

7.10. Определить разность потенциалов $\varphi_1 - \varphi_2$ между двумя коаксиальными цилиндрами радиусов R_1 и R_2 , равномерно заряженными противоположными по знаку зарядами с линейной плотностью λ . Краевыми эффектами пренебречь.

7.11. Разность потенциалов между двумя коаксиальными цилиндрами с радиусами R_1 и R_2 равна u_0 . Выразить через u_0 разность потенциалов $u(r)$ между внутренним цилиндром радиуса R_1 и точками, находящимися на расстоянии r от оси цилиндров ($R_1 < r < R_2$).

7.12* Накаленная нить катода радиолампы испускает электроны, которые под действием электрического поля ускоренно движутся к цилиндру, вдоль оси которого натянута нить. Радиусы цилиндра и нити равны соответственно $R_1 = 5$ мм и $R_2 = 0,05$ мм. Разность потенциалов между цилиндром и нитью $u_0 = 91$ В. Пренебрегая начальной скоростью электронов, определить ускорение a и скорость электронов v в точке, отстоящей от оси нити на расстоянии $r = 3,5$ мм. Заряд электрона $e = -1,6 \cdot 10^{-19}$ Кл, его масса $m_e = 9,1 \cdot 10^{-31}$ кг.

7.13*. Найти силу взаимодействия двух молекул воды, расположенных на расстоянии $r = 5$ нм друг от друга. Дипольные моменты молекул \vec{p}_1 и \vec{p}_2 расположены вдоль одной прямой и равны по модулю $p = 0,62 \cdot 10^{-29}$ Кл·м.

7.14. Получить формулы для электроёмкости: а) плоского конденсатора с площадью обкладок S и расстоянием d между ними; б) цилиндрического конденсатора (на единицу длины). Радиусы цилиндров R_1 и R_2 ; в) сферического конденсатора с радиусами сфер R_1 и R_2 ; $R_2 > R_1$. Конденсаторы заполнены диэлектриком с диэлектрической проницаемостью ϵ .

7.15*. Между пластинами плоского воздушного конденсатора создается электрическое поле E_0 . Затем половина зазора между пластинами заполняется однородным диэлектриком с проницаемостью ϵ . Найти модули напряжённости поля E_1 и E_2 в двух образовавшихся *параллельно соединённых* конденсаторах. Рассмотреть два случая: а) напряжение между обкладками не меняется; б) остаются неизменными заряды на обкладках.

7.16*. Решить задачу, аналогичную предыдущей, с тем отличием, что диэлектриком заполняется половина зазора между пластинами параллельно плоскости пластин.

7.17*. Цилиндрический конденсатор заполнен двумя коаксиальными цилиндрическими слоями изоляторов с диэлектрической проницаемостью ϵ_1 и ϵ_2 и “пробивными напряжённостями” E_1 и E_2 . При каком соотношении между радиусами внутренней обкладки конденсатора и границы раздела изоляторов R_1 и R_2 напряжённость поля будет одновременно достигать значения, соответствующего пробоем в обоих диэлектриках?

7.18*. Площадь каждой обкладки плоского конденсатора $S = 1$ м², расстояние между обкладками $d = 5$ мм. Зазор между обкладками заполнен диэлектриком, проницаемость которого изменяется в направлении перпендикулярном обкладкам по линейному закону от значения $\epsilon_1 = 2$ вблизи одной обкладки до $\epsilon_2 = 5,44$ вблизи другой. Определить электроёмкость такого конденсатора.

7.19*. Радиусы обкладок сферического конденсатора $R_1 = 9$ см и $R_2 = 11$ см. Зазор между обкладками заполнен диэлектриком, проницаемость которого изменяется с расстоянием r по закону $\varepsilon = 2R_1/r$. Найти ёмкость этого конденсатора.

§8. Энергия электростатического поля

• Найдём энергию заряженного конденсатора. Для этого рассчитаем работу по разделению зарядов между его обкладками. Элементарная работа внешних сил (см. 7.4) по перемещению заряда dq в электрическом поле равна:

$$dA = (\varphi_1 - \varphi_2) \cdot dq = \frac{q^*}{C} \cdot dq^*, \quad (8.1)$$

где $(\varphi_1 - \varphi_2)$ – разность потенциалов между обкладками, а q^* – изменяющийся в данном процессе модуль заряда обкладок. Полная работа определяется суммированием элементарных работ, т.е. интегрированием в равенстве (8.1):

$$A = \int_0^q \frac{q^*}{C} dq = \frac{q^2}{2C}. \quad (8.2)$$

Эта работа и определяет электрическую энергию $W_э$, «запасённую» в конденсаторе. Используя ещё раз связь заряда q на обкладках конденсатора с разностью потенциалов $(\varphi_1 - \varphi_2) \equiv u$ между ними, можно записать эту энергию в виде:

$$W_э = \frac{Cu^2}{2}, \quad (8.3)$$

• По современным представлениям, эта **энергия сосредоточена в электрическом поле**. Поэтому выразим её через **характеристику самого поля – напряжённость**. Используя (8.3), выразим энергию плоского конденсатора через модуль напряжённости электрического поля в нём:

$$W_э = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 S}{d} \cdot \frac{(Ed)^2}{2} = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 E^2}{2} \cdot Sd = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 E^2}{2} \cdot V, \quad (8.4)$$

где V – объём области между обкладками конденсатора.

Определим **энергию, приходящуюся на единицу объёма пространства**, где есть электрическое поле $w_э$. Поле внутри конденсатора однородно, поэтому:

* Здесь мы использовали определение ёмкости конденсатора $C = q/(\varphi_1 - \varphi_2)$.

$$w_3(\vec{r}) = \frac{\Delta W_3}{\Delta V} = \frac{W_3}{V}.$$

С учётом простого соотношения для объёма $Sd = V$ получим:

$$w_3(\vec{r}) = \frac{\epsilon \epsilon_0}{2} E^2(\vec{r}). \quad (8.5)$$

Величина w_3 называется **объёмной плотностью энергии** электрического поля. В случае неоднородного поля она позволяет определять энергию, заключённую в малых элементах пространства объёмом dV : $dW_3 = w_3 dV$. А зная напряжённость поля как функцию координат, можно рассчитать полную энергию электрического поля в той или иной области пространства « Ω »:

$$W_3 = \frac{\epsilon_0}{2} \int_{\Omega} \epsilon E^2(\vec{r}) dV. \quad (8.6)$$

- Задачи данного раздела, как правило, связаны с нахождением энергии электрического поля заряженных тел, а также изменения энергии конденсатора при его перезарядке, перемещении обкладок, заполнении пространства между обкладками диэлектриком.

Примеры решения задач

8.1. Заряд $q = 1$ мкКл равномерно распределён по объёму диэлектрического шара радиуса $R = 1$ см. Рассчитать

- энергию электрического поля W_1 в окружающем шар пространстве;
 - энергию W_2 , заключённую в пространстве внутри шара;
 - полную энергию электрического поля W_3 , связанную с шаром.
- з) Какая часть энергии приходится на область пространства за пределами концентрической с шаром сферы радиуса $R_1 = 1$ м.

Принять диэлектрическую проницаемость материала шара и окружающей среды равной $\epsilon = 1$.

Решение

а) Объёмная плотность энергии электрического поля определяется равенством (8.5). Используя теорему Гаусса, легко получить напряжённость электрического поля. **Вне шара** она равна:

$$E(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2},$$

где r – расстояние от центра шара, q – полный заряд шара. Для вычисления интеграла (8.5) разобьём пространство на тонкие

сферические слои радиуса r и толщиной dr . Объём такого слоя равен $dV = 4\pi r^2 dr$. Плотность энергии зависит только от радиуса и, следовательно, постоянна в пределах слоя. Энергия поля, заключённая в пределах слоя равна:

$$dW = wdV = \frac{1}{2} \left(\frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 r^2} \right) dr.$$

Полную энергию электрического поля **вне шара** находим, интегрируя dW в пределах от R до ∞ :

$$W_1 = \frac{1}{2} \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0} \int_R^{\infty} \frac{dr}{r^2} = \frac{1}{2} \left(\frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 R} \right) = 0,45 \text{ Дж.}$$

б) Модуль напряжённости электрического поля E **внутри шара** равен $E(r) = \frac{\rho r}{3\epsilon_0}$ (см. решение задачи 7.3), где ρ – объёмная

плотность заряда. Тогда для сферического слоя внутри шара можно записать:

$$dW = wdV = \frac{\epsilon_0 \rho^2 r^2}{2(3\epsilon_0)^2} \cdot 4\pi r^2 dr = \frac{4\pi \rho^2 r^4}{18\epsilon_0} dr.$$

Таким образом, энергию поля **внутри шара** можно рассчитать, интегрируя dW по области шара (в пределах от 0 до R):

$$W_2 = \frac{4\pi \rho^2}{18\epsilon_0} \int_0^R r^4 dr = \frac{4\pi \rho^2 R^5}{90\epsilon_0} = \frac{1}{10} \left(\frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 R} \right) = 0,09 \text{ Дж,}$$

где $q = \rho \cdot (4/3\pi R^3)$ – полный заряд шара.

в) Полная энергия электрического поля W_3 , связанного с шаром, очевидно, равна сумме найденных выше энергий:

$$W_3 = W_1 + W_2 = \frac{3}{5} \left(\frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 R} \right) = 0,54 \text{ Дж.}$$

Отсюда видно, что 1/6 её часть приходится на область внутри шара, а 5/6 – на окружающее шар пространство.

з) Вне концентрической с шаром сферы радиуса R_1 , поле имеет энергию, которую нетрудно рассчитать, действуя аналогично п. а):

$$W_{R_1} = \frac{q^2}{2(4\pi\epsilon_0)^2} \int_{R_1}^{\infty} \frac{dr}{r^2} = \frac{1}{2} \left(\frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 R_1} \right).$$

Это составляет долю равную $\eta = \frac{W_1}{W} = \frac{R}{R_1} = 0,01$ (1%) от об-

щей энергии электрического поля, связанного с шаром. Т.е. почти вся энергия поля сосредоточена в пределах сферы радиуса R_1 .

Задачи для самостоятельного решения

8.2. Определить энергию электрического поля $W_э$ проводящего шара радиуса R , несущего заряд q .

8.3. Определить радиус сферы $R_{0,9}$, в пределах которой заключено 90% всей энергии поля проводящей сферы радиуса R , несущей заряд q .

8.4. Какая часть энергии η , связанной с заряженным проводящим шаром радиуса $R_0 = 1$ см, заключена в пределах сферы, концентрической с шаром, радиуса $R = 1$ м?

8.5*. Заряд $q = 10^{-10}$ Кл распределяется равномерно по объёму шара радиусом $R = 1$ см. Затем, вследствие взаимного отталкивания заряды переходят на поверхность шара. Какую работу A совершают при этом электрические силы над зарядами? Считать $\varepsilon = 1$.

8.6. Точечный заряд $q = 3$ мкКл помещается в центре сферического слоя из однородного и изотропного диэлектрика с $\varepsilon = 3$. Внутренний радиус слоя $a = 0,25$ м, внешний $b = 0,5$ м. Найти энергию $W_э$ электрического поля, заключённую в пределах диэлектрического слоя.

8.7. Определить работу A , которую нужно совершить, чтобы увеличить на $\Delta x = 0,2$ мм расстояние между пластинами плоского конденсатора, заряженного разноимёнными зарядами с модулем $q = 0,2$ мкКл. Площадь каждой пластины $S = 400$ см², $\varepsilon = 1$.

8.8. Среднее расстояние электрона от ядра в атоме водорода $\langle r \rangle = 0,8 \cdot 10^{-10}$ м. Оценить: а) энергию $W_э$ кулоновского взаимодействия электрона с ядром; б) сумму таких энергий W_0 для одного моля атомарного водорода.

8.9. Найти энергию электрического поля W_1 , приходящуюся на единицу длины воздушного цилиндрического конденсатора.

Радиус внутреннего цилиндра – a , внешнего – b . Заряд единицы длины обкладок конденсатора равен λ .

8.10. Определить зависимость $q(t)$ заряда от времени на конденсаторе электроёмкости C при подключении его через резистор с сопротивлением R к источнику тока с ЭДС \mathcal{E} . Построить график $q(t)$. Определить максимальное значение силы тока при зарядке конденсатора.

8.11. Определить зависимость заряда $q(t)$ от времени на конденсаторе электроёмкости C после замыкания его на резистор с сопротивлением R . Начальное значение заряда конденсатора q_0 . Построить график $q(t)$. Определить время τ , за которое заряд уменьшится в e раз.

8.12. Определить время τ , за которое энергия электрического поля конденсатора электроёмкости $C = 1 \text{ мкФ}$ уменьшится в 2 раза. Конденсатор разряжается через резистор с сопротивлением $R = 1 \text{ кОм}$.

8.13. Две концентрические проводящие сферы радиусами $R_1 = 20 \text{ см}$ и $R_2 = 50 \text{ см}$ заряжены одинаковыми зарядами $q = 100 \text{ нКл}$. Определить энергию $W_э$ электростатического поля, заключённого между этими сферами в диэлектрике с $\epsilon = 1$.

§9. Законы постоянного тока

• Электрический ток это **упорядоченное** движение заряженных частиц (носителей тока). Количественными характеристиками электрического тока являются *плотность и сила тока*.

○ *Плотность электрического тока – вектор, направление которого совпадает с направлением упорядоченного движения положительных носителей тока, и равный по величине заряду, переносимому в единицу времени через единичную поверхность, перпендикулярную к скорости носителей:*

$$\vec{j} = qn\vec{v}_{op}, \quad (9.1)$$

где q , n и \vec{v}_{op} – заряд, концентрация и скорость упорядоченного движения носителей тока.

○ Силой тока I называется скалярная величина, равная отношению заряда dq переносимого через некоторую поверхность “ Σ ” за малый промежуток времени dt , к величине этого промежутка:

$$I = \left. \frac{dq}{dt} \right|_{\Sigma}. \quad (9.2)$$

Зная вектор $\vec{j}(\vec{r})$ в каждой точке пространства можно найти силу тока через любую поверхность Σ :

$$I = \int_{\Sigma} (\vec{j}, d\vec{S}). \quad (9.3)$$

• Для многих тел плотность тока в данной точке в широких пределах пропорциональна напряжённости электрического поля в той же точке:

$$\vec{j}(\vec{r}) = \frac{1}{\rho(\vec{r})} \vec{E}(\vec{r}). \quad (9.4)$$

Величина $\rho(\vec{r})$ называется *удельным сопротивлением* вещества, из которого сформировано проводящее тело. Равенство (9.4) носит название *закона Ома в дифференциальной* (локальной) форме.

• Для поддержания в проводнике **постоянного тока** в каком-то участке цепи должны действовать силы, обеспечивающие движение зарядов **против сил электростатического поля**. Такие силы, в отличие от кулоновских, называют **сторонними**.

○ **Величина, равная работе сторонних сил по перемещению единичного положительного заряда называется электродвижущей силой (ЭДС)**, действующей в цепи или на её участке (в источнике тока).

○ Закон Ома для участка цепи с ЭДС связывает силу тока, протекающего в участке, разность потенциалов на его концах $\varphi_1 - \varphi_2$ и действующую на участке ЭДС \mathcal{E}_{12} :

$$I(R+r) = \varphi_1 - \varphi_2 \pm \mathcal{E}_{12}. \quad (9.4)$$

Здесь $(R+r)$ – полное сопротивление участка цепи. При движении вдоль участка от точки 1 к точке 2 знаки **падения напряжения** $I(R+r)$ и ЭДС \mathcal{E}_{12} выбираются положительными, если направление тока и ЭДС источника совпадают с направлением обхода.

Величина $u_{12} = \varphi_1 - \varphi_2 \pm \mathcal{E}_{12}$ называется **напряжением на участке цепи 1-2**.

○ Закон Ома для **однородного участка цепи** (без ЭДС) устанавливает **прямо пропорциональную зависимость** между силой тока I и приложенным к участку цепи напряжением u_{12} :

$$I = \frac{1}{R} u_{12}, \quad (9.5)$$

где R – **электрическое сопротивление** проводника. Для проводника произвольной формы его **можно рассчитать** так:

$$R = \int_1^2 \frac{\rho}{S} dl, \quad (9.6)$$

где S – площадь поперечного сечения проводника. В частности, для однородного проводника цилиндрической формы длины l :

$$R = \rho \frac{l}{S}. \quad (9.7)$$

- Из опыта известно, что при протекании электрического тока по проводникам часть энергии, приобретаемой зарядами в электрическом поле, переходит в тепло.

Для физически малого элемента проводника выполняются локальные соотношения между этим количеством теплоты и характеристиками протекающего тока (**закон Джоуля – Ленца в дифференциальной форме**):

$$\frac{\delta Q_{y\theta}}{dt} = \rho \cdot j^2, \text{ либо } \frac{\delta Q_{y\theta}}{dt} = \frac{1}{\rho} \cdot E^2, \quad (9.8)$$

где $\delta Q_{y\theta}$ – количество теплоты, выделяющееся в единице объёма за малый интервал времени dt .

Количество теплоты ΔQ , выделяемое **во всём проводнике** за малый интервал времени dt при протекании по нему тока, определяется **законом Джоуля – Ленца (в интегральной форме)**:

$$Q = I^2 (R + r) dt = I u_{12} dt = \frac{u^2}{R} dt. \quad (9.9)$$

Отметим, что соотношение (9.9) выполняется в неподвижном проводнике при отсутствии химических реакций.

- С помощью закона Ома в интегральной форме рассчитывают силы токов по заданным величинам ЭДС и полным сопротивлениям только в простейших случаях, когда цепь можно свести к од-

ному неразветвленному контуру. Для разветвленных цепей весьма удобно использовать так называемые **правила Кирхгофа**. Из закона сохранения заряда для стационарных токов следует **первое правило Кирхгофа**:

○ алгебраическая сумма сил токов, сходящихся в узле, равна нулю:

$$\sum_{i=1}^N I_i = 0. \quad (9.10)$$

Обычно силам токов, входящих в узел, приписывают знак плюс, выходящих из узла – минус.

Из закона Ома для неоднородных участков цепи следует **второе правило Кирхгофа**:

○ алгебраическая сумма ЭДС, действующих в контуре, равна алгебраической сумме произведений сил токов на полные сопротивления в неразветвленных участках контура:

$$\sum_i \mathcal{E}_i = \sum_i I_i (R_i + r_i). \quad (9.11)$$

Для применения второго правила Кирхгофа выбирается определённое направление обхода контура (по часовой стрелке или против неё). **Знаки ЭДС и сил токов**, входящих в равенства вида (9.11), считаются **положительными, если направление обхода контура совпадает с направлением ЭДС и тока**. Считается, что **ЭДС направлена от отрицательного полюса источника тока к положительному**.

Например, для узла *a* в схеме, представленной на рис. 9.1 равенство (9.10) запишется в виде:

$$I_5 - I_1 - I_4 = 0.$$

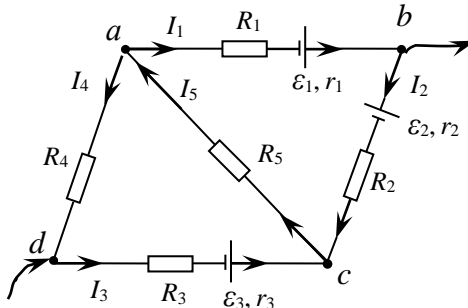


Рис. 9.1

Для контура $abcd$ при обходе по часовой стрелке можно записать второе правило Кирхгофа:

$$I_1(R_1+r_1) + I_2(R_2+r_2) - I_3(R_3 + r_3) - I_4R_4 = \mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_2 - \mathcal{E}_3.$$

Составив систему уравнений (используя правила Кирхгофа), по заданным величинам \mathcal{E}_i , R_i и r_i можно найти значения сил токов, текущих по всем участкам анализируемой цепи.

При практическом использовании правил Кирхгофа направления токов в неразветвленных участках цепи и направления обхода контуров выбираются произвольно. Если в результате расчёта полученная величина силы тока положительна, то направление тока было выбрано правильно. В противном случае ток в действительности течёт в направлении, обратном выбранному первоначально.

- *Токи в сплошных средах.* Законы Ома и Джоуля - Ленца приведены для случая, когда ток протекает по хорошо проводящим проводникам, окружённым изолятором (воздухом). Альтернативная ситуация реализуется при погружении металлических электродов, между которыми поддерживается постоянная разность потенциалов, в плохо проводящую среду. Определение силы тока и сопротивления в этом случае продемонстрировано в решении задачи 9.2 данного раздела.

- Задачи этого раздела обычно посвящены определению разности потенциалов, силы тока, сопротивления в электрических цепях по заданным остальным параметрам. При этом следует различать случай, когда токи локализованы в проводниках и когда они текут в сплошных средах между хорошо проводящими электродами.

Примеры решения задач

9.1. На рис. 9.2 изображена цепь постоянного тока, состоящая из трёх источников тока и трёх сопротивлений, включенных по-

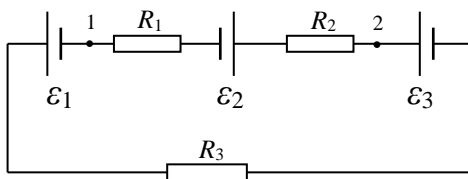


Рис. 9.2

следовательно. Параметры цепи: $\mathcal{E}_1 = 2 \text{ В}$, $\mathcal{E}_2 = 5 \text{ В}$, $\mathcal{E}_3 = 2 \text{ В}$, $R_1 = 1 \text{ Ом}$, $R_2 = 2 \text{ Ом}$, $R_3 = 3 \text{ Ом}$. Определить разность потенциалов $\varphi_1 - \varphi_2$ между точками 1 и 2. Внутренним сопротивлением источников тока и соединительных проводов пренебречь.

Решение

Значение силы тока I легко найти, применив закон Ома для полной цепи с учётом полярности включения источников тока:

$$I = \frac{\mathcal{E}_2 - \mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_3}{R_1 + R_2 + R_3}.$$

Известные численные значения ЭДС источников позволяют определить, что ток в контуре протекает по часовой стрелке. С учётом этого запись закона Ома для участка цепи, содержащего ЭДС имеет вид:

$$I \cdot (R_1 + R_2) = \varphi_1 - \varphi_2 + \mathcal{E}_2.$$

Отсюда и получаем искомую разность потенциалов:

$$\begin{aligned} \varphi_1 - \varphi_2 &= \\ &= \frac{\mathcal{E}_2 - \mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_3}{R_1 + R_2 + R_3} \cdot (R_1 + R_2) - \mathcal{E}_2 = -4,5 \text{ В}. \end{aligned}$$

Как видим, оказалось, что $\varphi_1 < \varphi_2$, т.е. ток по участку протекает в направлении повышения потенциала. К такому результату приводит присутствие ЭДС \mathcal{E}_2 между точками 1 и 2. Это полезно проследить, построив ход потенциала φ между этими точками (см. рис. 9.2).

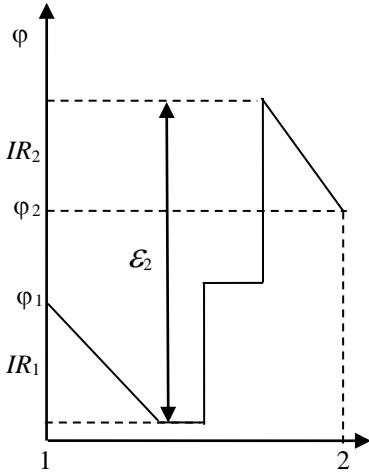


Рис. 9.2

Задача

9.2. Два металлических электрода произвольной формы разделены слабо проводящей средой заполняющей всё пространство. Удельное сопротивление среды ρ , её диэлектрическая проницаемость ϵ . Электроёмкость указанной системы электродов равна C . Найти силу тока утечки I между электродами, если разность потенциалов между электродами равна $\Delta\varphi$.

Решение

Линии плотности тока \vec{j} в изотропной среде совпадают с линиями напряжённости электрического поля \vec{E} , поскольку в любой точке пространства $\vec{j} = \frac{1}{\rho} \vec{E}$. Сила тока, текущего по среде, сквозь замкнутую поверхность Σ , окружающую один из электродов равна

$$I = \oint_{\Sigma} (\vec{j}, d\vec{S}) = \frac{1}{\rho} \oint_{\Sigma} (\vec{E}, d\vec{S}).$$

Используя теорему Гаусса, можно записать:

$$\oint_{\Sigma} (\vec{E}, d\vec{S}) = \frac{q}{\epsilon \epsilon_0},$$

где q – заряд электрода, ϵ – диэлектрическая проницаемость среды. Тогда “ток утечки” между электродами равен

$$I = \frac{q}{\epsilon \epsilon_0 \rho} = \frac{C \cdot \Delta \varphi}{\epsilon \epsilon_0 \rho}.$$

Сопротивление R между обкладками связано с электроёмкостью системы соотношением:

$$R = \frac{\Delta \varphi}{I} = \frac{\epsilon \epsilon_0 \rho}{C}. \quad (9.11)$$

Отметим, что оно справедливо только в однородных средах $\rho = const, \epsilon = const$.

Задача

9.3. Два металлических шара радиусом a помещены на расстоянии $l \gg a$ друг от друга в бесконечную слабо проводящую среду с удельным сопротивлением ρ . Найти электрическое сопротивление между электродами. Диэлектрическая проницаемость среды ϵ .

Решение

Значительное удаление шаров позволяет считать их уединёнными проводниками с электроёмкостью:

$$C_1 = 4\pi\epsilon_0\epsilon a.$$

Эти своеобразные «конденсаторы» соединены последовательно (у них одна общая обкладка – Земля) и $C_{общ} = C_1/2 = 2\pi\epsilon_0\epsilon a$. В соответствии с соотношением (9.11)

$$R = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon \rho}{2\pi \varepsilon_0 \varepsilon a} = \frac{\rho}{2\pi a}.$$

На первый взгляд мы получили неожиданный результат: сопротивление между электродами не зависит от расстояния l . Это связано с предположением о бесконечности среды, в которую помещены шары. При их удалении друг от друга увеличивается сечение области, где проходят линии тока, что и компенсирует в точности рост сопротивления за счёт увеличения l . Отмеченный эффект использовался ранее для уменьшения числа проводов в телефонных и телеграфных линиях: одним из проводников являлась земля между двумя помещенными в грунт электродами на краях линии.

Задача

9.4. Металлический шар радиуса a окружён концентрической с ним металлической оболочкой радиуса b . Пространство между этими электродами заполнено однородной проводящей средой с удельным сопротивлением ρ . Найти электрическое сопротивление R межэлектродного пространства. Рассмотреть случай $b \rightarrow \infty$.

Решение

Выделяя в межэлектродном пространстве сферический слой радиуса r и толщиной dr , можно записать выражение для величины сопротивления этого слоя $dR = \rho \frac{dr}{4\pi r^2}$. Отсюда полное сопротивление межэлектродного промежутка

$$R = \frac{\rho}{4\pi} \int_a^b \frac{dr}{r^2} = \frac{\rho}{4\pi} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right).$$

При $b \rightarrow \infty$ $R = \rho/4\pi a$.

Задачи для самостоятельного решения

9.5. Участок цепи представляет тело вращения из однородного материала с удельным сопротивлением ρ , длиной l . Площадь поперечного сечения тела зависит от координаты x по закону $S(x)$. Написать выражение для сопротивления R этого участка.

9.6. Радиусы обкладок сферического конденсатора равны a и b ($a < b$). Пространство между обкладками заполнено веществом

с проницаемостью ϵ и удельной проводимостью σ . Первоначально конденсатор не заряжен. Затем внутренней обкладке сообщается заряд q_0 . Найти: а) закон изменения заряда q на внутренней обкладке, б) количество тепла Q , выделившееся при растекании заряда.

9.7. Две квадратные пластины со стороной a , закрепленные на расстоянии d друг от друга ($a \gg d$), образуют плоский конденсатор, подключенный к источнику постоянного напряжения u . Расположенные вертикально пластины погружают в сосуд с керосином со скоростью v . Проницаемость керосина ϵ . Найти силу тока I , текущего при этом по подводящим проводам.

9.8. Имеется $N = 24$ источников тока с ЭДС $\mathcal{E} = 1$ В и внутренним сопротивлением $r = 0,2$ Ом. Эти источники соединены так, что образуют батарею из n последовательных секций, каждая из которых состоит из N/n соединенных параллельно источников. К батарее подключено внешнее сопротивление $R = 0,3$ Ом. При каком n мощность P , выделяемая на сопротивлении R будет максимальной? Чему равно максимальное значение P ?

9.9. Конденсатор электроёмкости $C = 5$ мкФ подсоединён к источнику постоянного тока с напряжением $u = 200$ В. Затем переключатель Π переводится с контакта 1 на контакт 2 (см. рис. 9.3). Найти количество теплоты Q , выделившееся на резисторе сопротивлением $R_1 = 500$ Ом. Сопротивление резистора $R_2 = 300$ Ом.

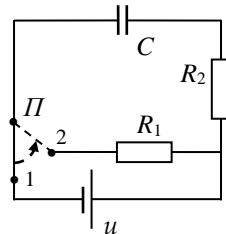


Рис. 9.3

9.10. Между обкладками плоского конденсатора помещена параллельно им медная пластинка, толщина которой равна $1/3$ зазора между пластинами. Электроёмкость конденсатора в отсутствие пластины $C = 0,025$ мкФ. Конденсатор подключен к источнику тока с напряжением $u = 100$ В. Определить: а) работу A_1 , которую надо совершить, чтобы извлечь пластинку из конденсатора; б) работу A_2 , совершаемую при этом источником тока. Нагреванием пластинки пренебречь.

9.11. По участку цепи с сопротивлением R течёт постоянный ток силы I . Может ли при этом разность потенциалов на концах участка равняться нулю?

9.12. В схеме, изображенной на рис. 9.4 $\mathcal{E}_1 = 10 \text{ В}$, $\mathcal{E}_2 = 20 \text{ В}$, $\mathcal{E}_3 = 30 \text{ В}$, $R_1 = 9 \text{ Ом}$, $R_2 = 7 \text{ Ом}$, $R_3 = 12 \text{ Ом}$. Найти силы токов в каждой ветви I_1 , I_2 , I_3 . Внутренними сопротивлениями источников пренебречь.

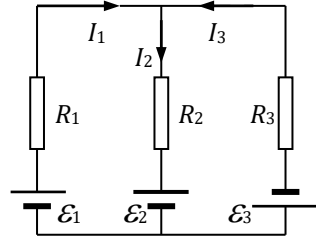


Рис. 9.4

9.13. Сила тока в проводнике сопротивлением $R = 120 \text{ Ом}$ равномерно возрастает от $I_0 = 0$ до $I_{\text{max}} = 5 \text{ А}$ за время $\tau = 15 \text{ с}$. Определить выделившееся за это время в проводнике количество теплоты Q .

9.14. Сила тока в проводнике сопротивлением $R = 100 \text{ Ом}$ равномерно убывает от $I_0 = 10 \text{ А}$ до $I = 0$ за время $\tau = 30 \text{ с}$. Определить выделившееся за это время в проводнике количество теплоты Q .

9.15. Определить напряжённость электрического поля E в алюминиевом проводнике объёмом $V = 10 \text{ см}^3$, если при прохождении по нему постоянного тока за время $\tau = 5 \text{ мин}$ выделилось количество $Q = 2,3 \text{ кДж}$. Удельное сопротивление алюминия $\rho = 26 \text{ нОм}\cdot\text{м}$.

9.16. Определить внутреннее сопротивление r и ЭДС \mathcal{E} источника тока, если во внешней цепи при силе тока $I_1 = 4 \text{ А}$ развивается мощность $P_1 = 10 \text{ Вт}$, а при силе тока $I_2 = 2 \text{ А}$ мощность $P_2 = 8 \text{ Вт}$.

9.17. Определить среднюю мощность $\langle P \rangle$, выделяющуюся на сопротивлении $R = 10 \text{ Ом}$, при протекании по нему прямоугольных импульсов тока длительностью $\tau = 1 \text{ с}$ и амплитудой $I_0 = 2 \text{ А}$. Период повторения импульсов $T = 2 \text{ с}$.

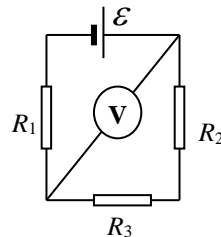


Рис. 9.5

9.18. Определить ЭДС батареи \mathcal{E} , пренебрегая её внутренним сопротивлением в

схеме, указанной на рис. 9.5. $R_1 = R_2 = R_3 = 100 \text{ Ом}$. Вольтметр показывает напряжение $u = 200 \text{ В}$, сопротивление вольтметра $R_V = 800 \text{ Ом}$.

9.19. Максимальное сопротивление потенциометра в схеме, представленной на рис. 9.6 $R = 2 \text{ кОм}$, внутреннее сопротивление вольтметра $R_V = 5 \text{ кОм}$, напряжение источника $u_0 = 220 \text{ В}$. Определить показание вольтметра V , если подвижный контакт находится посередине потенциометра.

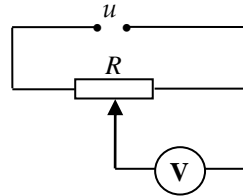


Рис. 9.6

9.20. В схеме, представленной на рис. 9.7 $R_1 = R$, $R_2 = 2R$, $R_3 = 3R$, $R_4 = 4R$. Определить заряд q на конденсаторе ёмкости C . Напряжение источника u_0 .

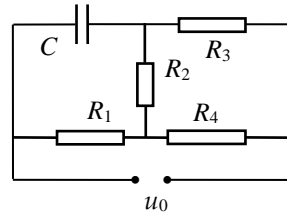


Рис. 9.7

9.21. Определить плотность j электрического тока в медном проводе с удельным сопротивлением $\rho = 17 \text{ нОм}\cdot\text{м}$, если удельная тепловая мощность тока равна $P = 1,7 \text{ Дж}/(\text{м}^3\cdot\text{с})$.

§10. Магнитное поле токов

• Силовое действие магнитного поля на проводники с током и движущиеся заряды определяет вектор магнитной индукции \vec{B} . Чтобы найти \vec{B} , можно использовать закон Био-Савара-Лапласа (БСЛ). Он позволяет определить индукцию магнитного поля $d\vec{B}$ от каждого

элемента тока $I d\vec{l}$ в произвольной точке пространства A , задаваемой радиус-вектором \vec{r} (см. рис. 10.1):

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I [d\vec{l}, \vec{r}]}{r^3}, \quad (10.1)$$

где μ_0 – магнитная постоянная,

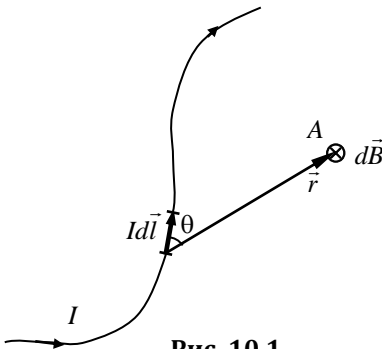


Рис. 10.1

равная $4\pi \cdot 10^{-7} \text{ Гн/м}$ (или Н/А^2). Модуль магнитной индукции равен

$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Idl \sin\theta}{r^2}. \quad (10.2)$$

Для нахождения результирующего магнитного поля в точке A следует, пользуясь *принципом суперпозиции полей*, найти сумму векторов $d\vec{B}$ от всех элементов тока, на которые предварительно разбивается проводник с током I . Таким образом, **принципиально** может быть решён вопрос для проводников произвольной формы. Покажем, как реализуется этот подход **практически** для случая проводников несложной формы.

Задача

10.1. Ток силы $I = 10 \text{ А}$ протекает по прямолинейному участку проводника длины $2a = 20 \text{ см}$. Точка A лежит на расстоянии $R = 4 \text{ см}$ от этого участка на перпендикуляре, проходящем через его середину. Найти магнитную индукцию \vec{B} в точке A , которая создается данным участком проводника.

Решение

Разобьём проводник на малые элементы и определим индукцию магнитного поля в точке A для каждого из них в соответствии с законом Био–Савара–Лапласа (10.1). Направление векторов определим по «правилу буравчика» (правого винта). Очевидно, все векторы $d\vec{B}$ направлены одинаково – перпендикулярно плоскости, в которой располагается проводник и точка A (на рис. 10.2 показано символом \otimes – перпендикулярно его плоскости от нас). Поэтому результирующий вектор \vec{B} направлен так же, и остается найти его модуль. Чтобы просуммировать модули dB (операция интегрирования), даваемые равенством (10.2), выразим входящие в него величины r и dl через одну переменную θ и её дифференциал $d\theta$:

$$r = \frac{R}{\sin\theta}, \quad dl = \frac{rd\theta}{\sin\theta} = \frac{Rd\theta}{\sin^2\theta}. \quad (10.3)$$

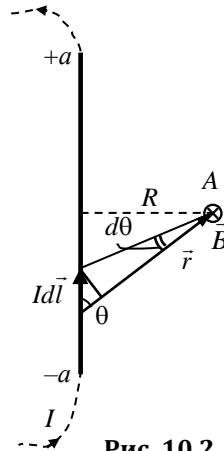


Рис. 10.2

Подстановка в (10.2) даёт:

$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I \sin\theta}{R} d\theta. \quad (10.4)$$

Остается выполнить интегрирование в пределах изменения угла θ для данного участка проводника, т. е. от θ_0 до $\pi - \theta_0$:

$$B = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I}{R} \int_{\theta_0}^{\pi - \theta_0} \sin\theta d\theta, \quad (10.5)$$

где θ_0 – угол, под которым направлен вектор, соединяющий нижний конец участка с точкой A . Очевидно $\cos\theta_0 = \frac{a}{\sqrt{a^2 + R^2}}$ (см.

рис. 10.2). В итоге получаем модуль вектора магнитной индукции поля в точке A :

$$B = \frac{\mu_0}{2\pi R} \frac{I}{\sqrt{1 + (R/a)^2}} = 46,4 \text{ мкТл}. \quad (10.6)$$

Если длина прямолинейного участка проводника с током много больше расстояния до точки A , вид результата упростится:

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi R} = 50 \text{ мкТл}. \quad (10.7)$$

Физически это соответствует магнитному полю очень длинного (бесконечного) проводника с током на конечном расстоянии R от него.

10.2. Длинный проводник с током силой I изогнут под прямым углом. Найти магнитную индукцию в точке A , находящейся на расстоянии R от точки изгиба на продолжении одного из перпендикулярных участков (см. рис. 10.3) проводника.

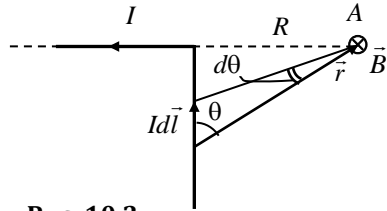


Рис. 10.3

Решение

Действуя аналогично предыдущей задаче, разобьем проводник на элементы тока. Очевидно, угол θ меняется в пределах от 0 до $\pi/2$ лишь для вертикального (по рис. 10.3) участка. Напротив, для горизонтального участка он постоянен и равен π . Это означает, что данный участок не создает магнитного поля в точке A

($\cos\theta = 0$). Выражение для индукции поля, создаваемого каждым элементом тока вертикального участка, записывается так же, как и в предыдущей задаче (10.4). Остается лишь просуммировать соответствующие векторы с учётом оговоренного выше диапазона изменения угла θ . Модуль вектора магнитной индукции для этого случая равен

$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi R}. \quad (10.8)$$

Задача

10.3. По круговому витку из тонкого провода радиуса $R = 5$ см циркулирует ток силой $I = 10$ А. Найти магнитную индукцию на оси витка на расстоянии $x = 10$ см от его центра, а также в центре витка.

Решение

Определим, прежде всего, направление векторов $d\vec{B}$ от элементов тока $I d\vec{l}$ в рассматриваемом случае. По закону БСЛ оно определяется векторным произведением $[d\vec{l}, \vec{r}]$, то есть векторы $d\vec{B}$ перпендикулярны как вектору $d\vec{l}$ так и \vec{r} . Это означает, что векторы $d\vec{B}$ располагаются “веером” (по поверхности конуса) вокруг оси симметрии кольца с вершиной в точке A (см. рис. 10.4). Угол раствора веера равен $2 \times (\pi/2 - \alpha)$ (α – угол, под которым элемент тока виден из точки A , одинаковый для всех элементов тока). Из симметрии расположения векторов $d\vec{B}$ относительно оси OX очевидно, что суммирование даст результирующий вектор, направленный вдоль оси OX . Остается найти лишь

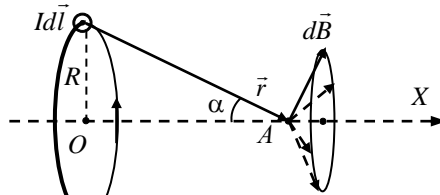


Рис. 10.4

сумму проекций векторов $d\vec{B}$ на это направление.

$$B = \int dB_x = \frac{\mu_0 IR}{4\pi r^3} \int dl = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2\pi R^2 I}{(R^2 + x^2)^{3/2}}. \quad (10.9)$$

Окончательно получаем:
$$B = \frac{\mu_0}{2} \frac{R^2 I}{(R^2 + x^2)^{3/2}} = 11,2 \text{ мкТл.}$$

Полезно записать результат (10.9) для вектора \vec{B} также через **магнитный момент** кругового витка с током \vec{p}_m ($p_m = SI = \pi R^2 \cdot I$):

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2\vec{p}_m}{(R^2 + x^2)^{3/2}}. \quad (10.10)$$

На большом расстоянии от витка ($x \gg R$)

$$B = \frac{\mu_0}{2} \frac{IR^2}{x^3}. \quad (10.11)$$

или в векторной форме:
$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2\vec{p}_m}{x^3}. \quad (10.12)$$

Обратим внимание на то, что индукция магнитного поля витка убывает обратно пропорционально **кубу** расстояния x от него (аналогично электрическому полю диполя).

В центре витка $x = 0$, поэтому из (10.9) следует:

$$B = \frac{\mu_0}{2} \frac{I}{R} = 125,6 \text{ мкТл.} \quad (10.13)$$

Рассмотренный на приведенных выше примерах способ нахождения индукции магнитного поля токов обладает большой общностью, но сопряжен, зачастую, с весьма кропотливыми математическими процедурами. В ряде частных случаев, характеризующихся определенной симметрией, искомый результат можно получить, применяя **теорему о циркуляции вектора \vec{B}** .

Циркуляция вектора магнитной индукции \vec{B} по любому замкнутому контуру "С" пропорциональна алгебраической сумме токов, пронизывающих поверхность, ограниченную этим контуром:

$$\oint_{\text{"С"}} (\vec{B}, d\vec{l}) = \mu_0 \sum_i I_i. \quad (10.14)$$

В приведенной аналитической записи утверждения теоремы коэффициент пропорциональности имеет вид, соответствующий системе единиц СИ. В том случае, когда через поверхность " Σ ", ограниченную контуром "С" протекают распределенные токи, в правой части вместо суммы следует записать интеграл вида:

$$\int_{\text{"Σ"}} (\vec{j}, d\vec{S}),$$

где \vec{j} – плотность тока, а интеграл берется по всей поверхности, ограниченной контуром “С”.

Использование теоремы о циркуляции вектора \vec{B} для нахождения магнитного поля проводников с током возможно лишь в тех случаях, когда за счёт выбора формы контура “С” интеграл в (10.14) можно свести к произведению модуля вектора \vec{B} на длину контура или отдельных его частей. Проиллюстрируем это на рассмотренном ранее примере прямого проводника с током. Если проводник бесконечен, то ввиду осевой (цилиндрической) симметрии, в любой плоскости, перпендикулярной проводнику, линии поля могут быть либо радиальными, либо представлять собой окружности с центрами на нём (а и б на рис. 10.5 соответственно). С

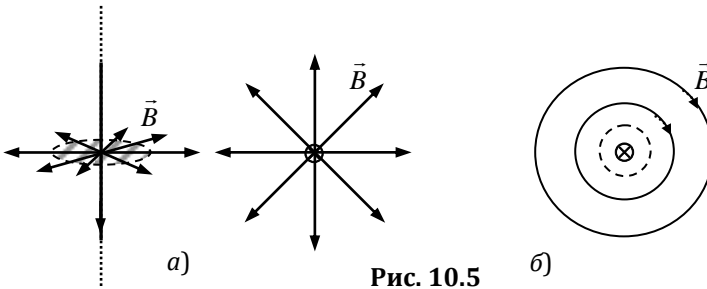


Рис. 10.5

учётom свойств магнитного поля физически приемлемой является только вторая картина линий индукции, т.к. мы знаем, что магнитных зарядов в природе не существует и линии \vec{B} всегда замкнуты. Очевидно,

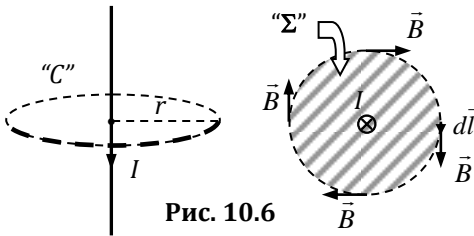


Рис. 10.6

что модуль вектора \vec{B} зависит только от расстояния до проводника и постоянен на окружности радиуса r . Если в качестве контура интегрирования выбрать линию поля

(контур «С» на рис. 10.6), то векторы \vec{B} и $d\vec{l}$ на любом её участке сонаправлены. С учётом этого:

$$\oint_C (\vec{B}, d\vec{l}) = \oint_C B(r) dl = B(r) \oint_C dl = B(r) \cdot 2\pi r .$$

Здесь учтено, что оставшийся интеграл, равен по определению

длине контура “С”, т.е. длине окружности $2\pi r$. В соответствии с теоремой о циркуляции вектора \vec{B} :

$$B(r) \cdot 2\pi r = \mu_0 I, \quad \text{и} \quad B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \quad *). \quad (10.15)$$

Применим данный способ нахождения магнитного поля к несколько более сложному случаю.

10.4. По прямому цилиндрическому проводу, радиус сечения которого R , течёт постоянный ток плотности \vec{j} . Найти индукцию магнитного поля как вне, так и внутри этого провода. Влиянием магнитной проницаемости вещества провода пренебречь.

Решение

Отметим, прежде всего, что закон изменения индукции с расстоянием, вероятно, различен для области пространства вне и внутри проводника. Применим теорему о циркуляции дважды, выбрав соответствующие контуры – окружности с радиусом r большим и меньшим, чем радиус R цилиндрического проводника с током соответственно.

Повторяя рассуждения аналогичные приведённым в предыдущем примере, определим значение циркуляции магнитного поля для обоих контуров – $B \cdot 2\pi r$. Отличаться будут лишь выражения в правой части равенства (10.14), соответствующего теореме о циркуляции:

$\mu_0 \cdot j \cdot \pi R^2$ – для поля вне проводника, и

$\mu_0 \cdot j \cdot \pi r^2$ – для поля внутри проводника.

При этом учтено, что плотность тока отлична от нуля и постоянна (\vec{j}) только в пределах проводника радиуса R (поверхности Σ_1 на рис. 10.7).

Соответствующие результаты для магнитного поля можно записать в виде:

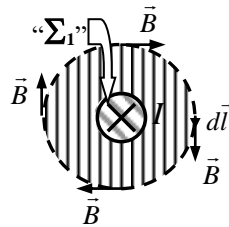


Рис. 10.7

*) Результат совпадает с полученным ранее в задаче 10.1, с той разницей, что расстояние от проводника обозначалось в ней “ R ”.

$$B(r) = \frac{\mu_0 j R^2}{2r} \quad \text{— вне проводника, и}$$

$$B(r) = \frac{\mu_0 j}{2} r \quad \text{— внутри проводника.}$$

На рис. 10.8 показано распределение магнитного поля в радиальном по отношению к оси проводника направлении.

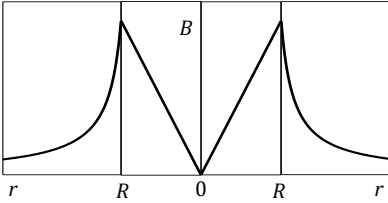


Рис. 10.8

Ясно, что направление магнитного поля в любой точке пространства определяется правилом правого винта. Однако, приведём также и векторную форму записи для магнитной индукции поля, существующего вокруг и внутри проводника в точках, положение которых относительно оси провода

определяется радиус-вектором \vec{r} :

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0 [\vec{j}, \vec{r}] R^2}{2r^2} \quad \text{— вне проводника, и}$$

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0 [\vec{j}, \vec{r}]}{2} \quad \text{— внутри проводника.}$$

Эти результаты помогут при решении более сложных задач (например, 10.20).

Найдём поле соленоида – длинной катушки с током.

10.5. Однослойный соленоид имеет длину $l = 0,5$ м и число витков $N = 1000$. Найти индукцию магнитного поля в центре соленоида, если сила тока в обмотке равна $I = 1$ А.

Решение

Прежде чем применять рассмотренный выше подход (теорему о циркуляции) сделаем некоторые заключения о структуре поля соленоида. Катушка состоит из большого количества одинаковых витков с током, каждый из которых дает свой вклад в результирующее магнитное поле. При этом для каждого витка найдется симметрично ему расположенный по отношению к плоскости, перпендикулярной к оси катушки (O_1O_2 , см. рис. 10.9). Сумма векторов индукции от симметричных витков в любой точке этой плоскости дает вектор параллельный оси соленоида. Итак,

направление векторов может быть только параллельным оси катушки как вне, так и внутри неё.

Выберем теперь контур 1–2–3–4 для применения теоремы о циркуляции в виде прямоугольника, две стороны которого располагаются вдоль оси катушки, а две другие – перпендикулярно. Одна из сторон 1–2 при этом расположена внутри катушки, а противоположная 3–4 – вне.

Циркуляция вектора \vec{B} складывается из интегралов:

$$\oint_{\text{"с"}} (\vec{B}, d\vec{l}) = \int_{(1)}^{(2)} (\vec{B}, d\vec{l}) + \int_{(2)}^{(3)} (\vec{B}, d\vec{l}) + \int_{(3)}^{(4)} (\vec{B}, d\vec{l}) + \int_{(4)}^{(1)} (\vec{B}, d\vec{l}). \quad (10.15)$$

Второе и четвёртое слагаемое равны нулю, так как на любом участке сторон контура 2–3 и 4–1 векторы $d\vec{B}$ и $d\vec{l}$ взаимно-перпендикулярны. Участок 3–4 может быть выбран на любом расстоянии от оси соленоида, в частности на очень большом, где магнитное поле пренебрежимо мало (вспомним закон убывания индукции поля с расстоянием по закону БСЛ). Поэтому выражение для циркуляции практически полностью определяется индукцией поля внутри соленоида. Остаётся приравнять его сумме сил токов, пронизывающих контур с коэффициентом μ_0 :

$$Bl = \mu_0 \cdot \sum_i I_i, \quad Bl = \mu_0 \cdot N \cdot I, \quad N = nl,$$

где n – число витков на единицу длины соленоида. Отсюда получаем, что индукция поля **внутри** соленоида равна:

$$B = \mu_0 \cdot nI^*). \quad (10.16)$$

И с учётом численных данных задачи:

$$B = \mu_0 \frac{N}{l} \cdot I \approx 2,5 \text{ мТл.}$$

Независимость циркуляции от расположения внешнего участка контура (3–4) говорит также о том, что магнитное поле вне соленоида очень мало. Практически все поле сосредоточено **внутри катушки и однородно**. Заметим, что в этом смысле со-

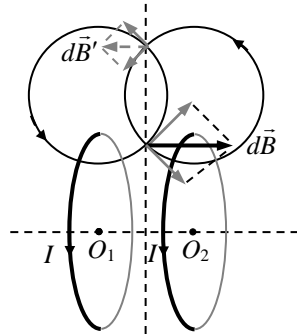


Рис. 10.9

*) Если соленоид заполнен однородным изотропным веществом, то индукция возрастает в μ раз, где μ – магнитная проницаемость этого вещества.

леноид аналогичен конденсатору, почти всё электрическое поле которого сосредоточено между обкладками.

Задачи для самостоятельного решения

10.6. Два прямолинейных бесконечно длинных проводника расположены перпендикулярно друг к другу и находятся в одной плоскости (см. рис. 10.10). Найти индукцию магнитного поля \vec{B} (модуль и направление) в точках M_1 и M_2 , если $I_1 = 2\text{ А}$, $I_2 = 3\text{ А}$. Расстояния $r_1 = NM_1 = NM_2 = 1\text{ см}$. $r_2 = DM_1 = CM_2 = 2\text{ см}$.

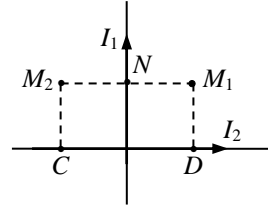


Рис. 10.10

10.7. Два прямолинейных длинных проводника расположены параллельно на расстоянии $l = 5\text{ см}$ друг от друга. По проводникам текут токи силой $I_1 = I_2 = I = 10\text{ А}$ в **противоположных** направлениях. Найти величину и **направление** индукции магнитного поля \vec{B} в точке, находящейся на расстоянии $R = 5\text{ см}$ от каждого из проводников.

10.8. По двум прямолинейным параллельным длинным проводникам, расстояние между которыми $l = 20\text{ см}$ текут токи силой $I_1 = 40\text{ А}$ и $I_2 = 80\text{ А}$ в **одном** направлении. Найти величину и направление индукции магнитного поля \vec{B} в точке, находящейся на расстоянии $r_1 = 12\text{ см}$ от первого проводника и от второго – на расстоянии $r_2 = 16\text{ см}$.

10.9. Два прямолинейных длинных проводника расположены параллельно на расстоянии $l = 15\text{ см}$ друг от друга. По проводникам текут токи силой $I_1 = 70\text{ А}$ и $I_2 = 50\text{ А}$ в **противоположных** направлениях. Найти модуль вектора магнитной индукции поля B в точке, находящейся на расстоянии $r_1 = 20\text{ см}$ от первого и $r_2 = 30\text{ см}$ от второго проводника.

10.10. Два прямолинейных длинных провода с токами силой $I_1 = 80\text{ А}$ и $I_2 = 60\text{ А}$ скрещены под прямым углом (см. рис. 10.11). Расстояние между проводами равно $r = 10\text{ см}$.

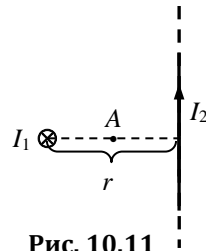


Рис. 10.11

Найти индукцию магнитного поля \vec{B} (модуль и направление) в точке A , лежащей на общем перпендикуляре к проводникам на одинаковом расстоянии от обоих.

10.11. Из проволоки длиной $L = 1$ м сделана квадратная рамка. По этой рамке течёт ток силой $I = 10$ А. Найти индукцию магнитного поля \vec{B} в центре рамки.

10.12. Определить индукцию магнитного поля \vec{B} в точке O , если проводник с током силой I имеет вид, показанный на рис. 10.12. Радиус изогнутой части проводника равен R , прямолинейные участки проводника предполагаются очень длинными.

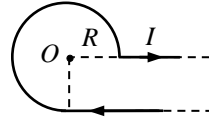


Рис. 10.12

10.13. Ток силы $I = 2$ А течёт по плоскому контуру, изображенному на рис. 10.13. Угол между прямолинейными участками контура прямой. Радиусы имеют значения: $r_1 = 10$ см, $r_2 = 20$ см. Найти магнитную индукцию \vec{B} в точке O .

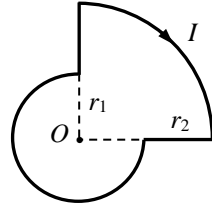


Рис. 10.13

10.14. Найти индукцию магнитного поля \vec{B} в точке O контура с током силой I , который показан на рис. 10.14. Радиус R и сторона a известны.

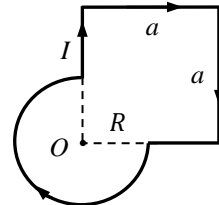


Рис. 10.14

10.15. Ток силы $I = 5$ А циркулирует в контуре, имеющем форму равнобокой трапеции (рис. 10.15). Отношение оснований трапеции $k = 2$. Найти магнитную индукцию \vec{B} в точке A , лежащей в плоскости трапеции. Меньшее основание трапеции $a = 10$ см, расстояние $b = 5$ см.

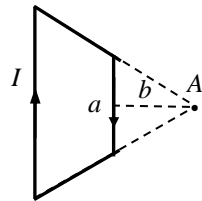


Рис. 10.15

10.16. По проволоке, согнутой в виде правильного n -угольника, вписанного в окружность радиуса R , пропускается ток силы I . Найти магнитную индукцию \vec{B} в центре многоугольника. Исследовать полученный результат для случая $n \rightarrow \infty$.

10.17. Ток силой $I = 5 \text{ A}$ течёт по замкнутому проводнику, показанному на рис. 10.16. Радиус изогнутой части $R = 120 \text{ мм}$, угол $2\varphi = 90^\circ$. Найти магнитную индукцию \vec{B} в точке O .

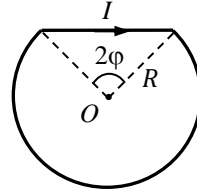


Рис. 10.16

10.18. Электрон движется прямолинейно с постоянной скоростью $v = 0,3 \cdot 10^6 \text{ м/с}$. Определить магнитную индукцию \vec{B} поля, создаваемого электроном в точке, находящейся на расстоянии $r = 4 \text{ нм}$ от электрона и лежащей на прямой, проходящей через мгновенное положение электрона и составляющей угол $\alpha = 30^\circ$ со скоростью движения электрона.

10.19*. Согласно теории Бора, электрон в атоме водорода движется вокруг ядра по круговой орбите радиусом $r = 5,3 \cdot 10^{-11} \text{ м}$ ($0,53 \text{ \AA}$). Определить магнитную индукцию \vec{B} поля, создаваемого электроном в центре орбиты.

10.20*. Внутри прямого провода круглого сечения имеется круглая цилиндрическая полость, ось которой параллельна оси провода. Смещение оси полости относительно оси провода определяется вектором \vec{a} . По проводу течет ток одинаковой по всему сечению плотности \vec{j} . Найти индукцию магнитного поля \vec{B} внутри полости.

§11. Сила Ампера. Сила Лоренца

• Сила Ампера

Действие магнитного поля на проводники с токами определяется законом для силы Ампера:

$$d\vec{F} = I[d\vec{l}, \vec{B}] \quad (11.1)$$

здесь $d\vec{F}$ – сила, действующая на элемент тока $I d\vec{l}$ со стороны магнитного поля с индукцией \vec{B} в том месте, где располагается участок проводника $d\vec{l}$. Направление этой силы определяется по правилу левой руки. Полная сила, действующая на проводник с током конечной длины, вычисляется суммированием (интегрированием) элементарных воздействий.

- **Сила Лоренца**

Движущийся электрический заряд q также представляет собой “элемент тока”. Магнитное поле действует на него с силой, получившей название силы Лоренца:

$$\vec{F}_{\text{Л}} = q[\vec{V}, \vec{B}], \quad (11.2)$$

где \vec{V} – скорость движения заряда. Часто обобщённой силой Лоренца называют силу, действующую на заряженную частицу в электрическом и магнитном полях:

$$\vec{F}_{\text{Л}}^* = q\vec{E} + q[\vec{V}, \vec{B}]. \quad (11.3)$$

Проиллюстрируем применение законов взаимодействия электромагнитного поля с токами и заряженными частицами на примерах.

Задача

11.1. В одной плоскости с длинным прямым проводом, по которому течёт ток силой $I_1 = 6 \text{ A}$, расположена квадратная рамка так, что две её стороны параллельны проводу, а расстояние от провода до ближайшей из этих сторон равно её длине $a = 0,5 \text{ м}$ – см. рис. 11.1. По рамке течёт ток силой $I_2 = 1 \text{ A}$. Какую работу нужно совершить, чтобы переместить рамку параллельно самой себе вправо на расстояние $l = 40 \text{ см}$?

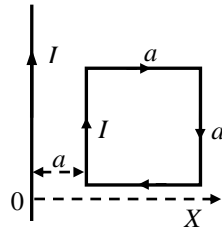


Рис. 11.1

Решение

На каждую сторону квадратной рамки будет действовать сила Ампера со стороны магнитного поля, порождённого током, текущим по прямолинейному проводнику. Нетрудно определить (по правилу «левой руки»), однако, что на стороны рамки, перпендикулярные проводнику действуют силы, которые равны и противоположно направлены. Сила притяжения, действующая на ближнюю к проводнику сторону рамки больше силы отталкивания, действующей на дальнюю сторону. Для нахождения этих сил достаточно, используя значение модуля индукции магнитного поля длинного прямолинейного проводника с током (стр. 108, равенство 10.7) и применить закон для силы Ампера (11.1)

$$B(r) = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi r}, \quad F(x) = \frac{\mu_0 I_1 I_2 a}{2\pi x}.$$

Напомним, что работа в неоднородном силовом поле $A_{12} = \int_{(1)}^{(2)} (\vec{F}, d\vec{l})$ (см. 4.2). Поскольку в нашем случае рамку перемещают

вдоль оси X , искомая работа $A = \int_{(1)}^{(2)} F(x)dx$, и равна алгебраической сумме работ сил притяжения и отталкивания:

$$A = \frac{\mu_0 I_1 I_2 a}{2\pi} \left(\int_a^{a+l} \frac{dx}{x} - \int_{2a}^{2a+l} \frac{dx}{x} \right) = \frac{\mu_0 a I_1 I_2}{2\pi} \left[\ln\left(\frac{a+l}{a}\right) - \ln\left(\frac{2a+l}{2a}\right) \right].$$

Окончательно получаем:
$$A = \frac{\mu_0 a I_1 I_2}{2\pi} \ln\left(\frac{a+l}{a+l/2}\right).$$

11.2. Протоны движутся в однородном магнитном поле циклотрона по дуге окружности радиусом $R = 10$ м. При этом модуль индукции $B = 2$ Тл и поле направлено перпендикулярно плоскости движения частиц. Пучок протонов попадает на заземлённую мишень. Найти силу тока в пучке, если тепловая мощность, выделяющаяся в мишени, составляет $P = 2$ Вт. Отношение заряда протона к его массе равно $e/m = 10^8$ Кл/кг.

Решение

Протоны движутся по окружности под действием со стороны магнитного поля силы Лоренца, сообщающей каждой частице центростремительное ускорение. По 2-му закону Ньютона:

$$m \cdot \frac{v^2}{R} = qvB. \tag{1}$$

Кинетическая энергия протона равна

$$T = \frac{mv^2}{2}. \tag{2}$$

Вся эта энергия при неупругом ударе о мишень превращается в тепло. Поэтому тепловая мощность, выделяющаяся в мишени, может быть посчитана следующим образом:

$$P = T \cdot n, \tag{3}$$

где n – число протонов, попадающих на мишень в единицу времени. Исходя из определения силы тока, запишем:

$$I = nq. \tag{4}$$

Из равенств (2) и (3) получаем $n = \frac{2P}{mv^2}$ и, используя равенства (1) и (4), окончательно находим:

$$I = \frac{2P}{mv^2} q = \frac{2P}{m} \cdot \frac{m^2}{q^2 B^2 R^2} = \frac{2P}{B^2 R^2 (e/m)} = 1 \cdot 10^{-10} \text{ А.}$$

11.3. Вдоль линий индукции однородного магнитного поля из одной точки вылетают электроны со скоростью \vec{V} , имея малый угловой разброс δ . Определите, на каком расстоянии от места вылета пучок будет иметь минимальный поперечный размер. Индукция магнитного поля \vec{B} . Масса электрона m_e , его заряд $-e$.

Решение

Электрон, скорость которого образует угол δ с направлением магнитного поля \vec{B} , движется по винтовой линии. Разложим вектор скорости электрона на две составляющие: направленную вдоль линий магнитной индукции $V_{\parallel} = V \cos \delta \approx V$ и перпендикулярную к ним $V_{\perp} = V \sin \delta \approx V \delta$ (см. рис. 11.2). Период движения электрона по спирали T – время прохождения одного витка определяется из уравнения движения с учётом выражения для силы Лоренца:

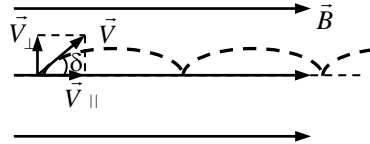


Рис. 11.2

$$m_e \cdot \frac{V_{\perp}^2}{R} = eV_{\perp}B, \quad T = \frac{2\pi R}{V_{\perp}}, \quad \Rightarrow \quad T = \frac{2\pi m_e}{eB}.$$

Как видим, период не зависит ни от скорости электрона V , ни от радиуса витка R . Шаг винтовой линии, напротив, определяется скоростью V_{\parallel} :

$$L = V_{\parallel} T \approx \frac{2\pi m_e}{eB} \cdot V.$$

Пройдя именно это расстояние, слабо расходящийся из одной точки пучок электронов, сфокусируется практически в одной точке.

• **Виток с током в магнитном поле**

Если в однородное магнитное поле поместить виток с током, характеризующийся магнитным моментом \vec{p}_m , то на него будет действовать вращающий момент сил:

$$\vec{N} = [\vec{p}_m, \vec{B}], \quad N = p_m \cdot B \cdot \sin \alpha, \quad (11.2)$$

где α – угол между векторами \vec{p}_m и \vec{B} . Элементарная работа при повороте витка равна при этом $dA = N \cdot d\alpha = p_m \cdot B \cdot \sin \alpha \cdot d\alpha$. Этому соответствует потенциальная энергия взаимодействия витка тока с магнитным полем $W_m = \int dA = -p_m B \cos \alpha$.

В неоднородном поле виток испытывает, кроме того, втягивающее или выталкивающее воздействие со стороны магнитного поля, в зависимости от первоначальной ориентации векторов \vec{p}_m и \vec{B} . Сила этого взаимодействия может быть получена, исходя из общей взаимосвязи силы и потенциальной энергии:

$$\vec{F} = -\text{grad}W_m, \text{ например } F_x = p_m \frac{\partial B}{\partial x}. \quad (11.4)$$

Определим силу взаимодействия двух катушек (соленоидов), расположенных на одной оси на некотором расстоянии друг от друга, существенно превышающем их собственные размеры.

11.4. Две одинаковые катушки радиусом $R = 20$ мм содержат по $N = 100$ витков. Оси катушек лежат на одной прямой. Найти силу взаимодействия катушек, если по ним протекает ток с одинаковой силой $I = 2$ А, а расстояние между катушками $l = 0,5$ м значительно превышает их размеры.

Решение

Определим, прежде всего, модули магнитных моментов обеих катушек $p_{m1} = p_{m2} = p_m = N \cdot \pi R^2 \cdot I$.

Найдем силу, действующую на одну из катушек со стороны *неоднородного* поля другой катушки. В условиях данной задачи для определения индукции этого поля на оси катушки можно воспользоваться ранее для одиночного витка значением индукции магнитного поля (10.12):

$$B = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2p_m}{x^3}.$$

Используя соотношение (11.4), получаем:

$$F_x = p_m \frac{\partial B}{\partial x} = -p_m \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{6p_m}{x^4} = -\frac{3\mu_0}{2\pi} \frac{p_m^2}{l^4} =$$

$$= -\frac{3\mu_0\pi}{2} \frac{(N \cdot R^2 \cdot I)^2}{l^4} = -0,2 \text{ мкН.}$$

Задачи для самостоятельного решения

11.5. Укреплённую на одном коромысле весов небольшую катушку K с числом витков $N = 100$ поместили внутрь соленоида (см. рис. 11.3) Площадь сечения катушки $S = 1 \text{ см}^2$, длина плеча коромысла $l = 20 \text{ см}$. В отсутствие тока в катушке весы уравновешены. После того как через катушку пустили ток $I = 50 \text{ мА}$, для восстановления равновесия пришлось изменить груз на чаше весов на $\Delta m = 50 \text{ мг}$. Найти индукцию магнитного поля в месте нахождения катушки.

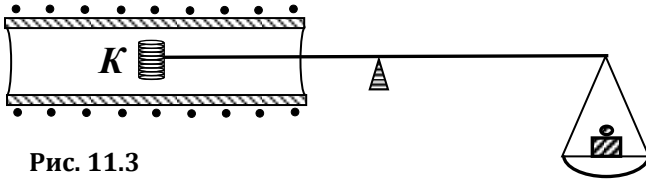


Рис. 11.3

11.6. Определить силу, приходящуюся на единицу длины, с которой взаимодействуют в вакууме два параллельных очень длинных проводника с током силой $I_1 = I_2 = 1 \text{ А}$. Расстояние между проводниками равно $a = 1 \text{ м}$.

11.7. Какая сила приходится на единицу длины в точке O тонкого провода с током $I = 4 \text{ А}$, показанного на рис. 11.4. Радиус закругления равен $R = 20 \text{ см}$.

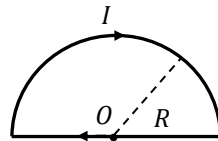


Рис. 11.4

11.8. Контур из провода, изогнутого в форме квадрата со стороной $a = 0,5 \text{ м}$, расположен в одной плоскости с очень длинным прямым проводом с током силой $I_1 = 6 \text{ А}$ так, что две его стороны параллельны проводу (см. рис. к задаче 11.1). Сила тока в контуре $I_2 = 1 \text{ А}$. Определить силу, действующую на контур, если ближайшая к проводу сторона контура

находится на расстоянии $b = 10$ см. Направления токов указаны на рисунке.

11.9. По двум контактными шинам, установленным под углом $\alpha = 30^\circ$ к горизонту, может скользить медный брусок массы $m = 0,5$ кг (см. рис. 11.5). В окружающем шины пространстве создано однородное магнитное поле с индукцией $B = 1,5$ Тл, перпендикулярное к плоскости шин. Если по бруску пропускать ток с силой $I = 8$ А, то он скользит по шинам вверх с постоянной скоростью. С каким ускорением брусок соскальзывает вниз в отсутствии тока? Расстояние между шинами равно $l = 20$ см.

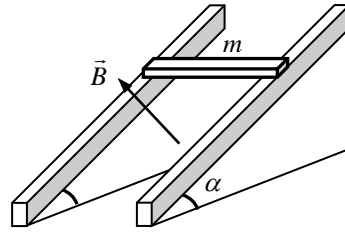


Рис. 11.5

11.10. Для измерения горизонтальной составляющей индукции магнитного поля Земли B_H можно использовать электронно-лучевую трубку осциллографа (ЭЛТ). В опыте измеряется смещение электронного луча на экране осциллографа от центра по вертикали h , если ориентировать трубку перпендикулярно земному меридиану. В качестве известных параметров установки можно считать ускоряющее напряжение u и расстояние от электронной пушки ЭЛТ до экрана l . Определить по этим данным B_H .

11.11. Катушка из проволоки поставлена на горизонтальной плоскости так, что её ось вертикальна. Система находится в однородном горизонтальном магнитном поле с индукцией B . Масса катушки m , число витков N , радиус R . Какой силы ток следует пропустить по катушке, чтобы она опрокинулась?

11.12. Электрон со скоростью $V = 10^7$ м/с влетает в область однородного магнитного поля с модулем индукции $B = 10^{-3}$ Тл. Скорость перпендикулярна линиям индукции поля и направлена под углом $\alpha = 30^\circ$ к плоской границе поля (см. рис. 11.6). Определите максимальную глубину h проникновения электрона в область магнитного поля. От-

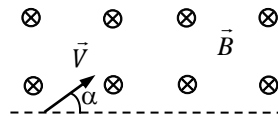


Рис. 11.6

ношение заряда электрона к его массе равно $\gamma = 1,76 \cdot 10^{11}$ Кл/кг.

11.13*. Граница двух магнитных полей с индукциями B_1 и B_2 – плоскость. Электрон влетает перпендикулярно границе со скоростью V (рис. 11.7) и движется сначала в поле 2, затем в поле 1, потом снова в поле 2 и т.д. Определить среднюю скорость дрейфа электрона вдоль границы за большой промежуток времени.

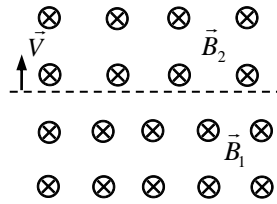


Рис. 11.7

11.14. Протон движется по окружности в однородном магнитном поле с индукцией $B = 0,5 \cdot 10^{-5}$ Тл в плоскости, перпендикулярной к силовым линиям. Чему равен период T такого движения? Масса протона $m_p = 1,67 \cdot 10^{-27}$ кг, его заряд $e = 1,6 \cdot 10^{-19}$ Кл.

11.15. Однозарядные ионы аргона разгоняются в электрическом поле ускоряющим напряжением $u = 1000$ В и затем попадают в перпендикулярное их скорости магнитное поле с индукцией $B = 1$ Тл, где разделяются на два пучка. Первому соответствует окружность радиуса $R_1 = 27,4$ мм, второму – радиуса $R_2 = 28,9$ мм. Определить относительные массы этих изотопов.

11.16*. Поток проводящей жидкости (расплавленный металл) течёт по керамической трубе. Для определения скорости течения жидкости трубу помещают в однородное магнитное поле, перпендикулярное оси трубы, в трубе закрепляют два электрода, образующих плоский конденсатор, и измеряют разность потенциалов между электродами. Найдите скорость потока v , если модуль магнитной индукции поля $B = 0,01$ Тл, расстояние между электродами $d = 2$ см, а измеренная разность потенциалов оказалась равной $u = 0,4$ мВ.

11.17*. Два электрона движутся параллельно друг другу с одинаковой скоростью $v = 300$ км/с. Найти отношение сил электрического и магнитного взаимодействия этих электронов.

11.18*. В результате эффекта Холла в натриевом проводнике при плотности тока $j = 150$ А/см² и магнитной индукции $B = 2$ Тл

появляется поперечное электрическое поле с напряжённостью $E = 0,75 \text{ мВ/м}$. Определить по этим данным концентрации электронов проводимости, а также её отношение к концентрации атомов в этом проводнике. Плотность натрия $\rho = 0,97 \text{ г/см}^3$.

11.19*. Определить постоянную Холла для натрия, если для него отношение концентрации электронов проводимости к концентрации атомов составляет 0,984. Плотность натрия $\rho = 0,97 \text{ г/см}^3$.

11.20*. Известно, что постоянная Холла для меди больше, чем для алюминия в $k = 1,8$ раза. Во сколько раз число свободных электронов приходящихся в среднем на один атом у алюминия больше, чем у меди. Плотности меди и алюминия соответственно равны $\rho_{Cu} = 8,93$ и $\rho_{Al} = 2,7 \text{ г/см}^3$.

11.21*. Через сечение медной пластинки толщиной $a = 0,2 \text{ мм}$ пропускается ток силой $I = 6 \text{ А}$. Пластинка помещается в однородное магнитное поле с индукцией $B = 1 \text{ Тл}$, перпендикулярное ребру пластинки и направлению тока. Считая концентрацию электронов проводимости равной концентрации атомов, определить возникающую в пластинке поперечную (холловскую) разность потенциалов. Плотность меди $\rho = 8,93 \text{ г/см}^3$, а его атомная масса $M = 64 \cdot 10^{-3} \text{ кг/моль}$.

§12. Электромагнитная индукция

Явление электромагнитной индукции (ЭМИ) состоит в возникновении электрического тока в проводящем контуре при изменении магнитного потока через поверхность, ограниченную этим контуром*). Закон электромагнитной индукции устанавливает, что ЭДС индукции пропорциональна**) скорости изменения этого магнитного потока (закон Фарадея):

$$\mathcal{E}_{ind} = -\frac{d\Phi}{dt}. \quad (12.1)$$

Знак минус соответствует договоренности обозначать направление индукционного тока, определяемое по правилу Ленца: **индукционный ток направлен так, чтобы его магнит-**

*) Здесь идёт речь о трактовке явления электромагнитной индукции М. Фарадеем.

**) Коэффициент пропорциональности в законе зависит от выбора системы единиц. В системе СИ его полагают равным 1.

ное поле препятствовало изменению магнитного потока. ЭДС считается положительной, если направление индукционного тока составляет с вектором положительной нормали к контуру правовинтовую систему.

Напомним, что магнитным потоком через поверхность " Σ " называется величина

$$\Phi = \int_{\Sigma} (\vec{B}, d\vec{S}). \quad (12.2)$$

Приведём простой пример применения закона ЭМИ.

Задача

12.1. Круговой контур (пробный виток) радиусом $r = 2$ см помещён в однородное магнитное поле, модуль индукции которого $B = 0,2$ Тл. Плоскость контура перпендикулярна направлению магнитного поля, сопротивление контура $R = 1$ Ом. Какой заряд протечёт через контур при его повороте на угол 90° ?

Решение

До поворота контура поверхность, ограниченную контуром, пронизывает магнитный поток, равный $\Phi = BS$. Мгновенное значение ЭДС в процессе поворота контура (исчезновения магнитного потока) определяется равенством (12.1). Тогда, согласно закону Ома, мгновенное значение силы тока в контуре равно

$$I(t) = -\frac{1}{R} \frac{d\Phi}{dt}.$$

Заряд, протекший через контур при повороте его на угол 90° , т.е. в результате полного исчезновения магнитного потока – его изменения на Φ , равен

$$q = \int_0^{\tau} I(t) dt = -\frac{1}{R} \int_{\Phi}^0 d\Phi = \frac{\Phi}{R}. \quad *) \quad (12.3)$$

Итак, окончательно:

$$q = \frac{BS}{R} = \frac{\pi r^2}{R} B \approx 0,25 \text{ мКл.}$$

Обратим внимание на то, что результат совершенно не зависит ни от времени поворота τ , ни от степени равномерности этого процесса.

*) Именно в такой форме закон ЭМИ был впервые записан М. Фарадеем в 1831 г.

Задача

12.2. В однородном магнитном поле с индукцией $B = 0,1 \text{ Тл}$ расположены *вертикально* на расстоянии $l = 30 \text{ см}$ два металлических прута, замкнутых наверху. Поле перпендикулярно плоскости системы. По прутьям без трения и без нарушения контакта может скользить перемычка массой $m = 5 \text{ г}$ и сопротивлением $R = 9,2 \text{ мОм}$. Перемычку сначала удерживают в покое, а затем отпускают. Как будет меняться скорость перемычки $v(t)$, и какова её установившаяся скорость $v_{уст}$?

Решение

Будем пренебрегать сопротивлением прутьев и скользящих контактов, а также самоиндукцией контура. Под действием силы тяжести перемычка начнёт скользить вниз. Магнитный поток, пронизывающий контур, образованный перемычкой и П-образными «рельсами», очевидно, будет при этом нарастать (см. рис. 12.1). Собственное магнитное поле возникающего в контуре индукционного тока, по правилу Ленца, препятствует нарастанию внешнего магнитного потока, т.е. направлено навстречу полю \vec{B} . Направление тока находим по правилу правого винта (буравчика) – против часовой стрелки. На перемычку, по которой протекает ток, действует сила Ампера (см. гл. 11).

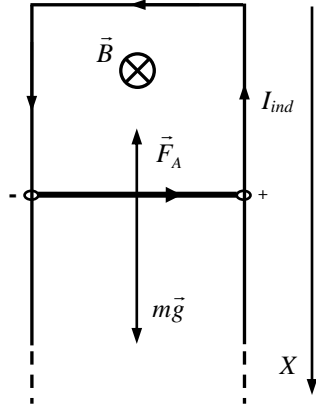


Рис. 12.1

По правилу «левой руки» находим, что эта сила направлена вертикально вверх и тормозит падение перемычки. Качественно ясно, что ускорение перемычки при этом постепенно уменьшается, а её скорость через некоторое время перестаёт расти. Найдём закон изменения скорости перемычки $v(t)$. Запишем для этого уравнение её движения в проекции на ось X , а также очевидные соотношения для силы Ампера и ЭДС индукции:

$$m \frac{dv}{dt} = mg - F_A, \tag{1}$$

$$F_A = \frac{\mathcal{E}_i}{R} Bl, \quad (2)$$

$$|\mathcal{E}_{ind}| = \left| \frac{d\Phi}{dt} \right| = Bl \frac{dS}{dt} = Bvl. \quad (3)$$

Подставляя соответствующие выражения в уравнение движения перемиčky, получаем:

$$m \frac{dv}{dt} = mg - \frac{Bvl}{R} Bl.$$

Остаётся привести полученное дифференциальное уравнение относительно искомой функции $v(t)$ к виду, удобному для интегрирования, используя стандартный приём замены переменной:

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{B^2 l^2}{mR} \left(v - \frac{mgR}{B^2 l^2} \right),$$

$$u = v - \frac{mgR}{B^2 l^2}, \quad \frac{du}{dt} = -\frac{B^2 l^2}{mR} u, \quad \frac{du}{u} = -\frac{B^2 l^2}{mR} dt,$$

$$\ln u = -\frac{B^2 l^2}{mR} t + C_1, \quad u(t) = C \cdot e^{-\frac{B^2 l^2}{mR} t},$$

$$v(t) = \frac{mgR}{B^2 l^2} + C \cdot e^{-\frac{B^2 l^2}{mR} t},$$

Подстановка начального условия задачи $v(0) = 0$ позволяет определить константу интегрирования $C = -\frac{mgR}{B^2 l^2}$, и записать окончательно:

$$v(t) = \frac{mgR}{B^2 l^2} \left(1 - e^{-\frac{B^2 l^2}{mR} t} \right) = v_{ycm} \cdot \left(1 - e^{-\frac{B^2 l^2}{mR} t} \right).$$

Установившаяся скорость движения перемиčky равна

$$v_{ycm} = \frac{mgR}{B^2 l^2} = 0,5 \text{ м/с.}$$

Задачи для самостоятельного решения

12.3. Проволочная квадратная рамка со стороной a и с сопротивлением R (рис. 12.2) находится в однородном магнитном поле \vec{B} , направленном перпендикулярно к плоскости рамки за чертёж. В каком направлении будет

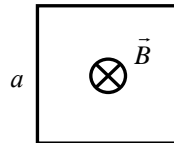


Рис. 12.2

протекать по рамке индукционный ток

- а) при увеличении индукции поля;
- б) при её уменьшении;
- в) какой заряд q протечёт по рамке при выключении поля?

12.4. Сквозь горизонтально расположенное проводящее кольцо падают с одинаковой высоты алюминиевый брусок и магнит. Что упадет первым? Дайте объяснение.

12.5. В знаменитом опыте Ньютона пробка, дробинка и перышко одинаково падают в отсутствии силы сопротивления воздуха – внутри вакуумированной стеклянной трубки. Как изменятся результаты эксперимента, если дробинку заменить на небольшой намагниченный шарик, а откачанную трубку сделать металлической и достаточно длинной. Считать, что шарик падает вертикально по оси трубки. Опишите и *объясните* характер движения шарика. Сравните с видом решения задачи 2.2.

12.6. На вертикально расположенном сердечнике электромагнита лежит монета. При подключении обмотки электромагнита к источнику постоянного напряжения монета подскакивает вверх. Объясните этот эффект.

12.7. На разомкнутый магнитопровод сетевого трансформатора надевают рамку с $N_2 = 35$ витками провода, замкнутого на лампочку от карманного фонарика ($\mathcal{E} = u_2 = 3,5$ В). Лампочка начинает светиться в полный накал. Объясните этот эффект. Найдите число витков N_1 включённой в сеть ($u_1 = 220$ В) обмотки трансформатора. Рассеянием магнитного потока за пределы магнитопровода пренебречь.

12.8. Две катушки надеты на общий сердечник. Первая катушка соединена с генератором сигналов специальной формы. Форма тока во второй катушке контролируется с помощью осциллографа. Какова форма сигналов на экране осциллографа (учесть фазовые соотношения) для различных случаев тока, протекающего в первой катушке (см. рис. 12.3): а) синусоидальное; б) пилообразное; в) меандр.

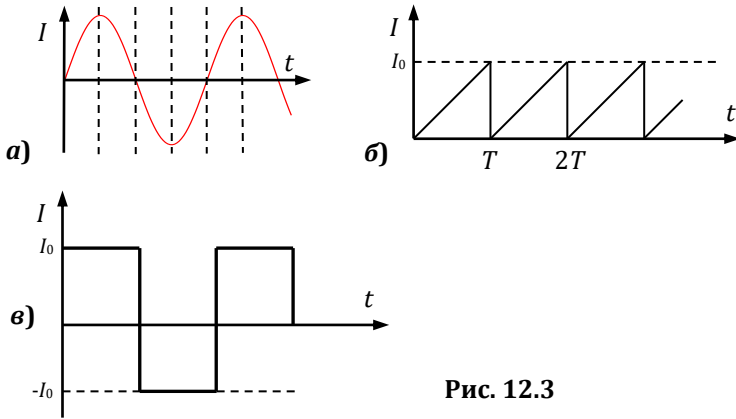


Рис. 12.3

12.9. Проволочное кольцо с сопротивлением $R = 314 \text{ мОм}$ надето на соленоид с площадью поперечного сечения $S = 2,5 \cdot 10^{-3} \text{ м}^2$ и плотностью намотки витков $n = 10^3 \text{ м}^{-1}$. На рис. 12.4 показана зависимость от времени силы тока, протекающего через соленоид ($I_0 = 0,8 \text{ А}$, $\tau = 0,5 \text{ мс}$). Постройте график зависимости от времени тока, протекающего через кольцо. Определите тепловую мощность, которую нужно отводить от кольца для поддержания его температуры неизменной. Индуктивность кольца пренебрежимо мала.

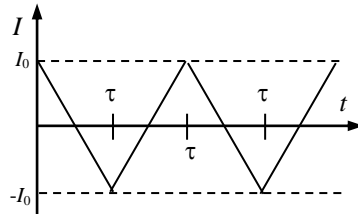


Рис. 12.4

12.10. В простейшем приборе для измерения индукции магнитного поля флюксметре (flux - поток) используется небольшой пробный виток с площадью $S = 2 \text{ см}^2$, соединённый с баллистическим гальванометром^{*)}. Плоскость витка первоначально перпендикулярна магнитному полю, затем его поворачивают на угол 90° . Сопротивление витка $R = 0,01 \text{ Ом}$. Определите индукцию поля B , если гальванометр зарегистрировал протекание заряда $q = 1 \text{ мкКл}$. (Указание: Используйте решение задачи 12.1)

12.11. Индукция магнитного поля, пронизывающего неболь-

^{*)} Впервые такой способ был предложен А.Г. Столетовым.

шую медную рамку, меняется по закону $B = kt$, где $k = 10 \text{ Тл/с}$. Рамка имеет форму квадрата со стороной $a = 1 \text{ см}$, сечение медного провода равно $S = 0,3 \text{ мм}^2$, плоскость рамки перпендикулярна полю. Какое количество теплоты Q будет выделено рамкой за время $\tau = 1 \text{ с}$. $\rho_{Cu} = 1,7 \cdot 10^{-8} \text{ Ом}\cdot\text{м}$.

12.12. Квадратная проволочная рамка со стороной a и прямой проводник (см. рис. 12.5) с постоянным током силой I лежат в одной плоскости. Её повернули на 180° вокруг оси OO' , отстоящей от проводника на расстояние b . Найти заряд, протекший по рамке. Сопротивление единицы длины проволоки равно ρ .

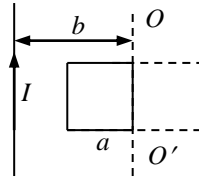


Рис. 12.5

12.13. Стержень OA длиной L и сопротивлением R скользит по полукольцу, замыкающему контур (см. рис. 12.6). Система находится в однородном магнитном поле с индукцией \vec{B} , перпендикулярной к её плоскости. Определите силу тока в стержне, если угловая скорость его движения равна ω . Сопротивлением полукольца и контактов пренебречь. Источник тока имеет ЭДС \mathcal{E} и внутреннее сопротивление r .

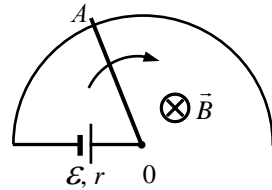


Рис. 12.6

12.14*. Проволочная квадратная рамка массы m со стороной a падает в гравитационном поле Земли, всё время оставаясь также и в магнитном поле, перпендикулярном плоскости рамки (рис. 12.7). Индукция магнитного поля изменяется по закону $B(y) = B_0 + ky$. Сопротивление рамки равно R . Найти закон движения рамки. С какой установившейся скоростью будет двигаться рамка через некоторое время полёта?

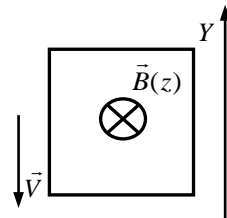


Рис. 12.7

12.15. Перпендикулярно линиям однородного магнитного поля \vec{B} движется с постоянной скоростью \vec{V} металлический стержень длины l . Магнитное поле (сила Лоренца) совершает

работу по разделению свободных электронов внутри стержня, что и приводит к появлению ЭДС индукции на его концах

$$\mathcal{E} = \frac{A^{\text{ст}}}{q} = Vv_l. \text{ Как это согласуется с утверждением, что сила Лоренца, перпендикулярная скорости заряженной частицы, не совершает над ней работы?}$$

рента, перпендикулярная скорости заряженной частицы, не совершает над ней работы?

12.16. По П-образной рамке скользит с постоянной скоростью \vec{V} под действием силы \vec{F} перемычка. Контур находится в перпендикулярном к его плоскости однородном магнитном поле. Чему равен модуль силы F , если в контуре выделяется каждую секунду количество тепла Q ?

12.17. В однородном магнитном поле с индукцией $B = 0,02 \text{ Тл}$ равномерно вращается вокруг вертикальной оси горизонтальный стержень длиной $l = 0,5 \text{ м}$. Ось вращения проходит через конец стержня параллельно линиям магнитной индукции. Определить угловую скорость вращения стержня, при которой на концах стержня возникает разность потенциалов $u = 0,1 \text{ В}$.

12.18. По двум медным шинам, установленным под углом α к горизонту, скользит под действием силы тяжести медный брусок массы m (см. рис. 12.8). В окружающем шины пространстве создано однородное магнитное поле с индукцией \vec{B} , перпендикулярное к плоскости, в которой перемещается брусок. Вверху шины замкнуты на сопротивление R . Коэффициент трения между шинами и бруском равен μ ($\mu < \text{tg}\alpha$). Расстояние между шинами равно l . Пренебрегая сопротивлением шин, бруска и контактов между ними, найти установившуюся скорость бруска.

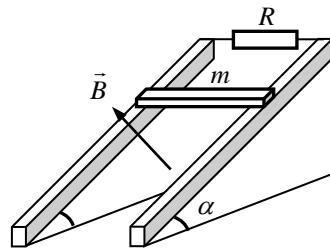


Рис. 12.8

12.19*. Система отличается от рассмотренной в предыдущей задаче лишь тем, что вместо резистора R между шинами подключен конденсатор с электроёмкостью C . Брусок удерживают на расстоянии L от основания горки. Найти время соскальзывания бруска t .

12.20*. Металлический стержень, сопротивление единицы длины которого равно ρ , скользит с постоянной скоростью \vec{V} , замыкая две медные шины OC и OD ($\vec{V} \parallel OD$), расположенные под углом α друг к другу. Стержень перпендикулярен к шине OD (см. рис. 12.9). Система находится в однородном магнитном поле с индукцией \vec{B} , перпендикулярной к плоскости системы. Пренебрегая сопротивлением шин и контактов, найти количество тепла, которое выделяется в цепи за время перемещения стержня на расстояние L от точки O .

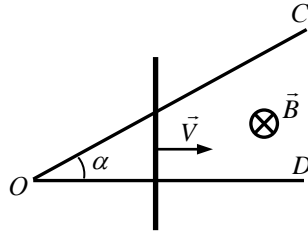


Рис. 12.9

12.21*. Прямой провод с сопротивлением ρ на единицу длины согнут под углом 2α (см. рис. 12.10). Перемычка из такого же провода, расположенная перпендикулярно к биссектрисе угла 2α , образует с согнутым проводом замкнутый треугольный контур. Этот контур помещён в однородное магнитное поле с индукцией \vec{B} , перпендикулярное к его плоскости. Найти направление и силу тока, текущего в контуре, когда перемычка движется с постоянной скоростью \vec{V} . Сопротивлением в местах контактов пренебречь.

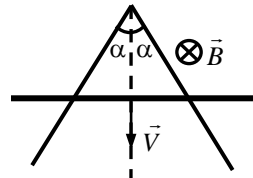


Рис. 12.10

12.22*. Квадратная рамка со стороной a и длинный прямой провод с током силой I находятся в одной плоскости (рис. 12.11). Рамку поступательно перемещают вправо с постоянной скоростью \vec{V} . Найти ЭДС индукции в рамке как функцию расстояния x от провода до левой стороны рамки.

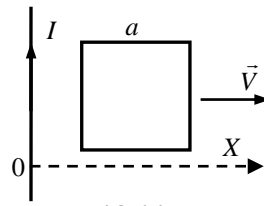


Рис. 12.11

12.23*. На расстояниях a и b от длинного прямого проводника с постоянным током силой I_0 расположены два параллельных ему провода, замкнутых на одном конце резистором с сопротив-

лением R (рис. 12.12). По проводам без трения перемещают с постоянной скоростью \vec{V} стержень-перемычку. Пренебрегая сопротивлением проводов и стержня, а также магнитным полем индукционного тока, найти:

а) силу и направление индукционного тока в контуре 1–2–3–4;

б) силу F , необходимую, чтобы поддерживать постоянную скорость стержня 2–3; а также расстояние x от провода с током I_0 до точки, в которой нужно приложить эту силу, чтобы стержень двигался поступательно;

в) мощность P , затрачиваемую на перемещение стержня.

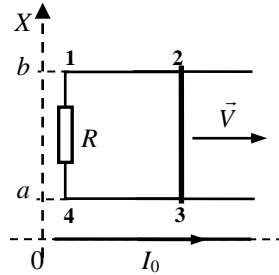


Рис. 12.12

12.24*. Через неподвижный гладкий горизонтальный непроводящий цилиндр перекинута два легких гибких провода, к концам которых припаяны два металлических горизонтальных стержня длиной l . Система находится в однородном магнитном поле, вектор индукции которого \vec{B} направлен горизонтально перпендикулярно осям стержней (см. рис. 12.13). Масса первого стержня равна m_1 , второго – m_2 .

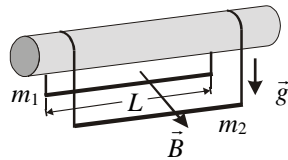


Рис. 12.13

Найти установившуюся скорость поступательного движения стержней, если их общее сопротивление равно R .

§13. Самоиндукция. Энергия магнитного поля

• Явление электромагнитной индукции предполагает появление в проводящем контуре дополнительной ЭДС также и при изменении *собственного* магнитного потока контура (обусловленного током в самом контуре) – ЭДС *самоиндукции*. Из закона Био–Савара–Лапласа (см. 10.1) следует, что магнитная индукция в любой точке пространства пропорциональна силе тока в контуре*), следовательно, с учётом определения (12.2) собственный магнитный поток контура также пропорционален ей:

*) При отсутствии вблизи контура ферромагнетиков.

$$\Phi_s = LI. \quad (13.1)$$

Коэффициент пропорциональности L называется коэффициентом самоиндукции или *индуктивностью* контура. Индуктивность любого контура зависит от его размеров и формы, а также от магнитных свойств окружающей среды. При изменении силы тока в контуре в нём возникает ЭДС самоиндукции, которая с учётом соотношений (12.1) и (13.1) равна:

$$\mathcal{E}_{si} = -L \frac{dI}{dt} - I \frac{dL}{dt}^{**}). \quad (13.2)$$

• Если два контура с током 1 и 2 находятся близко друг к другу, то говорят о их *взаимоиндукции*. Магнитное поле контура 1 создает поток через поверхность, ограниченную контуром 2, который прямо пропорционален силе тока в контуре 1^{*)}, и наоборот:

$$\Phi_{21} = L_{21}I_1, \quad \Phi_{12} = L_{12}I_2. \quad (13.3)$$

Коэффициенты пропорциональности L_{12} и L_{21} называются коэффициентами взаимной индукции контуров или их взаимными индуктивностями. Они зависят от размеров, формы контуров, их взаимного расположения, а также от магнитных свойств окружающей среды. Теорема взаимности доказывает, что в отсутствии ферромагнетиков эти коэффициенты равны: $L_{12} = L_{21}$.

• Задачи этого раздела, как правило, связаны с использованием известного распределения индукции магнитного поля проводников с током $\vec{B}(\vec{r})$. Вычисление создаваемого ими потока Φ через поверхность, ограниченную этими или другими проводниками позволяет выделить коэффициент пропорциональности между данным потоком и силой тока в проводнике – источнике поля – коэффициент само- или взаимоиндукции. Проиллюстрируем это на простых примерах.

Примеры решения задач

13.1. Определить индуктивность соленоида – катушки длиной $l = 50$ см и диаметром $d = 5$ см, содержащей $N = 400$ витков.

Решение

В задаче 10.5 мы нашли индукцию магнитного поля внутри соленоида – см. стр. 113–114. Легко получить магнитный поток, пронизывающий каждый виток соленоида $\Phi_1 = B \cdot S$, а также и полный

^{**)} Второе слагаемое отлично от нуля при изменении самой индуктивности контура L .

поток через все N витков $\Phi = N \cdot \Phi_1$. Остаётся использовать равенство (10.16) и очевидные геометрические соотношения:

$$\begin{aligned} \Phi &= N \cdot \mu_0 n \cdot S \cdot I = \\ &= \mu_0 \frac{N^2}{l} S \cdot I = \mu_0 \frac{N^2}{l^2} S l \cdot I = \mu_0 \frac{N^2}{l^2} V \cdot I = \mu_0 n^2 V \cdot I. \end{aligned}$$

Выделяя коэффициент пропорциональности между Φ и I , в соответствии с определением индуктивности (13.1), получаем:

$$L = \mu_0 n^2 V, \quad (13.4)$$

где V – объём внутри соленоида. В нашем примере

$$L = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{\text{Гн}}{\text{м}} \left(\frac{400}{0,5 \text{ м}} \right)^2 \cdot \frac{\pi \cdot (0,05 \text{ м})^2}{4} \cdot 0,5 \text{ м} \approx 0,8 \text{ мГн}.$$

Задача

13.2. Определить взаимную индуктивность L_{12} тороидальной катушки (тороида) и проходящего по её оси бесконечного прямого провода. Торойд имеет прямоугольное сечение ширины a . Внутренний радиус тороида равен r_1 внешний r_2 . Число витков тороида равно N . Система находится в однородном магнетике с магнитной проницаемостью μ .

Решение

Определим поток вектора магнитной индукции \vec{B} поля прямолинейного проводника через поверхность “ Σ ”, ограниченную одним витком тороида. Мы знаем, что линии магнитной индукции имеют в данном случае форму концентрических окружностей и пересекают поверхность каждого витка по нормали к ней. Учитывая, кроме того, что индукция зависит только от расстояния r от проводника – источника поля, разобьём поверхность витка на

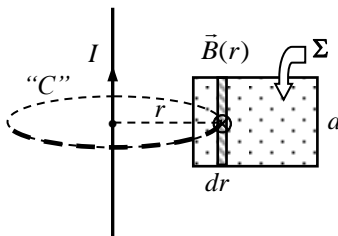


Рис. 13.1

малые элементы, в пределах каждого из которых индукция не меняется. Это узкие полоски с площадью $dS = a \cdot dr$, параллельные прямолинейному проводнику с током (см. рис. 13.1). Искомый поток получается интегрированием по поверхности “ Σ ”, ограниченной контуром:

$$\Phi = \int_{\Sigma} (\vec{B}, d\vec{S}) = \int_{\Sigma} B(r) dS = \int_{r_1}^{r_2} B(r) a dr.$$

Используем полученный ранее при решении задачи 10.1 результат для поля прямолинейного проводника с током (10.7):

$$\Phi = \int_{r_1}^{r_2} \frac{\mu\mu_0 I}{2\pi r} \cdot a dr = \frac{\mu\mu_0 I a}{2\pi} \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r} = \left(\frac{\mu\mu_0 a}{2\pi} \ln \frac{r_2}{r_1} \right) \cdot I.$$

Полный поток через все витки тороида в N раз больше, поэтому искомая взаимная индуктивность равна

$$L_{12} = N \frac{\mu\mu_0 a}{2\pi} \ln \frac{r_2}{r_1}.$$

Задача

13.3. Катушка с индуктивностью $L = 10$ Гн подключена к источнику тока через резистор с сопротивлением $R = 10$ Ом. Найти закон уменьшения силы тока в цепи с течением времени $I(t)$ после замыкания источника тока накоротко ключом K (см. рис. 13.2).

Решение

После замыкания ключа K ток в контуре, состоящем из катушки и резистора не исчезает мгновенно, благодаря явлению самоиндукции. Запишем равенство, соответствующее второму правилу Кирхгофа для этого контура:

$$-L \frac{dI}{dt} = IR.$$

После стандартной операции разделения переменных и интегрирования (см., например, решение задачи 1.1) получаем:

$$\ln I = -\frac{R}{L} \cdot t + const.$$

Наконец, после простых преобразований и потенцирования:

$$I(t) = I_0 e^{-\frac{R}{L}t} \quad \text{или} \quad I(t) = \frac{\mathcal{E}}{R} \cdot e^{-\frac{R}{L}t}.$$

Здесь учтено, что константа I_0 , очевидно – значение начальной силы тока (до замыкания ключа K), равная $I(0) = \mathcal{E}/R$.

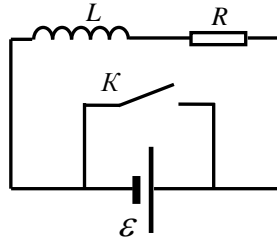


Рис. 13.2

- Энергия магнитного поля

Итак, уже после отключения источника тока в цепи, рассмотренной в задаче (13.3), протекает ток самоиндукции, совершается работа по перемещению зарядов, а на резисторе выделяется тепло. Каков источник этой работы? Это *энергия магнитного поля*, окружающего проводники с током. Определив работу этого поля, мы и получим выражение для его энергии.

Элементарная работа сторонних сил (в нашем случае это силы вихревого электрического поля) по перемещению заряда dq равна:

$$dA = \mathcal{E}_{si} \cdot dq = -L \frac{dI}{dt} \cdot I(t) dt = -LI(t) dI, \quad (13.5)$$

Полная работа определяется суммированием элементарных работ, т.е. интегрированием равенства (13.5):

$$A = -L \int_{I_0}^0 I(t) dI = \frac{LI_0^2}{2}. \quad (13.6)$$

Эта работа определяет энергию, запасённую в магнитном поле. Как и в случае поля электрического выразим её через *характеристику самого поля – магнитную индукцию B* . Для этого запишем энергию магнитного поля соленоида через индукцию магнитного поля в нём B :

$$W_m = \frac{1}{2} LI^2 = \frac{1}{2} \mu \mu_0 n^2 V \cdot \left(\frac{B}{\mu \mu_0 n} \right)^2 = \frac{B^2}{2\mu \mu_0} \cdot V^{**}, \quad (13.7)$$

где V – объём соленоида.

Определим *энергию, приходящуюся на единицу объёма пространства*, где есть магнитное поле. Поле внутри соленоида однородно, поэтому получаем:

$$w_m(\vec{r}) = \frac{\Delta W_m}{\Delta V} = \frac{W_m}{V} = \frac{B^2}{2\mu \mu_0}. \quad (13.8)$$

Величина w_m называется *объёмной плотностью энергии* магнитного поля. В случае неоднородного поля она позволяет определять энергию, заключённую в малых элементах пространства объёмом dV : $dW_m = w_m dV$. А, зная магнитную индукцию поля

*) Здесь мы использовали закон ЭМИ (12.1) и определение силы тока $I = dq/dt$.

**) Используются результаты решений задач 10.5 и 13.1 для магнитной индукции поля соленоида и его индуктивности.

как функцию координат, можно рассчитать полную энергию магнитного поля в той или иной области пространства “ Ω ”:

$$W_m = \frac{1}{2\mu_0} \int_{\Omega} \frac{B^2(\vec{r})}{\mu} dV. \quad (13.6)$$

Задачи для самостоятельного решения

13.4. Для демонстрации роли индуктивности используется схема, приведённая на рис. 13.3. В одной из двух параллельных ветвей включена катушка с очень большой индуктивностью, а в другой – резистор, сопротивление которого равно омическому сопротивлению обмотки катушки. L_1 и L_2 – одинаковые лампочки. Блок питания *БП* содержит переключатель, позволяющий менять полярность подаваемого на схему постоянного напряжения. Опишите демонстрационный эксперимент. Как ведут себя лампочки, если быстро изменять полярность напряжения блока питания?

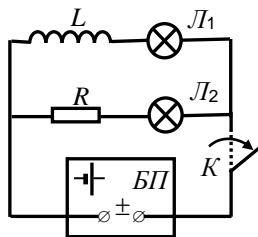


Рис. 13.3

13.5. Найти закон нарастания силы тока $I(t)$ после замыкания ключа K в представленной на рис. 13.4 цепи. Индуктивность катушки $L = 10$ Гн, сопротивление резистора $R = 10$ Ом. За какое время τ сила тока достигнет 99% от предельного значения?

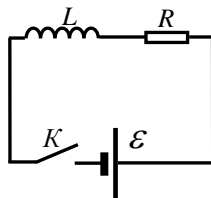


Рис. 13.4

13.6. Двухпроводная линия состоит из двух длинных проводов радиуса $a = 0,5$ мм, расположенных в воздухе параллельно друг другу на расстоянии $b = 10$ мм. Найти индуктивность L_1 , приходящуюся на единицу длины этой линии. Магнитную проницаемость материала проводов и окружающей среды принять равной единице.

13.7. Длинная двухпроводная линия питания нагрузки с сопротивлением $R = 10$ Ом обладает индуктивностью $L = 0,1$ мГн. Найти закон нарастания силы тока в нагрузке при замыкании цепи. Определить времена нарастания тока τ_1 и τ_2 до значений $0,5I_0$ и $0,75I_0$ соответственно, где I_0 – установившееся значение силы тока в цепи. Сравните эти значения.

13.8*. Для определения индуктивности катушки собрана экспериментальная схема, показанная на рис. 13.5. Была измерена сила тока через катушку $I = 3 \text{ mA}$ до размыкания ключа K , а затем полный заряд протекший через баллистический гальванометр $\Delta q = 60 \text{ мкКл}$ за счёт экстратока самоиндукции после размыкания ключа. а) Определить по этим данным индуктивность катушки L_x , если сопротивление $R = 10 \text{ Ом}$. б) Предложите, как можно определять индуктивность L_x , используя эталонную катушку с известной индуктивностью L_0 , но не зная абсолютных значений R и Δq (например, в случае замены баллистического гальванометра на обычный микроамперметр).

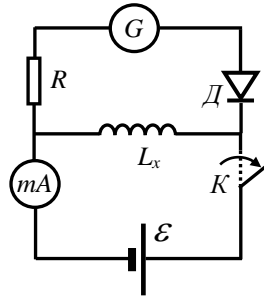


Рис. 13.5

13.9. Определить индуктивность L_1 единицы длины коаксиального кабеля, который состоит из двух концентрически расположенных проводников, разделённых слоем диэлектрика. Радиус внутреннего проводника цилиндрической формы (центральная жила) $a = 0,5 \text{ мм}$, а радиус внешнего (имеющего форму тонкостенной трубки) $b = 3 \text{ мм}$. Магнитную проницаемость проводников и среды между ними считать равной единице.

13.10. На бесконечный соленоид с n витками на единицу длины и площадью поперечного сечения S намотана катушка из N витков. Найти взаимную индуктивность L_{12} катушки и соленоида. Магнитную проницаемость среды, заполняющей соленоид, считать равной единице.

13.11. По соседству расположены два витка проволоки. По первому течёт ток $I = 10 \text{ А}$. В цепь второго включен баллистический гальванометр. Полное сопротивление второй цепи $R = 1 \text{ Ом}$. Чему равна взаимная индуктивность L_{12} витков, если при выключении тока через гальванометр проходит заряд $\Delta q = 0,02 \text{ мкКл}$?

13.12. Для частного случая – тороидальных катушек доказать теорему взаимности. На поверхность тора квадратного сечения равномерно навито N_1 витков тонкой проволоки. На эту обмотку в свою очередь равномерно навито ещё N_2 витков. Внутренний и

внешний радиусы тора равны a и b . Найти взаимную индуктивность обеих обмоток. Считать, что система находится в однородном магнетике проницаемости μ .

13.13. Два соленоида с индуктивностями $L_1 = 0,4$ Гн и $L_2 = 0,9$ Гн одинаковой длины и почти равного сечения вставлены один в другой. Определить взаимную индуктивность соленоидов.

13.14. Две катушки намотаны на один сердечник. Индуктивность первой катушки $L_1 = 0,64$ Гн, второй – $L_2 = 1$ Гн. Сопротивление второй катушки $R_2 = 400$ Ом. Определить силу тока I_2 возникающего во второй катушке, если ток в первой катушке равномерно уменьшать за время $\Delta t = 10$ мс от $I_1 = 0,6$ А до нуля.

13.15. Определить энергию магнитного поля, приходящуюся на единицу длины коаксиального кабеля (например, описанного в задаче 13.7) при протекании по нему постоянного тока силой $I = 1$ А.

13.16. Соленоид с обмоткой, содержащей $N = 1000$ витков провода, имеет длину $l = 1$ м и площадь поперечного сечения $S = 20$ см². Определить силу тока, при которой объёмная плотность энергии магнитного поля внутри соленоида равна $w = 0,628$ Дж/м³. Какова при этом полная энергия магнитного поля внутри соленоида?

13.17. Обмотка электромагнита, находясь под постоянным напряжением, имеет сопротивление $R = 5$ Ом и индуктивность $L = 0,5$ Гн. Определить время, за которое в обмотке выделится количество теплоты, равное энергии магнитного поля в сердечнике.

Ответы к задачам для самостоятельного решения**Часть I. МЕХАНИКА. ЭЛЕКТРИЧЕСТВО****§1. Кинематика материальной точки и твёрдого тела**

1.5. а) $a = a_n = (\omega \cdot s_0)^2 / R = 10^{15} \text{ м/с}^2$, б) $a = a_\tau = \omega^2 \cdot s_0 = 10^{16} \text{ м/с}^2$.

1.6. 1) $\omega = b - 2ct$, 2) $V = (b - 2ct)R$, 3) $a_\tau = -2cR$, 4) $a_n = (b - 2ct)^2 R$,

5) $a = R\sqrt{4c^2 + (b - 2ct)^4}$.

1.7. $\tau = 10 \text{ с}$.

1.8. $N = \frac{v\tau}{2} = 5,5 \text{ об}$.

1.9. 5 рад/с^2 .

1.10. а) $|\Delta\vec{r}| \approx 361 \text{ м}$; б) $\Delta l \approx |\Delta\vec{r}| \approx 361 \text{ м}$. Движение прямолинейное в одну сторону, поэтому $\Delta l = |\Delta\vec{r}|$.

1.11. а) $\vec{V}(t) = 6t \cdot \vec{e}_x + 2 \cdot \vec{e}_y \text{ (м/с)}$, $\vec{a}(t) = 6\vec{e}_x \text{ (м/с}^2\text{)}$, б) $V = 6,3 \text{ м/с}$, в) $S \approx 63 \text{ м}$.

1.15. $V_x = A\omega\sqrt{1 - (x_1/A)^2} \approx \pm 1,1 \text{ м/с}$, $a_x \approx -19,9 \text{ м/с}^2$.

1.16. а) $\tau = \sqrt{\frac{R}{a_\tau}} = 2 \text{ с}$, б) $\tau = \sqrt{\frac{2R}{a_\tau}} = 2,8 \text{ с}$.

1.17. $V = A$, $a = A\omega$, $\alpha = \pi/2$, частица движется с постоянной угловой скоростью по окружности радиуса A/ω .

1.18. а) $(\vec{r}, \vec{V}) = 0$. Вектор скорости перпендикулярен радиус-вектору.

б) $(\vec{r}, \vec{a}) = -\omega^2 A^2$. Вектор ускорения направлен против радиус-вектора.

в) $x^2 + y^2 = A^2$ – окружность радиуса A . з) Против часовой стрелки. д) Движение по окружности радиуса A с центром в начале координат с постоянной угловой скоростью.

1.19. $b = 1/\tau$, где τ – промежуток времени, за который скорость уменьшается в e раз.

1.20. $|\Delta\vec{r}| = |\Delta x| = \left| V_0 \tau - \frac{k\tau^4}{12} \right| \approx 5,25 \text{ м}$, $V_{cp} = \frac{|\Delta\vec{r}|}{\tau} \approx 1,7 \text{ м/с}$.

$$1.21. a) \omega(t) = \omega_0 e^{-\alpha t}, \text{ б) } t_1 = \frac{\ln n_1}{\ln n_2} t_2 = 52 \text{ с.}$$

$$1.22. R = \frac{a}{\beta} \frac{1}{\sqrt{1 + \beta^2 \tau^4}} \approx 7,6 \text{ см.}$$

$$1.23. \vec{V}_1 = v(\vec{e}_x + \vec{e}_y), \quad \vec{V}_2 = 2v\vec{e}_x, \quad \vec{V}_3 = v(\vec{e}_x - \vec{e}_y).$$

$$1.24. \vec{a} = -\frac{V_0^2}{R} \vec{e}_y.$$

$$1.25. a = a_0 \sqrt{1 + \frac{4h^2}{R^2}}.$$

$$1.26. \Delta X = \frac{u_0 d}{2V_{\text{отн}}}.$$

§2. Динамика материальной точки

$$2.6. \Delta m = 2(M - F_A/g).$$

$$2.7. v = \frac{e}{2\pi r} \frac{1}{\sqrt{4\pi\epsilon_0 m_e r}} = 2,5 \cdot 10^{15} \text{ с}^{-1}, \quad a_n = 4\pi^2 v^2 r \approx 2,5 \cdot 10^{22} \text{ м/с}^2.$$

$$2.8. v = \frac{eB}{2\pi m_e} \sqrt{h^2 + 4\pi^2 R^2} = 7,6 \cdot 10^6 \text{ м/с.}$$

$$2.9. a) a_n = 0, a_\tau = eE/m_e, \text{ б) } a_n = \frac{e}{m_e} \sqrt{B^2 v^2 + E^2}, a_\tau = 0.$$

$$2.10. a) S = \frac{2}{B} \sqrt{\frac{2U}{eN_A}} (\sqrt{\mu_2} - \sqrt{\mu_1}) = 1 \text{ см, б) } \frac{t_1}{t_2} = \frac{\mu_1}{\mu_2}, \text{ т.е. легкий достигнет раньше.}$$

$$2.11. A_1 = 4, A_2 = 3. \text{ Пики соответствуют изотопам гелия } ^4\text{He и } ^3\text{He.}$$

§3. Динамика твёрдого тела

$$3.5. I_z = mR^2.$$

$$3.6. I_z = \frac{mR^2}{2}.$$

$$3.8. I_z = \frac{mR^2}{4} = 0,08 \text{ кг}\cdot\text{м}^2.$$

$$3.9. \text{ а) } I_z = \frac{ml^2}{12}; \text{ б) } I_z = \frac{ml^2}{12} \sin^2 \alpha.$$

$$3.11*. I_z = \frac{3}{10} mR^2.$$

$$3.12*. I_z = \frac{2}{5} mR^2.$$

$$3.13. I_z = \frac{2}{5} mR^2 \cong 10^{38} \text{ кг}\cdot\text{м}^2, M = \frac{4\pi}{5} \frac{mR^2}{T} \cong 1,7 \cdot 10^{36} \text{ кг}\cdot\text{м}^2/\text{с}.$$

$$3.14. F = \frac{\pi \nu m d}{2\tau} \approx 4,4 \text{ мН}.$$

$$3.15. a = \frac{2mg}{M+2m} = 3 \text{ м/с}^2, T = mg \frac{M}{M+2m} = 13,5 \text{ Н}.$$

$$3.16. I_z = \left(\frac{g\tau^2}{2h} - 1 \right) mR^2 = 18 \text{ кг}\cdot\text{м}^2.$$

$$3.17. a = \frac{M}{M+3m/2} g \approx 5,6 \text{ м/с}^2, F_{mp} = \frac{Mm}{2M+3m} g = 2,8 \text{ Н},$$

$$\mu \geq \frac{M}{2M+3m} = 0,29.$$

$$3.18. \mu \geq \frac{F}{3mg}.$$

$$3.19. F_{mp} = \frac{F}{m+I_z/R^2} \left(\cos \alpha \cdot \frac{I_z}{R^2} + m \frac{r}{R} \right).$$

3.20. катушка катится без скольжения, если:

$$F < \frac{\mu mg(I + mR^2)}{mRr + I \cos \alpha + \mu \sin \alpha (I + mR^2)}. \text{ а) катушка катится без скольжения}$$

вправо, $a_x = 0,36 \text{ м/с}^2$, б) катушка неподвижна, в) катушка "ползёт" по плоскости, не вращаясь, с ускорением $a_x = 0,51 \text{ м/с}^2$, г) катушка катится без скольжения влево, $a_x = -0,3 \text{ м/с}^2$.

$$3.21. \text{ а) } \tau = \sqrt{3h/g} = 0,39 \text{ с, б) } F = mg/6 = 1,64 \text{ Н.}$$

$$3.22. T = mg/4.$$

$$3.23. T = \frac{4\pi^2 v I_c}{mgl} \approx 860 \text{ с.}$$

$$3.24. \Omega = \frac{mgl}{I_c \omega}, \text{ направление прецессии совпадает с направлением вращения}$$

волчка.

$$3.26. M_1 = 2mV_0R, M_2 = 0.$$

$$3.27. M_1 = \frac{3}{2} mV_0R, M_2 = mV_0R, M_3 = \frac{1}{2} mV_0R, M_4 = 0, M_5 = \frac{1}{2} mV_0R.$$

$$3.28. \text{ а) } \vec{N} = (1/2mgh \cdot \sin 2\alpha) \cdot \vec{n}, \text{ б) } \vec{M}(t) = (1/2mgh \cdot \sin 2\alpha) \cdot t \cdot \vec{n}.$$

$$3.29. \text{ а) } \vec{N} = (mgV_0 \cdot \cos \alpha) \cdot t \cdot \vec{n}, \text{ б) } \vec{M}(t) = (1/2mgV_0 \cdot \cos \alpha) \cdot t^2 \cdot \vec{n}.$$

§4. Работа и энергия

$$4.4. T = \frac{F^2 t^2}{2m}.$$

$$4.5. \tau = \frac{T_0}{N\pi v_0} \approx 5,1 \text{ с.}$$

$$4.6. A = 0,5mD^2\pi^2v^2 = 22 \text{ кДж.}$$

$$4.7. U(x) = \frac{\beta x^4}{4}.$$

$$4.8. F_x = -\frac{a}{y}; F_y = a \left(\frac{x}{y^2} + \frac{1}{z} \right); F_z = -\frac{ay}{z^2}.$$

$$4.9. U(r) = \begin{cases} -\frac{mgR^2}{r} & \text{при } r \geq R; \\ -\frac{mg(r^2 - 3R^2)}{2R} & \text{при } r \leq R. \end{cases}$$

$$4.10. U = -\frac{3}{5}G\frac{m^2}{R} = -\frac{16}{15}G\pi^2\rho^2R^5.$$

$$4.11. \frac{l_2}{l_1} = 3.$$

$$4.12. F = \frac{b}{R}\sqrt{R^2 + 4s^2}.$$

§5. Законы сохранения в механике

$$5.7. r_{\min} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{2T} \approx 1,4 \cdot 10^{-15} \text{ м.}$$

Этот результат носит оценочный характер, т.к. на таком расстоянии уже сказываются ядерные силы.

$$5.8. n_0 = 2n_1 = 10.$$

$$5.10. \text{ Должно выполняться условие } V_x = \frac{\sqrt{m_1 m_2 n} - m_2}{m_1 + m_2} V_{20} < 0, \text{ т.е. при}$$

$$\frac{m_2}{m_1} > n.$$

$$5.11. \Delta W = \frac{m_{Cs}}{m_O + m_{Cs}} T_0 = 3,57 \text{ эВ} < \mathcal{E}_{\text{ион.}}$$

$$5.12. \text{ В } k = \left(\frac{n+1}{n-1} \right) = 1,4 \text{ раза.}$$

$$5.13. \text{ В } k = \left(\frac{n+1}{n-1} \right) = 9 \text{ раз.}$$

$$5.14. T_2 = \frac{3}{4} T_1 = 30 \text{ Дж.}$$

$$5.15. Q = \frac{7}{10} m(V_0^2 - V^2) = 2,8 \text{ мДж.}$$

$$5.16. V_{\min} = \sqrt{6gl} \approx 7 \text{ м/с.}$$

$$5.17. V_c = \frac{1}{2} \sqrt{3gl} \approx 2,5 \text{ м/с.}$$

$$5.18. a = g\sqrt{1 + 3\sin^2\alpha}.$$

$$5.19. V = \sqrt{V_0^2 - \frac{4}{3}gh}, \quad H = \frac{3V_0^2}{4g}.$$

$$5.20. V = \sqrt{\frac{3}{4}gl}.$$

$$5.21. x = \frac{2}{3}l.$$

$$5.22. x = \frac{l^2}{12a} = 15 \text{ см, линейка поворачивается вокруг точки } O \text{ с угловой скоростью } \omega = \frac{12pa}{ml^2} = 4 \text{ рад/с.}$$

$$5.23. \varphi = \pi.$$

5.24. а) Начнёт вращаться в направлении, противоположном вращению колеса.
б) Остановится. в) Направление вращения изменится так, что экспериментатор опять будет вращаться в направлении, противоположном вращению колеса.

5.25. а) будет вращаться в том же направлении, в котором вращалось колесо, б) скорость вращения возрастёт.

$$5.26. \mu = \frac{3mg}{u}.$$

$$5.27. V = u.$$

$$5.28. u \geq \frac{m_0g}{\mu} = 98 \text{ м/с.}$$

$$5.29. \tau = \left(\frac{R}{r}\right)^2 \sqrt{\frac{2h}{g}} = 3,2 \cdot 10^3 \text{ с} = 53 \text{ мин.}$$

$$5.30. 1) h(t) = \left(\frac{r}{R}\right)^4 \frac{g}{2} (t - \tau)^2, \quad 2) V = \left(\frac{r}{R}\right)^4 g(\tau - t).$$

$$5.31. \tau = \frac{S_1}{S_2} l \sqrt{\frac{S_1 \rho}{2F}} = 3,2 \text{ с.}$$

$$5.32. a) Re = \frac{\rho Q}{\pi \eta R} = 764 < 1000 - \text{ течение ламинарное,}$$

$$б) \frac{dp}{dl} = \frac{8\eta Q}{\pi R^4} = 3,1 \text{ Па/м.}$$

**§6. Закон Кулона. Напряженность электрического поля.
Теорема Гаусса**

$$6.6 F = \frac{qQ}{2\pi\epsilon_0 R^2} \approx 0,37 \text{ Н.}$$

$$6.7. E(x) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q}{x(l+x)} = 1,8 \cdot 10^4 \text{ В/м.}$$

$$6.8. F = \frac{q^2}{16\pi\epsilon_0 a^2}, \quad \sigma(r) = -\frac{qa}{2\pi r^3}; \quad Q = -q.$$

$$6.9. E(0) = \sigma/4\epsilon_0.$$

$$6.10. E = \sigma/2\epsilon_0.$$

$$6.11. a) E(r) = \frac{\rho r}{2\epsilon_0 \epsilon}; \quad б) E(r) = \frac{\rho R^2}{2\epsilon_0 r}, \text{ где } R - \text{ радиус цилиндра.}$$

$$6.12. a) E(r) = \frac{\rho r}{3\epsilon\epsilon_0}, \quad б) E(r) = \frac{\rho R^3}{3\epsilon_0 r^2}.$$

$$6.13. E(h) = \frac{\sigma h}{2\epsilon_0 \sqrt{R^2 + h^2}}.$$

$$6.14. E = \frac{\rho b}{3\varepsilon_0}.$$

$$6.15. F = \lambda^2 / 2\pi\varepsilon_0 b = 8,1 \text{ Н/м}.$$

$$6.16. E_{\text{внутри}} = \frac{\rho|x|}{\varepsilon_0\varepsilon}, \quad E_{\text{вне}} = \frac{\rho d}{2\varepsilon_0}.$$

$$6.17. F_n = \sigma \cdot \Phi.$$

$$6.18. F = S\sigma^2 / 2\varepsilon_0.$$

§7. Потенциал. Электроёмкость

$$7.6. \varphi(0) = \frac{\sigma R}{2\varepsilon_0}.$$

$$7.7. a) \varphi(x) = -\frac{\sigma|x|}{2\varepsilon_0} + \text{const}; \text{ б) Нельзя.}$$

$$7.8. a) \varphi(x) = -\frac{\rho x^2}{2\varepsilon_0\varepsilon}; \text{ б) } \varphi(x) = -\left[\frac{\rho a^2}{2\varepsilon_0\varepsilon} + \frac{\rho(|x|-a)a}{\varepsilon_0} \right].$$

7.9. а) не могут; б) не могут.

$$7.10. \varphi_1 - \varphi_2 = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0} \cdot \ln \frac{R_2}{R_1}.$$

$$7.11. u(r) = u_0 \cdot \frac{\ln(r/R_1)}{\ln(R_2/R_1)}.$$

$$7.12. a = \frac{e \cdot u_0}{r \cdot m \cdot \ln R_1 / R_2} \approx 10^{15} \text{ м/с}^2;$$

$$v = \sqrt{\frac{2e \cdot u_0 \cdot \ln(r/R_2)}{m_e \cdot \ln(R_1/R_2)}} \approx 5 \cdot 10^6 \text{ м/с}.$$

$$7.13. F = \frac{3p_1 p_2}{2\pi\varepsilon_0 r^4} = \frac{3p^2}{2\pi\varepsilon_0 r^4} \approx 3,3 \cdot 10^{-15} \text{ Н, диполи притягиваются.}$$

$$7.14. a) C = \varepsilon\varepsilon_0 S/d; \quad б) C = \frac{2\pi\varepsilon\varepsilon_0}{\ln(R_2/R_1)}; \quad в) C = \frac{4\pi\varepsilon\varepsilon_0}{(1/R_1 - 1/R_2)}.$$

$$7.15. a) E_1 = E_2 = E_0; \quad б) E_1 = E_2 = 2E_0/(\varepsilon + 1).$$

$$7.16. a) E_1 = 2\varepsilon E_0/(\varepsilon + 1); E_2 = 2E_0/(\varepsilon + 1); б) E_1 = E_0; E_2 = E_0/\varepsilon.$$

$$7.17. \frac{R_1}{R_2} = \frac{\varepsilon_2 E_2}{\varepsilon_1 E_1}.$$

$$7.18. C = \frac{\varepsilon_0 S(\varepsilon_2 - \varepsilon_1)}{d \ln(\varepsilon_2/\varepsilon_1)} = 6 \text{ нФ}.$$

$$7.19. C = \frac{8\pi\varepsilon_0 R_1}{\ln R_2/R_1} = 100 \text{ нФ}.$$

§8. Энергия электростатического поля

$$8.2. W = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q^2}{R} \right).$$

$$8.3. R_{0,9} = \frac{R}{1-\eta} = 10R.$$

$$8.4. \eta = (1 - R_0/R) = 99\%.$$

$$8.5. A = -\Delta U = \frac{1}{10} \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 R} = 90 \text{ нДж}.$$

$$8.7. W = \frac{q^2}{8\pi\varepsilon_0} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right) = 27 \text{ мДж}.$$

$$8.7. A = \Delta U = \frac{q^2 \cdot \Delta x}{2\varepsilon_0 S} \approx 11 \text{ мкДж}.$$

$$8.8. a) W_9 = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{e^2}{r} = -2,9 \cdot 10^{-18} \text{ Дж} \approx -18 \text{ эВ}.$$

$$б) U_0 = U \cdot N_A \approx -1,6 \cdot 10^6 \text{ Дж} = -1,0 \cdot 10^{25} \text{ эВ}.$$

$$8.9. W_3 = \frac{\lambda^2}{4\pi\epsilon_0} \ln \frac{b}{a}.$$

$$8.10. q(t) = C\mathcal{E} \left(1 - e^{-t/RC}\right); \quad I_{\max} = \mathcal{E}/R.$$

$$8.11. q(t) = q_0 \cdot e^{-t/RC}; \quad \tau = RC.$$

$$8.12. \tau = \frac{RC \ln 2}{2} \approx 0,35 \text{ мс}.$$

$$8.13. W_3 = \frac{q^2}{8\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) = 135 \text{ мкДж}.$$

§9. Законы постоянного тока

$$9.5. R = \rho \int_0^l \frac{dx}{S(x)}.$$

$$9.6. a) q = q_0 \cdot \exp(-\sigma t / \epsilon \epsilon_0);$$

$$б) Q = \frac{q_0^2}{8\pi\epsilon\epsilon_0} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right).$$

$$9.7. I = \frac{\epsilon_0(\epsilon - 1)av\mu}{d}.$$

$$9.8. n = \sqrt{\frac{NR}{r}} = 6; P_{\max} = \frac{E^2}{4R} = 30 \text{ Вт}.$$

$$9.9. Q = \frac{Cu^2 R_1}{2(R_1 + R_2)} \approx 63 \text{ мДж}.$$

$$9.10. a) A_1 = Cu^2/4; б) A_2 = -Cu^2/2.$$

9.11. Может, если на участке совершают работу сторонние силы.

$$9.12. I_1 = 32/51 \text{ А}, I_2 = -114/51 \text{ А}, I_3 = -146/51 \text{ А}.$$

$$9.13. Q = \frac{I_{\max}^2}{3} R\tau = 15 \text{ кДж}.$$

$$9.14. Q = \frac{I_0^2}{3} R\tau = 100 \text{ кДж}.$$

$$9.15. E = \sqrt{\frac{Q\rho}{Vt}} = 0,14 \text{ В/м}.$$

$$9.16. r = \frac{P_2 I_1 - P_1 I_2}{I_1 I_2 (I_1 - I_2)} = 0,75 \text{ Ом}, \quad \mathcal{E} = 5,5 \text{ В}.$$

$$9.17. \langle P \rangle = I_0^2 R\tau / T = 20 \text{ Вт}.$$

$$9.18. \mathcal{E} = V = u_0 \left(\frac{R_1}{R_v} + \frac{R_1}{R_2 + R_3} + 1 \right) = 325 \text{ В}.$$

$$9.19. V = u_0 \frac{2R_v}{R + 4R_v} = 100 \text{ В}.$$

$$9.20. q = 17U_0C/29.$$

$$9.21. j = \sqrt{P/\rho} = 10 \text{ кА/м}^2.$$

§10. Магнитное поле токов

$$10.6. B_{M_1} = \frac{\mu_0}{2\pi} \left(\frac{I_1}{r_1} - \frac{I_2}{r_2} \right) = 10 \text{ мкТл}, \quad B_{M_2} = \frac{\mu_0}{2\pi} \left(\frac{I_1}{r_1} + \frac{I_2}{r_2} \right) = 70 \text{ мкТл}.$$

$$10.7. B = \frac{\mu_0 I}{2\pi R} = 40 \text{ мкТл}.$$

$$10.8. B = \frac{\mu_0}{2\pi} \sqrt{\left(\frac{I_1}{r_1} \right)^2 + \left(\frac{I_2}{r_2} \right)^2} = 120 \text{ мкТл}.$$

$$10.9. B = \frac{\mu_0}{2\pi} \sqrt{I_1^2 + I_2^2 - 2I_1 I_2 \cos\alpha}; \quad \cos\alpha = \frac{r_1^2 + r_2^2 - l^2}{2r_1 r_2} \approx 0,9;$$

$$B \approx 6,6 \text{ мкТл}.$$

$$10.10. B = \frac{\mu_0}{\pi r} \sqrt{I_1^2 + I_2^2} = 4 \cdot 10^{-4} \text{ Тл}.$$

$$10.11. B = \frac{2\sqrt{2}\mu_0 I}{\pi L} \approx 11,3 \text{ мкТл.}$$

$$10.12. B = \frac{\mu_0 I(2+3\pi)}{8\pi R}.$$

$$10.13. B = \frac{\mu_0 I}{8} \left(\frac{3}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right) = 5,5 \text{ мкТл.}$$

$$10.14. B = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \left(\frac{3\pi}{2R} + \frac{\sqrt{2}}{a} \right).$$

$$10.15. B = \frac{\mu_0 I a}{2\pi b \sqrt{a^2 + 4b^2}} \cdot \left(1 - \frac{1}{k} \right) = \frac{\mu_0 I a}{4\pi b \sqrt{a^2 + 4b^2}} = 7 \text{ мкТл.}$$

$$10.16. B = \frac{\mu_0 n I}{2\pi r} \cdot \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{n} \right), \text{ в пределе } n \rightarrow \infty \quad B = \frac{\mu_0 I}{2r} \text{ - поле кругового тока}$$

(10.13).

$$10.17. B = \frac{\mu_0 I}{2\pi R} (\pi - \varphi + \operatorname{tg} \varphi) = 28 \text{ мкТл.}$$

$$10.18. B = \frac{\mu_0 e [V, r]}{4\pi r^3}, \quad B = \frac{\mu_0 e V \sin \alpha}{4\pi r^2} = 150 \text{ мкТл.}$$

$$10.19. B = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{e^2}{2R^2 \sqrt{\pi \epsilon_0 m_e R}} = 125 \text{ Тл.}$$

$$10.20. \vec{B} = \frac{\mu_0}{2} [\vec{j}, \vec{a}].$$

§11. Закон Ампера. Сила Лоренца

$$11.5. B = \frac{\Delta m g l}{N I S} = 0,2 \text{ Тл.}$$

$$11.6. F = \frac{\mu \mu_0 I_1 I_2}{2\pi a} = 2 \cdot 10^{-7} \text{ Н} = 0,2 \text{ мкН.}$$

$$11.7. F_1 = \frac{\mu_0 I^2}{4R} = 25 \text{ мкН.}$$

$$11.8. F = \frac{\mu_0 a^2 I_1 I_2}{2\pi b(b+a)} = 5 \text{ мкН.}$$

$$11.9. a = 2g \sin \alpha - \frac{IBl}{m} = 5,2 \text{ м/с}^2.$$

$$11.10. B_r = \frac{2h}{l^2} \sqrt{\frac{2Um_e}{e}}.$$

$$11.11. I = \frac{mg}{N\pi RB}.$$

$$11.12. h = \frac{V}{\gamma B} (1 - \cos \alpha) = 28 \text{ мм.}$$

$$11.13. V_{op} = \frac{2V}{\pi} \cdot \frac{B_2 - B_1}{B_2 + B_1}.$$

$$11.14. T = \frac{2\pi m_p}{|e|B} = 13,1 \text{ мс.}$$

$$11.15. M_r^{(1)} = \frac{m_1 N_A}{10^{-3}} = \frac{eB^2 N_A}{10^{-3} \cdot 2u} \cdot R_1^2 = 36, M_r^{(2)} = \frac{eB^2 N_A}{10^{-3} \cdot 2u} \cdot R_2^2 = 40.$$

$$11.16. v = \frac{u}{Bd} = 2 \text{ м/с.}$$

$$11.17. \frac{F_m}{F_g} = \mu_0 \epsilon_0 v^2 = \left(\frac{v}{c}\right)^2 = 1 \cdot 10^{-6}.$$

$$11.18. n = \frac{jB}{eE} = 2,5 \cdot 10^{28} \text{ м}^{-3}, n_A = \frac{\rho N_A}{M} = 2,54 \cdot 10^{28} \text{ м}^{-3}, \frac{n}{n_A} = 0,984.$$

$$11.19. R = \frac{M}{\eta \rho e N_A} = 2,5 \cdot 10^{-10} \text{ м}^3 / (\text{А} \cdot \text{с}).$$

$$11.20. \eta = k \frac{M_{Al} \rho_{Cu}}{M_{Cu} \rho_{Al}} \approx 2,5.$$

$$11.21. \Delta u_x = \frac{Vjd}{en} = \frac{BIM}{ea\rho N_A} = 2,2 \text{ мкВ}.$$

§12. Электромагнитная индукция

$$12.3. \text{ а) Против часовой стрелки, б) по часовой стрелке, в) } q = \frac{Ba^2}{R}.$$

12.5. Через некоторое время после начала движения шарик будет падать с постоянной установившейся скоростью. Его движение сходно с падением дробинок в вязкой среде.

$$12.7. N_1 = \frac{u_1}{u_2} N_2 = 2200.$$

12.8. а) синусоидальное со сдвигом фаз на $\pi/2$; б) постоянный сигнал с периодическими всплесками в моменты времени $T, 2T, \dots$; в) нулевой сигнал с периодическими всплесками в моменты времени $T, 2T, \dots$

12.9. Меандр - см. рис. 12.3, в, $I_1 = \frac{1}{R} \mu_0 S n \frac{2I_0}{\tau} = 32 \text{ мА}$. $P = I_1^2 R \approx 0,32 \text{ мВт}$.

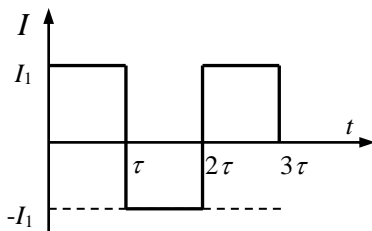
$$12.10. B = \frac{qR}{S} = 50 \text{ мкТл}.$$

$$12.11. Q = \frac{a^3 k^2 S \tau}{4\rho} = 0,44 \text{ мДж}.$$

$$12.12. q = \frac{\mu_0 I}{4\pi\rho} \ln\left(\frac{b+a}{b-a}\right).$$

$$12.13. I = \frac{2\mathcal{E} + BL^2\omega}{2(R+r)}.$$

12.14. $V(t) = \frac{mgR}{k^2 a^4} (1 - e^{-t/\tau})$, где $\tau = \frac{k^2 a^4}{mR}$. Установившаяся скорость движения $V_0 = \frac{mgR}{k^2 a^4}$.



$$12.16. F = \frac{Q}{V}.$$

$$12.17. \omega = \frac{2u}{Bl^2} = 40 \text{ рад/с}.$$

$$12.18. V = \frac{mgR}{B^2 l^2} (\sin \alpha - \mu \cos \alpha).$$

$$12.19. \tau = \sqrt{\frac{2L}{a}}, \text{ где } a = \frac{mg(\sin \alpha - \mu \cos \alpha)}{m + CB^2 l^2}.$$

$$12.20. Q = \frac{2B^2 V L^2 \operatorname{tg} \alpha}{\rho}.$$

$$12.21. \text{Ток направлен против часовой стрелки, } Q = \frac{BV \sin \alpha}{\rho(1 + \sin \alpha)}.$$

$$12.22. \mathcal{E}_{ind} = \frac{\mu_0 I a^2 \cdot v}{2\pi x(x+a)}.$$

$$12.23. I_{ind} = \frac{\mu_0 I_0 V}{2\pi R} \ln \frac{b}{a}, F = \frac{\mu_0^2 I_0^2 V}{4\pi^2 R} \ln^2 \frac{b}{a}, x = \frac{l}{\ln \frac{b}{a}},$$

$$P = \frac{\mu_0^2 I_0^2 V^2}{4\pi^2 R} \ln^2 \frac{b}{a} = I_i^2 R.$$

$$12.24. V = \frac{|m_1 - m_2| R g}{4Bl^2}.$$

§13. Самоиндукция. Взаимоиндукция. Энергия магнитного поля

13.4. При замыкании цепи L_2 вспыхивает мгновенно, а L_1 постепенно с заметным запаздыванием. При быстром переключении полярности напряжения блока питания лампочка L_1 практически перестает светиться³⁾.

³⁾ Последнее демонстрирует проявление индуктивного сопротивления переменному току.

$$13.6. I(t) = \frac{\mathcal{E}}{R} \left(1 - e^{-\frac{R}{L}t} \right), \quad \tau_{0,99} = \frac{L}{R} \ln \frac{I_0}{I(\tau_{0,99})} \approx 4,6 \text{ с.}$$

$$13.6. L_1 = \frac{\mu_0}{\pi} \left(\frac{1}{2} + \ln \frac{b}{a} \right) \approx 1,4 \text{ мкГн/м.}$$

$$13.7. I(t) = I_0 \left(1 - e^{-\frac{R}{L}t} \right), \quad \tau_1 \approx 7 \text{ мкс}, \tau_2 \approx 14 \text{ мкс}, \tau_2/\tau_1 = 2.$$

$$13.8. \text{ а) } L_x = \frac{R\Delta q}{I} = 0,2 \text{ Гн. б) Подбором исходной силы тока через катушки}$$

I_0 и I_x до размыкания ключа (меняя напряжение питания) добиться одинакового начального отклонения («броска») стрелки микроамперметра после размыкания ключа (т.е. одинаковых Δq). Тогда $L_x = \frac{I_0}{I_x} L_0$.

$$13.9. L_1 = \frac{\mu\mu_0}{2\pi} \ln \frac{b}{a} \approx 0,36 \text{ мкГн/м.}$$

$$13.10. L_{12} = \mu\mu_0 nNS.$$

$$13.11. L_{12} = \frac{\Delta q R}{I} = 2 \text{ нГн.}$$

$$13.12. L_{12} = L_{21} = \mu\mu_0 \frac{N_1 N_2}{l} S.$$

$$13.13. L_{12} = \sqrt{L_1 L_2} = 0,6 \text{ Гн.}$$

$$13.14. I_2 = \frac{1}{R_2} \sqrt{L_1 L_2} \frac{I_1}{\Delta t} = 0,1 \text{ А.}$$

$$13.15. W_1 = \frac{\mu\mu_0 I^2}{4\pi} \left(\frac{1}{4} + \ln \frac{b}{a} \right) \approx 0,2 \text{ мкДж.}$$

$$13.16. I = \frac{l}{N} \sqrt{\frac{2\omega}{\mu\mu_0}} = 1 \text{ А}, W = 1,26 \text{ мДж.}$$

$$13.17. \Delta t = \frac{L}{2R} = 0,05 \text{ с.}$$