Задача № 6а

Определение момента инерции маятника Максвелла

При подготовке к выполнению этой задачи следует ознакомиться с теорией, используя пособия из списка литературы, рекомендованной по курсу, например:

1. П.К. Кашкаров, А.В. Зотеев, А.Н. Невзоров, А.А. Склянкин. «Задачи по курсу общей физики с решениями. *«Механика. Электричество и магнетизм»*, М., изд. МГУ§ 3 учебного пособия.
2. А.В. Зотеев, А.А. Склянкин. Лекции по курсу общей физики. Механика. Электричество и магнетизм. Москва, Физический факультет МГУ. 2014.
3. И.В. Савельев «Курс физики», т.1, М. Наука, глава «Механика твёрдого тела».

1. Цель работы

Экспериментальное ознакомление с движением твёрдого тела (ТТ) на примере плоского движения маятника Максвелла и определение его момента инерции.

Идея эксперимента

В эксперименте используется маятник Максвелла – устройство, состоящее из массивного диска, закрепленного на оси, подвешенной на двух нерастяжимых нитях. Маятник способен совершать колебательные движения вверх–вниз, и при этом все его точки перемещаются, оставаясь в плоскостях, параллельных некоторой неподвижной вертикальной плоскости. Таким образом, маятник Максвелла совершает плоское движение.

2. Теоретическая часть

Если твёрдое тело совершает **поступательное движение**, то все его точки движутся по одинаковым траекториям и в любой момент времени имеют одинаковые кинематические характеристики. Следовательно, в этом случае достаточно описать движение центра масс тела, используя второй закон Ньютона и кинематические законы равнопеременного движения.

Центр масс тела – это точка, положение которой определяются равенством:

$$\vec{r}_c = \frac{\sum_{i=1}^{n} \Delta m_i \vec{r}_i}{\sum_{i=1}^{n} \Delta m_i}, \tag{6.1}$$

где $\vec{r}_i$ – радиус вектор i – го малого элемента, на которые можно разбить тело, Δm_i – масса этого элемента. Очевидно масса всего тела $m = \sum_{i=1}^{n} \Delta m_i$, тогда декартовы координаты центра масс равны:

$$x_c = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{n} m_i x_i\,; \qquad y_c = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{n} m_i y_i\,; \qquad z_c = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{n} m_i z_i\,. \tag{6.1,a}$$

Одним из замечательных свойств этой точки является то, зная скорость центра масс можно находить импульс твёрдого тела. Продифференцировав равенство (6.1), с учётом определения импульса системы материальных точек

$$p = \sum_{i=1}^{n} \Delta m_i \vec{V}_i\,, \tag{6.2}$$

легко доказать равенство $\vec{p}_c = m\vec{V}_c$:

$$m\vec{V}_c = m\dot{\vec{r}}_c = \sum_{i=1}^{n}(\Delta m_i \dot{\vec{r}}_i) = \sum_{i=1}^{n}(\Delta m_i \vec{V}_i) \equiv \vec{p}\,. \tag{6.3}$$

В инерциальной системе отсчёта центр масс тела движется также как материальная точка массы m под действием всех внешних сил приложенных к телу (теорема о движении центра масс):

$$\vec{a}_c = \frac{\sum_{i=1}^{n}\vec{F}_i}{m}\,. \tag{6.3}$$

Для анализа **вращательного и плоского движений** твёрдого тела вводятся дополнительные понятия.

- ***Момент силы* F *относительно точки* пространства *O***:

$$\vec{N} = [\vec{r},\vec{F}]\,, \tag{6.4}$$

где **r** – радиус-вектор проведенный из точки *O* в точку приложения силы **F**.

- ***Момент импульса материальной точки относительно точки O***:

$$\vec{M} = [\vec{r},\vec{p}] = [\vec{r},m\vec{V}]. \tag{6.5}$$

- ***Момент импульса твёрдого тела относительно точки O***:

$$\vec{M} = \sum_{i=1}^{n}[\vec{r}_i,\vec{p}_i] = \sum_{i=1}^{n}[\vec{r}_i,\Delta m_i \vec{V}_i] \tag{6.6}$$

где $\vec{r}_i$ – радиус вектор i – го элемента ТТ массой Δm_i, проведённый из точки O.

- В *инерциальной системе отсчёта* (ИСО) производная по времени от момента импульса твёрдого тела относительно неподвижной в этой СО точки *O* равна суммарному моменту внешних сил, действующих на это тело, относительно той же точки *O*:

$$\frac{d\vec{M}}{dt} = \sum_{i=1}^{n}\vec{N}_i^{внеш}\,. \tag{7}$$

При описании ***вращения*** ТТ ***вокруг неподвижной оси*** векторы моментов импульса **M** и внешних сил $\mathbf{N}_i^{внешн}$ можно спроецировать на некоторую ось *OZ*, содержащую точку *O*. Указанные проекции называют ***моментами относительно оси*** *(или “осевыми моментами”)*. Это позволяет перейти к скалярной форме записи **уравнения моментов**:

$$\frac{dM_z}{dt} = \sum_{i=1}^{n} N_{zi}^{внеш} . \qquad (6.8)$$

Можно показать, что осевой момент импульса равен $M_z = \left(\sum_{i=1}^{n} \Delta m_i R_i^2\right)\omega = I_z\omega$.

Здесь I_z – ***момент инерции твёрдого тела*** относительно оси Z, который находится суммированием моментов инерции малых элементов, составляющих ТТ:

$$I_Z = \sum_{i=1}^{n} \Delta m_i R_i^2 , \qquad (6.9)$$

где R_i – расстояние от i – ого элемента до оси OZ.

С учётом этого из равенства (6.8) для систем с постоянным моментом инерции следует справедливость ***уравнения динамики вращательного движения твёрдого тела***:

$$I_z\beta = \sum_{i=1}^{n} N_{zi}^{внеш} . \qquad (6.10)$$

Здесь β – угловое ускорение. Данное равенство является аналогом второго закона Ньютона, но для вращательного движения ТТ.

При любом разбиении **плоского движения твёрдого тела** на поступательное и вращательное ось вращения ориентирована перпендикулярно плоскостям, в которых происходит движение точек ТТ. Однако при наличии внешних сил эта ось движется с ускорением и уравнение, полученное для случая оси, неподвижной относительно инерциальной СО, вообще говоря, неприменимо. В единственном случае, когда ось проходит через центр масс тела, уравнение (6.10) сохраняет свою форму, и для ускоренного движения:

$$I_c\beta = \sum_{i=1}^{n} N_{ci}^{внеш} , \qquad (6.10,a)$$

где индекс “*c*” отражает отмеченное выше условие выбора оси вращения. Поступательная компонента движения описывается уравнением (6.3).

Как мы видели, при анализе как вращательного, так и плоского движения используется момент инерции ТТ относительно оси. В ряде случаев для вычисления моментов инерции тел оказывается полезной теорема о параллельных осях (**теорема Гюйгенса-Штейнера**). Её содержание состоит в следующем: если известен момент инерции твёрдого тела относительно оси, **проходящей через его центр масс** I_c, то момент инерции относительно любой **параллельной** оси Z равен

$$I_z = I_c + mb^2, \qquad (6.11)$$

где m – масса тела, а b – расстояние между осями.

3. Экспериментальная установка

Маятник Максвелла (см. рис. 6.1) состоит из массивного диска *C*, закреплённого на оси *AB* (металлическом стержне круглого сечения), подвешенной на двух тонких нитях. Нити пропущены через два отверстия в планке *DE*, которая укреплена на массивном штативе. На середине планки имеется винт, которым нить закрепляется в нужном положении после уравнивания длин отрезков нити *AD* и *BE*. Нити тщательно, виток к витку, наматываются на стержень (от его концов к диску). Положение оси и расстояния, которые она проходит при движении маятника, измеряются по шкале K. После освобождения маятника он начинает движение из верхнего положения под действием силы тяжести: поступательное – вниз и вращательное – вокруг своей оси симметрии. Вращение, продолжаясь по инерции в низшей точке, когда нити уже размотаны, приводит вновь к наматыванию нитей на ось, а, следовательно, и к подъёму диска. Постепенно движение маятника вверх замедляется, он останавливается, снова начинается движение вниз. Такой колебательный характер движения вверх–вниз напоминает движение маятника, поэтому устройство и называется маятником Максвелла.

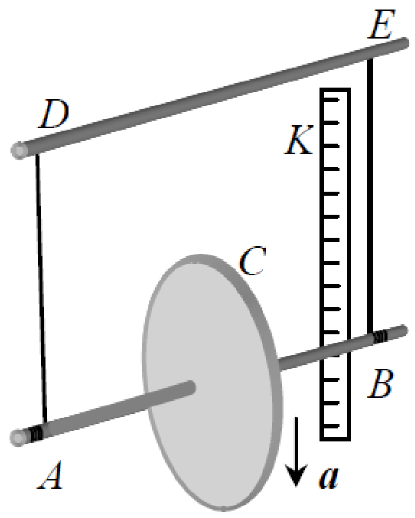

Рис. 6.1. Маятник Максвелла.

Согласно основным законам динамики поступательного и вращательного движений, пренебрегая силами трения и отклонением нитей от вертикали, запишем:

$$\begin{cases} ma = mg - 2T, & (6.13) \\ I_c\beta = 2Tr, & (6.14) \\ a = \beta r, & (6.15) \end{cases}$$

где m – масса маятника, I_c – момент инерции маятника относительно его оси симметрии, r – радиус намотки нити на стержень, T – сила натяжения каждой из нитей, g – ускорение свободного падения, a – ускорение центра масс маятника, β – угловое ускорение диска.

Эти уравнения применимы как к первой стадии движения маятника вниз, так и к подъёму вверх. Однако кинематические начальные условия для этих стадий различны. На стадии движения вниз начальная скорость равна нулю, при движении вверх она отлична от нуля, т.к. в нижней точке направление поступательного движения практически мгновенно меняется на противоположное. Используя равенства (6.13), (6.14), (6.15), а также кинематический закон равнопеременного движения, можно записать

$$\begin{cases} I_c = \dfrac{m}{a}(g-a)r^2, \qquad \left\{ \text{или } I_c = mr^2\left(\dfrac{g}{a} - 1\right) \right\} & (6.16) \\ 2T = m(g-a), & (6.17) \\ a = \dfrac{2h}{\tau^2}, & (6.18) \end{cases}$$

где τ – время движения маятника от начала движения до момента прохождения им нижнего положения, h – смещение оси маятника за это время. При $a << g$ можно записать приблизительные равенства:

$$I_c = \frac{mgr^2}{a}, \qquad (6.19)$$

$$2T = mg\ .\tag{6.20}$$

Отметим, что модуль и направление ускорения и сил натяжения не зависят от того, куда движется маятник – вверх или вниз. Тогда как скорость изменяет свое направление при колебаниях маятника. Высота, на которую поднимется маятник при движении вверх, будет меньше, чем первоначальная. Разность этих высот характеризует убыль механической энергии системы в результате работы действующих в системе неконсервативных сил.

Доля потерянной за цикл механической энергии равна

$$\eta = \frac{\Delta\mathcal{E}}{\mathcal{E}} = \frac{mg(h-h_1)}{mgh} = \frac{\delta h}{h},\tag{6.21}$$

где $\delta h = h - h_1$, h – исходная высота, с которой опускается маятник; h_1 – высота, на которую он поднимается после одного цикла колебаний.

4. Порядок выполнения работы

Описание установки

Схема установки изображена на рис. 6.2. В основании (1) закреплена колонка (2), к которой прикреплён неподвижно верхний кронштейн (3). На верхнем кронштейне находится электромагнит (4), фотоэлектрический датчик (5) и вороток (6) для закрепления бифилярной подвески маятника. К нижнему кронштейну прикреплен второй фотоэлектрический датчик (7). Маятник Максвелла состоит из диска (8), закреплённого туго на оси (9) и подвешенного на нитях.

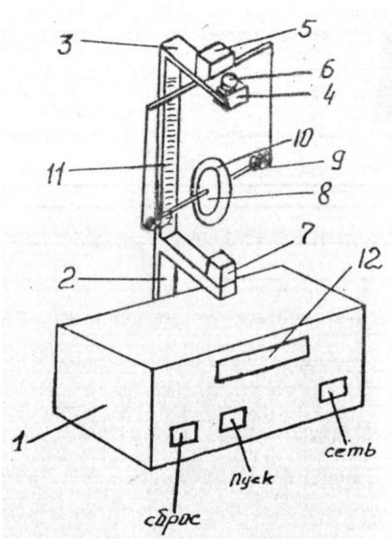

Рис. 6.2. Экспериментальная

На диске укреплено кольцо (10), изменяющее момент инерции системы. Маятник с кольцом удерживается в верхнем положении электромагнитом. Высота опускания маятника определяется по миллиметровой шкале (11), находящейся на колонке прибора. Для измерения высоты опускания маятника Δh^* рекомендуется воспользоваться чертёжным прямоугольным треугольником. В состоянии, когда нить маятника раскручена полностью, определяют положение крайней верхней точки маятника. Для этого один из катетов треугольника располагают вдоль шкалы отсчёта так, чтобы второй катет касался маятника сверху, и записывают положение вершины прямого угла на шкале h_2^*. Затем, наматывая нить маятника на его ось, фиксируют его с помощью электромагнита в верхнем, исходном положении и аналогичным способом определяют положение на шкале наинизшей точки маятника h_1^*. Высоту опускания маятника вычисляют по формуле

$$h = h_2^* - h_1^* + d_к$$

где $d_к$ – диаметр кольца маятника (задан на установке). Миллисекундомер (12) предназначен для измерения времени движения маятника Максвелла. Включение и выключение миллисекундомера осуществляется двумя фотодатчиками, находящимися соответственно в начале и в конце движения маятника. Клавиша "ПУСК" отключает питание электромагнита, и свободный маятник начинает движение.

Световой поток лампочки верхнего фотодатчика попадает на фотоэлемент и с этого момента схема счётчика времени начинает работать. Измерение времени продолжается до момента прерывания маятником светового потока лампочки нижнего фотодатчика. Этот сигнал отключает счётчик времени. Счётчик времени представляет собой электронные часы, собранные на интегральных схемах, с устройством запуска и остановки.

Момент инерции маятника Максвелла в данной задаче экспериментально определяется косвенным образом. Воспользовавшись равенствами (6.18) и (6.19), получим расчётную упрощённую формулу:

$$I_c = \frac{mgr^2\tau^2}{2h}. \tag{6.22}$$

Здесь m – масса маятника с кольцом, которая равна сумме

$$m = m_o + m_\partial + m_к, \tag{6.23}$$

где m_o – масса оси, m_∂ – масса диска, $m_к$ – масса кольца.

Массы диска, колец и оси указаны на самих элементах, диаметры оси и колец – на установке.

Меры предосторожности

В установке используется напряжение 220 В. Необходимо соблюдать общие правила по технике безопасности труда для устройств, в которых используется высокое напряжение.

Строжайше запрещается менять длину нити маятника!

В установке применяются чувствительные фотоэлектрические датчики. Недопустимы удары маятника по нижнему кронштейну, которые могут привести к порче фотоэлектрического датчика.

Нужно следить, чтобы при движении маятника (вверх и вниз) нить навивалась на ось симметрично, виток к витку. Несимметричное наматывание нити может привести к удару маятника.

Если маятник, начиная двигаться, вышел из вертикальной плоскости, его немедленно надо остановить, взяв в руки ось.

Упражнение 1. Определение момента инерции маятника Максвелла

1. Включить сетевой шнур установки в сеть 220 В.

2. Нажать клавишу "СЕТЬ", при этом индикаторы измерителя высвечивают цифры "НОЛЬ" и включаются лампочки обоих фотодатчиков.

3. На ось маятника симметрично, виток к витку, намотать нить подвески и фиксировать маятник при помощи электромагнита.

4. Проверить, совпадает ли нижняя грань кольца с нулем шкалы отсчёта. Если совпадения нет, обратиться к лаборанту.

5. Нажать клавишу "ПУСК" миллисекундомера и проверить, попадает ли световой луч нижнего фотодатчика на маятник. Если попадания нет, обратиться к лаборанту.

6. Отжать клавишу "ПУСК" миллисекундомера.

7. Снова смотать на ось маятника нить подвески симметрично и равномерно и фиксировать маятник электромагнитом, стараясь при этом, чтобы нить не была слишком скручена.

8. Повернуть маятник в направлении движения на угол 5° для ослабления нити.

9. Нажать клавишу "СБРОС".

10. Нажать клавишу "ПУСК".

11. Прочитать измеренное значение времени τ движения маятника вниз и занести его в таблицу.

12. Повторить измерения времени **ещё четыре раза** и данные занести в таблицу.

13. По шкале на колонке определить длину h, на которую опускается маятник, и записать результат в стандартной форме с учётом приборной погрешности. Высота h определяется как разность верхнего и нижнего отсчётов по шкале, полученных при помощи угольника, как это описано в разделе «Порядок проведения работы».

14. Для каждого значения времени опускания маятника τ_i по формуле (6.22) вычислить момент инерции маятника Максвелла и занести в таблицу. Вычислить среднее значение момента инерции:

$$I_c = \frac{\sum_{i=1}^{5} I_{ci}}{5}.$$

15. Оценить погрешности определения момента инерции маятника и записать результат эксперимента в стандартной форме. Погрешность измерения даёт усреднение модулей частных отклонений от среднего – т.е. колонки 4.

Таблица 6.1. **Экспериментальные данные**

1	2	3	4	5	6
№ опыта, i	τ_i, с	I_{ci}, …	$\lvert\Delta I_{ci}\rvert$, …	h_5, мм	δh, мм
1					
2					
3					
4					
5					
Среднее значение					

Упражнение 2. Определение доли убыли механической энергии

1. Повторить пункты 6, 7, 8, 9 и 10 упражнения 1 и, отсчитав пять полных колебаний маятника, измерить разность высот δh.

2. Измерение величин h_5 и δh произвести пять раз и занести в таблицу.

3. Для повышения точности измерений рекомендуется взять пять периодов колебаний маятника. Тогда доля механической энергии, потерянной за один период колебаний

$$\eta = \frac{\delta h}{5h} = \frac{h - h_5}{5h}, \tag{6.24}$$

Здесь h – высота опускания маятника в первом периоде, h_5 – высота, на которую он поднимается при завершении пятого цикла колебаний.

4. Оценить погрешность эксперимента и записать результат.

5. Основные итоги работы

В результате выполнения работы должны быть определён момент инерции маятника и доля убыли механической энергии маятника Максвелла за один цикл его колебательного движения. Все результаты должны быть представлены в стандартном виде с указанием погрешности эксперимента.

Контрольные вопросы

1. Что такое «твёрдое тело»?

2. Какие типы механического движения выделяют при рассмотрении движения твёрдого тела?

3. Что такое «поступательное»/«вращательное» движение твёрдого тела?

4. Что такое момент силы относительно неподвижной точки пространства? Относительно оси, проходящей через эту точку?

5. Что такое момент импульса твёрдого тела относительно неподвижной точки пространства? Относительно оси, проходящей через эту точку?

6. Запишите уравнение моментов для системы материальных точек (твёрдого тела) относительно неподвижной в ИСО точки пространства. Относительно оси, проходящей через эту точку.

7. Дайте определение момента инерции твёрдого тела относительно оси.

8. Как связаны момент импульса твёрдого тела относительно неподвижной оси вращения и угловая скорость вращения относительно этой оси?

9. Сформулируйте теорему Гюйгенса – Штейнера.

10. В чём состоит метод определения момента инерции твёрдого тела, который используется в данной работе?

12. Опишите устройство лабораторной установки.

13. Расскажите о порядке выполнения лабораторной работы и проведении измерений.

14. Рассчитайте момент инерции тела по указанию преподавателя.

---

*) ***Указания по обработке результатов***

1. В упражнении 1 погрешность измерений момента инерции I_c можно оценить, усредняя модули частных отклонений от среднего по результатам 5 измерений (колонка 4).

2. Проводя оценки результатов косвенных измерений величин I_c и η, необходимо учесть также наличие приборных погрешностей прямых измерений h_1, h_5 и τ.

После чего экспериментальный результат должен быть записан в стандартной форме.

3. Возможное дополнительное задание по указанию преподавателя:

Используя равенство (6.18), рассчитать экспериментальное значения ускорения центра масс маятника a при его движении вниз. Оценив погрешность косвенных измерений, записать этот результат в стандартной форме.