

Задача № 37

Магнитная индукция системы катушек
(катушки Гельмгольца)

При подготовке к выполнению этой задачи следует ознакомиться с теорией, используя пособия из списка литературы, рекомендованной по курсу, например:

1. П.К. Кашкаров, А.В. Зотеев, А.Н. Невзоров, А.А. Склянкин. «Задачи по курсу общей физики с решениями. «Механика. Электричество и магнетизм», М., изд. МГУ, § 10 учебного пособия.

2. А.В. Зотеев, А.А. Склянкин. Лекции по курсу общей физики. Механика. Электричество и магнетизм. Москва, изд. Юрайт, 2026.

3. И.В. Савельев «Курс физики», т. 2, М. Наука, глава «Магнитное поле в вакууме», §§ 40, 42, 47.

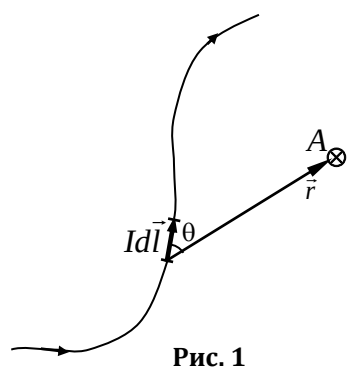
1. Цель работы

Две одинаковые катушки с постоянным током, расположенные на определенном расстоянии друг от друга на одной оси, позволяют получить область магнитного поля с высокой степенью однородности.

2. Теоретическая часть

Закон Био-Савара-Лапласа. Магнитное поле кругового витка с током

• Силовое действие магнитного поля на проводники с током и движущиеся заряды определяет вектор магнитной индукции $\vec{B}$. Чтобы найти вектор $\vec{B}$



поля проводника с током произвольной формы, можно использовать закон Био-Савара-Лапласа (БСЛ). Он позволяет определить вклад в общую магнитную индукцию $\vec{B}$ магнитного поля $d\vec{B}$ от каждого элемента тока $Id\vec{l}$ в произвольной точке пространства A, задаваемой радиус-вектором $\vec{r}$ по отношению к данному элементу (см. рис.

1):

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I[d\vec{l}, \vec{r}]}{r^3}, \quad (1)$$

где μ_0 – магнитная постоянная, равная $4\pi \cdot 10^{-7} \text{ Гн/м}$ (или Н/А^2). При этом модуль этого вектора равен

$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Idl \cdot \sin \theta}{r^2}. \quad (2)$$

Для нахождения результирующего магнитного поля $\vec{B}$ в точке A следует, пользуясь *принципом суперпозиции полей*, найти сумму векторов $d\vec{B}$ от всех элементов тока, на которые предварительно разбивается проводник – источник поля. Таким образом, **принципиально** может быть решён вопрос для проводников произвольной формы. Как реализуется этот подход **практически**, мы покажем ниже на примере кольцевого проводника – одного витка катушек Гельмгольца, магнитное поле которых изучается в данной задаче.

Будем считать, что толщина катушек существенно меньше их радиуса. Для упрощённого модельного анализа заменим катушку “эквивалентным круговым током” – круглым витком тонкой проволоки с радиусом, равным радиусу катушки и силой тока, равной произведению числа витков катушки N на силу тока I , протекающего по обмотке катушки.

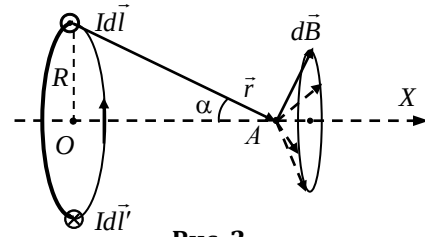


Рис. 2

Определим, прежде всего, направление векторов $d\vec{B}$ от элементов тока $Id\vec{l}$ в рассматриваемом случае. По закону БСЛ оно определяется векторным произведением $[d\vec{l}, \vec{r}]$, то есть векторы $d\vec{B}$ перпендикулярны как вектору $d\vec{l}$ так и $\vec{r}$. Это означает, что векторы $d\vec{B}$ располагаются “веером” (по поверхности конуса) вокруг оси симметрии кольца с вершиной в точке A (см. рис. 2). Угол раствора веера равен $2 \cdot (\pi/2 - \alpha)$ (α – угол, под которым элемент тока виден из точки A , одинаковый для всех элементов тока). Для каждой пары диаметрально расположенных напротив друг друга элементов тока при сложении их вкладов $d\vec{B}$ в общую магнитную индукцию в точках на оси кольца останется лишь компонента, направленная вдоль оси – см. рис.2. Очевидно, что суммирование даст результирующий вектор $\vec{B}$, направленный вдоль оси OX .

Определим модуль dB вектора магнитной индукции от элемента тока на оси кольца OX на расстоянии x от его центра. Угол между вектором $Id\vec{l}$ и радиус-вектором $\vec{r}$ для любого элемента кольца равен $\pi/2$, $\sin\theta = 1$, поэтому согласно закону БСЛ (1) для любой точки оси OX можно записать:

$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{Idl}{r^2} = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{Idl}{R^2 + x^2}, \quad (3)$$

Угол, который каждый вектор $d\vec{B}$ образует с осью OX равен $\pi/2 - \alpha$. Следовательно, проекция этого вектора на ось равна:

$$\begin{aligned} dB_x &= \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{Idl}{R^2 + x^2} \cdot \cos(\pi/2 - \alpha) = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{Idl}{R^2 + x^2} \cdot \sin \alpha = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{Idl}{R^2 + x^2} \cdot \frac{R}{\sqrt{R^2 + x^2}} = \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{IR}{(R^2 + x^2)^{3/2}} \cdot dl \end{aligned}$$

В последнем равенстве длина элемента dl вынесена множителем в конце строчки, поскольку следующим шагом остаётся лишь выполнить суммирование полученных проекций dB_x . Суммирование ряда бесконечно малых величин математически оформляется в виде интеграла:

$$B = \int_L dB_x = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{IR}{(R^2 + x^2)^{3/2}} \cdot \int_L dl = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \cdot \frac{2\pi R^2}{(R^2 + x^2)^{3/2}} = \frac{\mu_0}{2} \cdot \frac{IR^2}{(R^2 + x^2)^{3/2}}.$$

Здесь учтено, что интеграл $\int_L dl$ – не что иное, как длина окружности равная $2\pi R$. Отсюда окончательно получаем необходимый нам результат:

$$B(x) = \frac{\mu_0}{2} \cdot \frac{IR^2}{(R^2 + x^2)^{3/2}}. \quad (4)$$

Обратим внимание, что на больших расстояниях ($x \gg R$) индукция магнитного поля витка убывает обратно пропорционально **кубу** расстояния x от него (аналогично напряжённости электрического поля диполя).

$$B(x) = \frac{\mu_0}{2} \frac{IR^2}{x^3}. \quad (5)$$

Два соосно-расположенных на расстоянии равном их радиусу витка (либо тонкие по сравнению с собственным радиусом катушки) с равными по величине токами, текущими в одинаковых направлениях, образуют систему, называемую катушками Гельмгольца (КГ). Найдём магнитную индукцию системы колец в точке, расположенной на оси системы посередине между ними.

Отметим, прежде всего, что вектор магнитной индукции $d\vec{B}$ поля каждого из колец смотрит в одну и ту же сторону

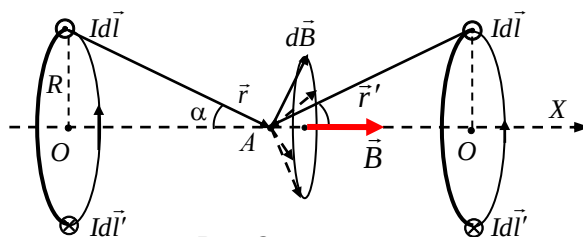


Рис. 3

– вправо при выбранном нами направлении тока в катушках. Понять это помогают построения, представленные на рис. 3. При этом модуль магнитной индукции на одинаковом расстоянии $R/2$ посередине между катушками очевидно равен:

$$B(x) = B_1(R/2) + B_2(R/2) = 2B_{1,2}(R/2), \quad (6)$$

где B_1 и B_2 – одинаковые вклады в магнитную индукцию от каждой из катушек. Для системы из двух катушек состоящих из N витков с учётом результата (4) при $x = R/2$ получим для модуля вектора магнитной индукции:

$$B(x) = 2 \cdot \left(\frac{\mu_0}{2} \cdot \frac{NIR^2}{[R^2 + (R/2)^2]^{3/2}} \right) = \left(\frac{4}{5} \right)^{3/2} \cdot \mu_0 \frac{NI}{R}. \quad (7)$$

Отметим ещё один важный результат анализа магнитного поля катушек Гельмгольца. Можно показать, что **в центральной области** между катушками на их оси **поле практически однородно**. Доказательство мы не приводим. В данной работе мы предлагаем убедиться в этом экспериментально.

Измерение магнитного поля

Для измерения индукции магнитного поля в экспериментальной установке применяется полупроводниковый датчик на основе эффекта Холла. При протекании постоянного тока по проводнику, помещённому в магнитное поле, вектор индукции которого перпендикулярен направлению тока, в проводнике возникает электрическое поле, напряжённость которого перпендикулярна как направлению тока в проводнике, так и вектору магнитной индукции. Возникновение электрического поля связано с действием магнитной составляющей силы Лоренца на движущиеся внутри проводника заряды:

$$\vec{F} = q[\vec{v}, \vec{B}] \quad (8)$$

Как видно из равенства (8) возникающая сила направлена перпендикулярно как направлению движения зарядов, так и направлению вектора магнитной индукции и приводит к перемещению зарядов перпендикулярно проводнику при установлении тока. Это движение приводит к возникновению избыточных зарядов противоположных знаков на противоположных боковых поверхностях проводника, что сопровождается возникновением электрического поля. Процесс продолжается до тех пор, пока внутри проводника электрическая составляющая силы Лоренца в направлении, перпендикулярном установившемуся току, не станет компенсировать магнитную составляющую.

Таким образом, при установившемся постоянном токе внутри проводника электрическая и магнитная силы сбалансированы:

$$q\vec{E}_\perp = q[\vec{v}, \vec{B}] \quad (9)$$

Рассмотрим проводник прямоугольной формы. Выберем систему координат, как показано на рисунке 4. При движении положительного заряда магнитная составляющая F_L силы Лоренца будет направлена влево, что приведёт к возникновению избыточного положительного и отрицательного зарядов на правой и левой гранях соответственно. В этом случае электрическая составляющая силы Лоренца F_E будет направлена слева направо.

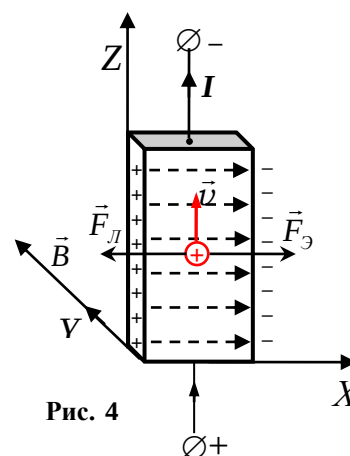
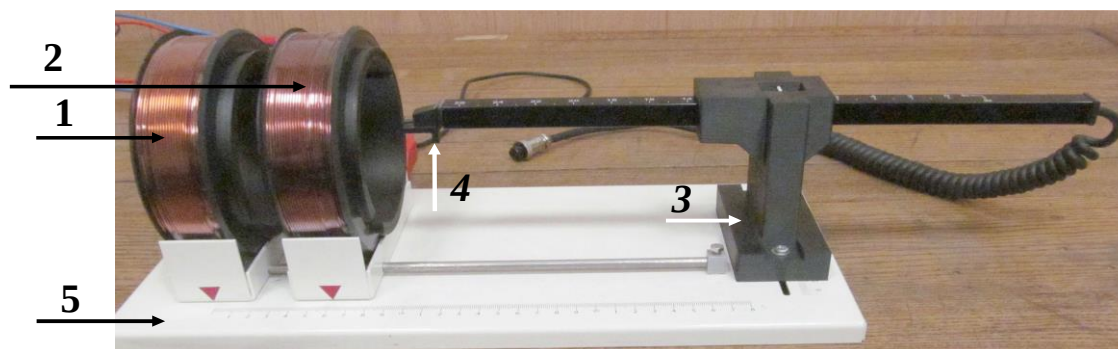


Рис. 4

Возникающая разность потенциалов на противоположных боковых поверхностях проводника пропорциональна как силе тока, протекающему через проводник, так и модулю вектора индукции магнитного поля, в котором он находится. Эта разность потенциалов может быть измерена вольтметром, что при поддержании постоянного тока в проводнике позволяет установить пропорциональность между измеряемой разностью потенциалов и величиной магнитной индукции в точке нахождения полупроводникового датчика. Измеряя разность потенциалов между правой и левой гранями при фиксированной силе тока в проводнике, можно определить модуль вектора индукции магнитного поля, в котором находится проводник: $U = kB$. Коэффициент пропорциональности определяют при калибровке датчика в магнитном поле с известным значением магнитной индукции. Используемый в работе магнитометр U33110 откалиброван непосредственно в единицах магнитной индукции – мТл.

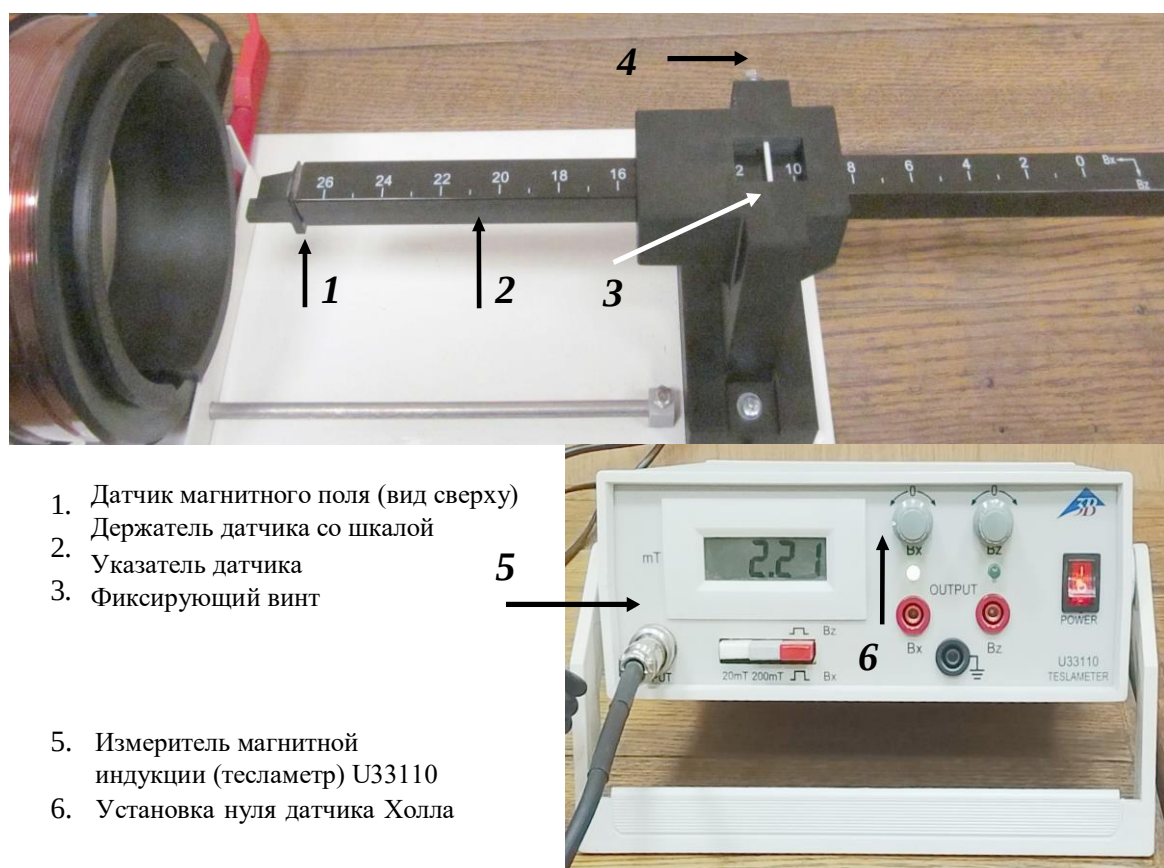
3. Экспериментальная установка

Рис. 5. Расположение катушек в экспериментальной установке



1. Неподвижная катушка 1	4. Датчик магнитного поля со шкалой «х» (вид сбоку)
2. Подвижная катушка 2	5. Опора катушек с нанесённой на ней шкалой «Х»
3. Держатель датчика	

Установка для проведения эксперимента включает: источник постоянного тока U33020, систему из 2 соосных катушек на направляющей, позволяющей изменять расстояние между катушками, датчик магнитного поля, работающий на эффекте Холла, тесламетр U33110. Основные блоки и приборы экспериментальной установки изображены на рисунках 5 – 7.



1. Датчик магнитного поля (вид сверху)
2. Держатель датчика со шкалой
3. Указатель датчика
3. Фиксирующий винт

5. Измеритель магнитной индукции (тесламетр) U33110
6. Установка нуля датчика Холла

Рис. 6. Измерительная часть установки



Рис. 7. Источник питания U33020

4. Порядок проведения работы

ВНИМАНИЕ: перед первым включением источника необходимо убедиться, что регуляторы силы тока (3) и напряжения (7) повернуты против часовой стрелки до упора (нулевые значения тока и напряжения). Для установки требуемого значения силы тока необходимо повернуть регулятор напряжения (7) по часовой стрелке примерно на 3/4 оборота, а затем плавным поворотом регулятора (3) установить требуемое значение силы тока через катушки. **Не превышать рекомендованных в задаче величин силы тока!**

Перед началом измерений под контролем лаборанта или преподавателя необходимо провести проверку (и установку, если необходимо) нуля измерителя индукции магнитного поля. Для этого при **выключенном** источнике тока необходимо добиться нулевых показаний прибора регулировкой $0/B_x$ на лицевой панели тесламетра U33110 (регулятор 5 на рис. 6).

В процессе расчётов надо помнить, что шкала «х» датчика магнитного поля (координата x) смещена относительно шкалы «X» на основании установки, так что «0» на шкале держателя датчика примерно соответствует центру системы катушек в геометрии Гельмгольца. Координата x неподвижной катушки 1: «-3», подвижной: «3,5».

Упражнение 1. Изучение магнитного поля, создаваемого одной катушкой с током

1. Подключить источник тока к **подвижной катушке 2** таким образом, чтобы красный провод от источника питания был подключен к черному гнезду, а синий – к красному. В этом случае датчик будет регистрировать непосредственно модуль магнитной индукции B_1 .

ВНИМАНИЕ: любое изменение электрической схемы установки выполняется при выключенном источнике тока и требует проверки преподавателем.

2. Установить подвижную катушку 2 на координату $X_{к2} = 6,3$ см по шкале на основании установки (5) (см. рис. 5). Это положение подвижной катушки соответствует конфигурации катушек Гельмгольца, исследуемой далее.

3. Включить источник тока и установить силу тока $I = 3$ А (записать в тетрадь).

4. Переместить датчик магнитного поля в крайнее левое положение внутри системы катушек (координата по шкале на держателе датчика равна $x = -5$ см). После установки датчика в нужное положение по указателю держатель датчика нужно зафиксировать винтом 4 сбоку и выждать примерно 3 сек перед снятием показаний с прибора U33110 (тесламетра – рис. 5). Последовательно выдвигая датчик с шагом в 1 см провести измерение $B_2(x)$ модуля вектора магнитной индукции для положений x датчика от -5 см до $+22$ см. Результаты заносить в **Таблицу 1** в колонку B_2 . Отметить в таблице координату, соответствующую максимальному значению магнитной индукции – соответствует положению датчика в центре катушки.

5. Уменьшить силу тока до нуля и выключить источник тока.

6. Будем считать параметры двух катушек одинаковыми. Тогда график зависимости $B_1(x)$ для неподвижной катушки можно получить, сместив «параллельным переносом» построенную по результатам проведённых измерений кривую $B_2(x)$ для подвижной катушки вдоль оси OX на расстояние $L_1 = 6,5$ см между центрами катушек^{*)}.

Таблица 1

Значения магнитной индукции $B_2(x)$ (измеренные экспериментально) и $B_1(x)$ (рассчитанные) вдоль оси для отдельных катушек 1 и 2

Центр подвижной катушки $X_{к2} = 6,3$ см Центр неподвижной катушки $X_{к1} = -0,2$ см Расстояние между центрами катушек $L_{к1} = R_2 = 6,5$ см Сила тока в катушке $I = 3$ А				
№	x , см	B_2 , мТл	B_1 , мТл (расчёт)	$B_1 + B_2$, мТл
1	-5,0			
2	-4,5			
...	...			
...	21,5			
...	22,0			

^{*)} Учитывая координату $X_{к1} = -0,2$ см, расстояние между центрами катушек определяется по формуле: $L_1 = X_{к2} - X_{к1} = 6,5$ см.

Одновитковая катушка

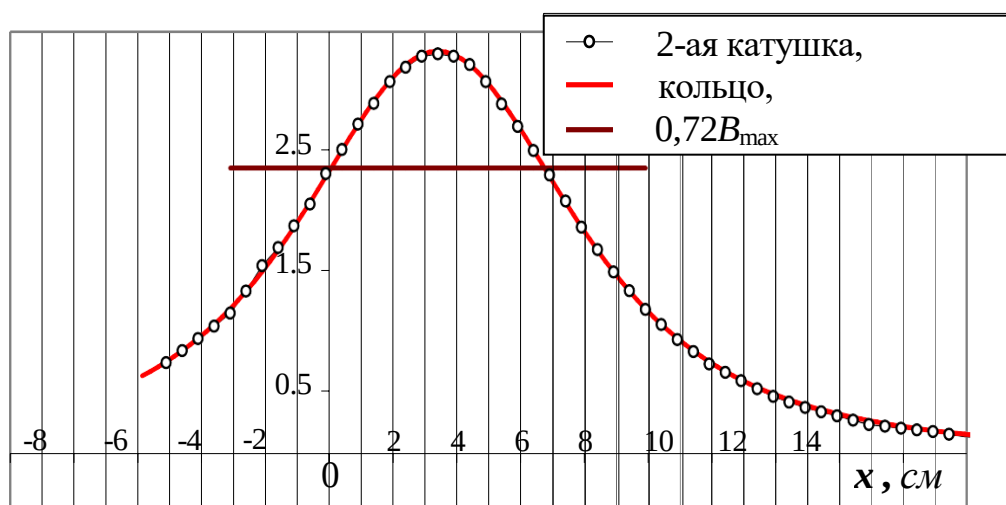


Рис. 8

Упражнение 2. Измерение модуля магнитной индукции на оси системы из двух катушек для расстояний между ними $L_{KT} = R$, (катушки Гельмгольца)

1. Подключить обе катушки последовательно к источнику тока: красный провод от источника питания подключить к чёрному гнезду неподвижной катушки, а синий провод от источника тока оставить подключенным к красному гнезду подвижной катушки, красное гнездо неподвижной катушки соединить с чёрным гнездом подвижной катушки дополнительным (черным) проводом.

ВНИМАНИЕ: любое изменение электрической схемы установки выполняется при выключенном источнике тока и требует проверки преподавателем.

2. Оставить подвижную катушку в положении с координатой $X_{K2} = 6,3$ см, отсчитываемую по шкале, нанесённой на основании подставки. Учитывая координату $X_{K1} = -0,2$ см, расстояние между центрами катушек будет равно: $L = X_{K2} - X_{K1} = 6,5$ см. При этом расстояние между центрами катушек будет равно их среднему радиусу R . *Такая система называется катушками Гельмгольца.*

3. Включить источник тока и установить силу тока $I = 3$ А.

4. Переместить датчик в крайнее левое положение внутри системы катушек (координата по шкале на держателе датчика соответствует значению -5 см). Постепенно выдвигая датчик с шагом в 1 см провести измерение модуля $B_{KT}(x)$ индукции магнитного поля для положений x датчика от -5 см до $+22$ см. Результаты заносить в **Таблицу 2** в колонку B_{KT} . Отметить в таблице координату,

соответствующую положению датчика в центре системы катушек Гельмгольца.

Упражнение 3*). Измерение модуля магнитной индукции на оси системы из двух катушек для расстояний между ними L_1 и L_2

Упражнение 3а (3б)

1. По указанию преподавателя выполняются измерения ещё для 1 – 2 положений $X_{к2}$ подвижной катушки. Сдвинуть катушку 2 в положение $X_{к2} = 8,3$ см (Упражнение 3а) или $X_{к2} = \dots$ см (вплотную к неподвижной – Упражнение 3б). Подключение катушек к источнику остается без изменения.

Повторить измерения аналогичные пунктам 3 – 4 из Упражнения 2. Для каждого нового взаимного расположения катушек рекомендуется создать отдельную таблицу.

Таблица 3а

Центр неподвижной катушки $X_{к1} = -0,2$ см Центр подвижной катушки $X_{к2} = 8,3$ см Расстояние между центрами катушек $L_{СК1} = L_2 = 8,5$ см				
№	x (см)	$B_{СК1}, мТл$	$B_{СК2}, мТл$	
1	-5,0			
...	...			

Обработка результатов

Упражнение 1

Магнитная индукция одной катушки с током

Построить график зависимости модуля $B_2(x)$ магнитной индукции на оси одиночной подвижной катушки (катушка 2) от координаты датчика. Соединить экспериментальные точки **гладкой** кривой линией.

Аппроксимировать тонкую многослойную катушку кольцом со средним радиусом $R_3 = 6,5$ см, числом витков $N = 100$, током I и центром катушки $x_{к2} = 3,7$ см по шкале датчика (параметры катушки могут несколько различаться для разных установок), используя соответствующую формулу (4) для модуля магнитной индукции

$$B = \frac{\mu_0}{2} \cdot \frac{IR_3^2}{[R_3^2 + (x - x_{к2})^2]^{3/2}} = \frac{B_{\max}}{[1 + (x - x_{к2})^2/R_3^2]^{3/2}}, \quad B_{\max} = \frac{\mu_0}{2} \cdot \frac{NI}{R_3}. \quad (10)$$

где $B_{\max} = B(x_{к2})$ – индукция в центре кольца. **По согласованию с преподавателем** для всех или только нескольких значений координат « x » рассчитать теоретические значения и отметить соответствующие точки на графике с экспериментальными результатами для $B_2(x)$ (Рис. 8). Сравнение с экспериментальной кривой $B_2(x)$ позволяет определить (или уточнить) параметры системы катушек R_3 , N и $x_{к2}$ для неизвестной катушки.

*) Упражнение выполняется полностью или частично по согласованию с преподавателем.

Упражнение 2

Магнитная индукция соосных катушек $L_{КГ} = R_3$ (катушки Гельмгольца)

Построить экспериментальную зависимость модуля $B_{КГ}(x)$ модуля магнитной индукции катушек Гельмгольца на оси системы от координаты датчика (соединить экспериментальные точки *гладкими* кривыми). На этом же графике для катушек Гельмгольца добавить зависимости $B_1(x)$ и $B_2(x)$ для двух одиночных катушек, считая параметры R_3 и N обеих катушек одинаковыми.

Кривую $B_1(x)$ можно получить, сместив кривую $B_2(x)$, полученную по результатам измерений вдоль оси OX на расстояние $L_{КГ} = R_3$ между центрами катушек (используя экспериментальные точки провести *гладкие* кривые для зависимостей $B_1(x)$ и $B_2(x)$). Сложить «по точкам»^{*)} два графика $B_1(x)$ и $B_2(x)$ для одиночных катушек на том же графике (изобразить другим цветом) и сравнить получившуюся кривую с измеренной зависимостью $B_{КГ}(x)$ катушек Гельмгольца.

Упражнение 3а (3б)

Магнитная индукция соосных катушек для расстояний между ними

$L_2 = 8,5 \text{ см}$ и $L_3 = \dots \text{ см}$ (катушки вплотную друг к другу)

Обработка результатов в Упражнении 3а (3б) и Упражнении 2 аналогична. На графике построить *гладкие* кривые зависимости модуля индукции магнитного поля $B_{СК1,2}(x)$ на оси системы от координаты датчика.

5. Основные итоги работы

Построены графики зависимости модуля вектора магнитной индукции $B(x)$ на оси системы от координаты вдоль оси для различных конфигураций катушек с током. Исследовано распределение магнитного поля в области между катушками Гельмгольца.

Контрольные вопросы

1. Что называется вектором индукции магнитного поля (вектором магнитной индукции)?
2. Запишите закон Био-Савара-Лапласа. Что такое $d\vec{B}$ в записи этого закона?
3. Используя закон Био-Савара-Лапласа, получите выражение модуля вектора магнитной индукции на оси кольца с током.
4. Приведите аналитическую запись теоремы о циркуляции вектора магнитной индукции в вакууме.
5. Используя теорему о циркуляции вектора магнитной индукции, найдите модуль вектора магнитной индукции в зависимости от расстояния от «бесконечно длинного» тонкого проводника с током.
6. Что называется катушками Гельмгольца? Чем характерна эта система одинаковых соосных катушек?
7. Как получить индукцию магнитного поля в средней части катушек Гельмгольца?

^{*)} для этого, как и для построения графиков удобно использовать, например, программу Excel.