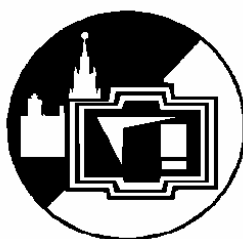


МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В. Ломоносова

С.Н. Козлов, А.В. Зотеев

КОЛЕБАНИЯ И ВОЛНЫ
ВОЛНОВАЯ ОПТИКА



МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В. Ломоносова

С.Н.Козлов, А.В. Зотеев

КОЛЕБАНИЯ И ВОЛНЫ
ВОЛНОВАЯ ОПТИКА



Москва
Физический факультет МГУ
2006

Настоящее учебное пособие составлено в полном соответствии с программой курса «Колебания и волны», который в течение ряда лет один из авторов читал на *химическом факультета МГУ им. М.В. Ломоносова*. Главной особенностью курса является последовательная реализация единого подхода к механическим и электромагнитным колебательным и волновым процессам. Особое внимание уделяется вопросам, представляющим наибольший интерес для будущих специалистов – химиков. К числу таких вопросов относятся колебания в сложных системах (в частности, молекулярные колебания); оптические явления, использующиеся в современных экспериментальных методах исследования вещества (рефрактометрии, спектроскопии, поляризационных методиках и др.).

Возможно, что читатели найдут опечатки и неточности. Авторы будут признательны за отзывы, замечания и пожелания, которые можно присылать по адресу:

119899 Москва, В-234, Ленинские горы, МГУ, физический факультет, кафедра общей физики и молекулярной электроники или по электронному адресу: zoteyev@vega.phys.msu.ru

ГЛАВА I. КОЛЕБАНИЯ

§ 1. Колебания систем с одной степенью свободы.

Гармонический осциллятор

Круг явлений, которые получили название «колебания» очень широк. Для всех этих явлений типична *повторяемость во времени*. Прежде чем перейти к детальному рассмотрению колебательных явлений, проиллюстрируем их универсальность несколькими примерами из живой и неживой природы.

Периодичны смены дня и ночи, времен года, сна и бодрствования. Сердце человека (и других млекопитающих) работает настолько строго периодически, что даже небольшие отклонения от этой периодичности резко ухудшают самочувствие, а их анализ позволяет специалистам судить о причинах нездоровья (кардиограммы). Качели и маятники хорошо знакомы нам с детства; шелест листьев обусловлен дрожанием каждого листика под действием ветра; волны, раз за разом накатывающиеся на берег, вызывают повторяющийся шум прибоя. Химикам хорошо известны удивительные циклические процессы – реакции *Белоусова – Жаботинского*. Периодичность наблюдается в движении как гигантских объектов (таких, как планеты солнечной системы, звезды), так и микрочастиц – составных “кирпичиков” окружающего мира (атомов и молекул). Наконец само развитие мира, как считают некоторые философы, происходит “по спирали”, т.е. опять-таки с “*некоторой степенью повторяемости во времени*”. Да и в жизни отдельного человека периоды активности (работа, учеба, экзамены) сменяются процессами «*релаксации*» (термин, также относящийся к теории колебаний) – расслабления и успокоения.

§1. Гармонический осциллятор

Убедившись в важности и актуальности колебательных явлений, попытаемся выяснить физическую причину столь широкого их распространения в природе. Вспомним, что фундаментальную роль в окружающем нас мире играют гравитационные, упругие и электростатические взаимодействия. Поля сил таких взаимодействий обладают одним важным общим свойством – они являются потенциальными. В дальнейшем для простоты мы будем полагать, что имеем дело с системой, состояние которой определяется только одной переменной (например, координатой x)^{*)}. В этом случае потенциальная энергия U – функция только одной координаты. Для примера на рис.1.1 представлены возможные виды зависимостей $U(x)$. В случае (а) потенциальная энергия не зависит от координаты

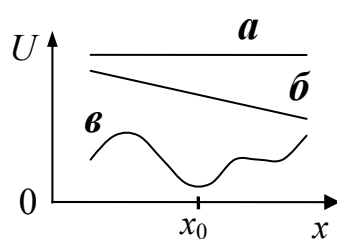


Рис. 1.1

(всюду постоянна), на систему не действует внешняя сила ($F_x = -dU/dx = 0$) и, в соответствии со вторым законом Ньютона, система движется равномерно и прямолинейно. В случае (б) на систему действует постоянная по величине сила $F_x = -dU/dx = const$, направленная по оси X ; происходит равноускоренное движение по этой оси. Очевидно, наиболее общая ситуация изображена на рис.1.1(в) – потенциальная энергия в этом случае зависит от координаты каким-то более сложным образом (конкретный вид этой зависимости сейчас не играет существенной роли).

Предположим, что система находится вблизи одного из минимумов потенциальной энергии – в окрестности точки x_0 . Легко видеть, что смещение системы из этой точки в любую сторону приведет к появлению силы, “возвращающей” систему к

^{*)} О таких системах принято говорить, что они имеют одну степень свободы.

положению равновесия (эта сила так и называется – “возвращающей”). После достижения точки x_0 (“точки равновесия”) система по инерции пройдет эту точку и снова возникнет возвращающая сила, направленная уже в другую сторону. Вот и начался колебательный процесс.

В общем случае зависимость смещения системы $\xi = x - x_0$ от времени может быть достаточно сложной – все зависит от конкретного вида функции $U(x)$. Считая, что функция $U(x)$ непрерывна и имеет все производные при $x = x_0$, её можно разложить вблизи этой точки в ряд Тейлора по величине $\xi = x - x_0$:

$$U(x) = U(x_0) + \left. \frac{dU}{dx} \right|_{x_0} \xi + \frac{1}{2} \left. \frac{d^2U}{dx^2} \right|_{x_0} \xi^2 + \dots \quad (1.1)$$

Очевидно, при малых отклонениях от точки x_0 основную роль будет играть член с наименьшей степенью ξ . Учитывая, что в минимуме $dU/dx = 0$, разложение (1.1) приближенно можно переписать в виде:

$$U(x) \approx U(x_0) + \frac{1}{2} \left. \frac{d^2U}{dx^2} \right|_{x_0} \cdot \xi^2 = U(x_0) + \frac{k\xi^2}{2}, \quad (1.2)$$

где введено обозначение $k = \left. \frac{d^2U}{dx^2} \right|_{x_0}$. В этом случае на систему

вблизи точки $x = x_0$ будет действовать сила

$$F_x = - \frac{dU}{dx} = - \left. \frac{d^2U}{dx^2} \right|_{x_0} \cdot \xi, \text{ т.е. } F_x = -k\xi. \quad (1.3)$$

Видно, что знак проекции силы всегда противоположен знаку смещения и в случае малых отклонений от положения равновесия величина возвращающей силы пропорциональна отклонению системы от положения равновесия (как для идеальной пружины) Поэтому такую силу называют «*квази-упругой*». В частном случае колебаний грузика на пружине эта

§1. Гармонический осциллятор

сила является упругой, а соотношение (1.3) отражает закон Гука.

Второй закон динамики для механической системы, находящейся вблизи положения равновесия, с учетом вышесказанного можно записать в форме

$$m\ddot{\xi} = F_x = -k\xi. \quad (1.4)$$

После деления на m и переноса в левую часть, это равенство приобретает вид, получивший название «*уравнение гармонического осциллятора*»:

$$\ddot{\xi} + \omega_0^2 \xi = 0, \quad \text{где } \omega_0^2 = \frac{k}{m}. \quad (1.4,a)$$

С математической точки зрения – это линейное однородное дифференциальное уравнение второго порядка. Общее решение такого уравнения может быть записано в виде гармонической функции (в чём нетрудно убедиться подстановкой)

$$\xi(t) = A \cos(\omega_0 t + \varphi_0), \quad (1.5)$$

Величина ω_0 играет роль *частоты собственных гармонических колебаний* системы. Она определяется *только свойствами самой колебательной системы* (осциллятора – от английского слова “oscillate”). Постоянные A и φ_0 – называются *амплитудой* и *начальной фазой* колебаний, соответственно. Их величина существенно зависит от *способа возбуждения колебаний* в системе – так называемых *начальных условий*. Для определения амплитуды и начальной фазы нужно знать начальное отклонение системы от положения равновесия $\xi_0 = \xi(0)$ и начальную скорость $v_0 = \dot{\xi}(0)$.

Таким образом, «*гармоническим осциллятором*» является любая система, совершающая колебания по закону (1.5) (и, соответственно, подчиняющаяся уравнению типа (1.4,a)).

Подчеркнем, что «гармонический осциллятор» – некая

физическая идеализация. Модель гармонического осциллятора может быть использована *только* в тех случаях, когда правомерно пренебрежение членами высших порядков в разложении потенциальной энергии системы (1.1) (т.е. когда амплитуда колебаний достаточно мала) *и отсутствуют диссипативные силы (например, силы трения)*.

В заключение этого параграфа продемонстрируем полную аналогию в описании механических и электрических колебаний. На рис.1.2,*а* показан простейший механический осциллятор – тело массой m на пружине с коэффициентом упругости k , которое может скользить по гладкой горизонтальной поверхности. Уравнение движения тела (второй закон Ньютона) в этом случае (без учета сил трения) в точности совпадает с ранее полученным нами уравнением (1.4):

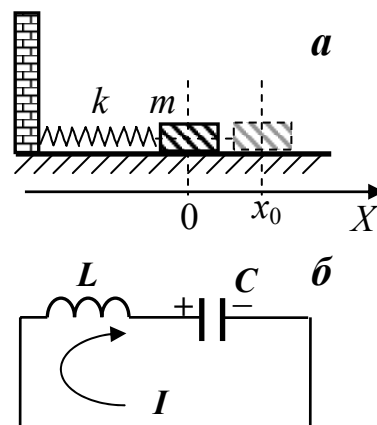


Рис. 1.2

Для идеализированного электрического контура без потерь энергии (см. рис.2,*б*) напряжение на конденсаторе $V_c = \frac{q}{C}$ равно ЭДС самоиндукции на катушке \mathcal{E}_{si} :

$$\frac{q}{C} = -L \frac{dI}{dt} . \quad (1.6)$$

С учётом того, что ток $I = \frac{dq}{dt}$ имеем:

$$\ddot{q} + \frac{1}{LC} q = 0 \text{ или } \ddot{q} + \omega_0^2 q = 0, \quad (1.6,a)$$

где q и C – заряд и емкость конденсатора, L – индуктивность катушки, I – сила тока в контуре, $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$.

§2. Модель гармонического осциллятора в химии

Таким образом, механический осциллятор без трения и электрический LC -контур без омического сопротивления описываются идентичными с математической точки зрения уравнениями (1.6, a) и (1.4, a). Очевидно, величина q , как и отклонение механической системы от положения равновесия ξ , с течением времени изменяется по гармоническому закону (1.5). Как нетрудно подметить, в случае электрической системы аналогами ξ , A , m и k являются величины q , q_0 , L и $1/C$, соответственно.

Энергия механического осциллятора в нашем случае складывается из кинетической энергии тела T и потенциальной энергии деформированной пружины U :

$$W = T + U = \frac{k\xi^2}{2} + \frac{m\dot{\xi}^2}{2} = \frac{kA^2}{2}. \quad (1.7)$$

Используя отмеченную выше аналогию между параметрами механической и электрической систем, полную колебательную энергию, запасенную в электрическом контуре, можно записать в виде

$$W = \frac{q^2}{2C} + \frac{LI^2}{2} = \frac{q_0^2}{2C}. \quad (1.8)$$

Первое слагаемое в соотношении (1.8) представляет собой энергию электрического поля конденсатора, второй член – энергию магнитного поля катушки индуктивности.

§ 2. Модель гармонического осциллятора в химии

Как мы уже отмечали, колебательные движения совершают не только многие легко наблюдаемые объекты окружающего мира, но и микрочастицы, его составляющие. При этом, несмотря на идеализированный характер рассмотренной нами модели

гармонического осциллятора (отсутствие потерь энергии, малые колебания), её использование в ряде случаев позволяет быстро найти достаточно точные ответы на вопросы, касающиеся некоторых особенностей колебаний атомов и молекул. Приведём наиболее простые примеры задач такого рода.

1. Найдем частоту собственных *внутримолекулярных колебаний* свободной (не связанной с другими молекулами – вещество в газообразном состоянии) двухатомной молекулы. Обозначим массы атомов m_1 и m_2 , а их взаимодействие друг с другом в простейшем приближении будем описывать “квазиупругой” силой (модель двух масс, соединенных пружинкой с жесткостью k) – см. рис.1.3. Тогда уравнение движения для первого атома записывается в виде (ξ_1 и ξ_2 – отклонения атомов от их равновесных положений x_{01}, x_{02}):

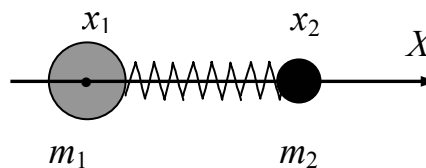


Рис. 1.3

$$m_1 \ddot{\xi}_1 = -k(\xi_1 - \xi_2). \quad (1.9)$$

В отсутствии внешних сил, действующих на молекулу, её центр масс должен оставаться неподвижным в процессе колебаний (в выбранной инерциальной системе отсчета). Это означает, что величины ξ_1 и ξ_2 связаны соотношением $m_1 \xi_1 = -m_2 \xi_2$. Заменяя в (1.9) ξ_2 на $-m_1 \xi_1 / m_2$ приходим к хорошо знакомому уже нам уравнению одномерного гармонического осциллятора вида (1.4), где роль массы играет величина $\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$, называемая «*приведенной массой*»:

§2. Модель гармонического осциллятора в химии

$$\mu \ddot{\xi}_1 = -k\xi_1. \quad (1.10)$$

Отсюда ясно, что частота собственных колебаний двухатомной молекулы равна

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{\mu}} = \sqrt{\frac{k(m_1 + m_2)}{m_1 m_2}}. \quad (1.11)$$

Если масса одного атома много больше, чем другого (например, $m_2 \gg m_1$), то мы вернёмся к модели, представленной на рис.1.2,*a*; причем вместо приведённой массы в (1.11) останется только масса лёгкого атома (m_1). Такое приближение описывает, очевидно, также и колебания всей молекулы, “сцепленной” с поверхностью твёрдого тела или жидкости (случай *адсорбции*).

2. Оценим различие частот собственных внутримолекулярных колебаний свободных “обычных” и “тяжёлых” гидроксидов *OH* и *OD*. Обозначая m_O , m_H и m_D – массы атомов кислорода, водорода и тяжёлого водорода и, используя соотношение (1.11), получаем искомое отношение частот:

$$\frac{\omega_0^{OH}}{\omega_0^{OD}} = \sqrt{\frac{\mu_{OD}}{\mu_{OH}}} = \sqrt{\frac{m_D(m_O + m_H)}{m_H(m_O + m_D)}}. \quad (1.12)$$

Отсюда следует, что частота собственных *внутримолекулярных* колебаний “обычных” гидроксидов примерно на 37% выше, чем “тяжёлых”. Это хорошо подтверждается экспериментально при сравнении положений максимумов полос поглощения “обычных” и “тяжёлых” гидроксидов в инфракрасном диапазоне (*молекулярная ИК спектроскопия*). Поэтому методика изотопного дейтерообмена широко используется в инфракрасной спектроскопии для

идентификации колебательных спектров водородсодержащих фрагментов в исследуемом веществе.

3. Определим, как относятся частоты собственных колебаний свободных и связанных гидроксидов (например, гидроксидов, связанных с поверхностными атомами твёрдого тела, либо с большими молекулами). Полагая, что для связанного гидроксида $m_2 \gg m_1$, $m_1 = m_H$, получаем:

$$\frac{\omega_0^{своб}}{\omega_0^{связ}} = \sqrt{\frac{(m_O + m_H)}{m_O}} \approx 1,031. \quad (1.13)$$

С помощью современной аппаратуры легко зарегистрировать отличие в частотах собственных колебаний молекул на сотые, и даже тысячные доли процента, так что разница в 3,1% следующая из (1.13), представляет собой громадный эффект, который уже давно экспериментально обнаружен и наблюдается в соответствующих случаях.

§ 3. Свободные колебания связанных осцилляторов

Разнообразие колебательных явлений обусловлено еще и тем, что на самом деле в большинстве практически важных случаев приходится иметь дело не с независимыми, а с взаимодействующими между собой осцилляторами. Именно так, очевидно, следует рассматривать колебания молекул в конденсированных средах (жидкость, твердое тело). Электрические цепи тоже часто состоят из нескольких взаимосвязанных контуров. Во всех подобных случаях принято говорить о *колебаниях в системе связанных осцилляторов*. Вообще говоря, их количество в исследуемой системе может быть очень большим. Однако основные особенности колебаний в системе связанных осцилляторов, как мы покажем далее, становятся понятными, если рассмотреть задачу о простейшей

§3. Свободные колебания связанных систем

системе такого рода, состоящей всего лишь из двух осцилляторов.

В качестве примера рассмотрим простую модель колебаний двух взаимодействующих между собой одинаковых молекул, масса легкого атома каждой из которых равна m . В соответствующей механической модели, представленной на рис.1.4, пружинки с коэффициентами упругости k моделируют внутримолекулярные связи. Будем полагать, что два лёгких

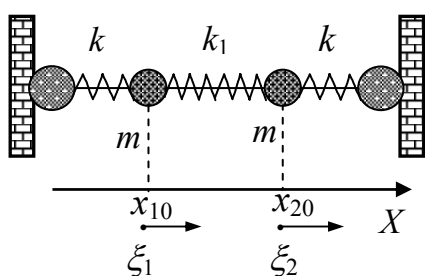


Рис.1.4

атома каждой молекулы связаны с массивными атомами, которые остаются неподвижными. Тогда в рамках наших модельных представлений соответствующие концы пружинки можно считать жестко фиксированными. Связь между молекулами будем моделировать

пружинкой с коэффициентом упругости k_1 . Напомним, что силовые константы связей – k и k_1 можно найти, если известна зависимость потенциальной энергии взаимодействия между атомами от расстояния между ними ($k = \left. \frac{d^2U}{dx^2} \right|_{x_0}$ – см. соотношение

(1.2)). Для простоты будем считать, что движение лёгких атомов происходит только по оси X , а силами трения можно пренебречь. Введем величины отклонений лёгких атомов от положений равновесия x_{10} и x_{20} :

$$\xi_1 = x_1 - x_{10}, \quad \xi_2 = x_2 - x_{20}.$$

Запишем уравнения движения первого и второго атомов:

$$m \ddot{\xi}_1 = -k\xi_1 - k_1(\xi_1 - \xi_2), \quad (1.14)$$

$$m \ddot{\xi}_2 = -k\xi_2 + k_1(\xi_1 - \xi_2). \quad (1.15)$$

Соотношения (1.14) и (1.15) не являются уравнениями гармонического осциллятора типа (рис.1.4), т.к. в каждое из этих уравнений входят обе независимые переменные величины – смещения грузов ξ_1 и ξ_2 . Поэтому в общем случае движение каждого атома не является простым гармоническим колебанием. Покажем, однако, что подходящей заменой переменных можно свести систему уравнений (1.14) и (1.15) к двум *независимым* линейным дифференциальным уравнениям, каждое из которых содержит только одну переменную величину и является уравнением гармонических колебаний. Для этого сначала сложим, а затем вычтем почленно правые и левые части соотношений (1.14) и (1.15). Если ввести после этого новые переменные $\xi_I = \xi_1 + \xi_2$ и $\xi_{II} = \xi_1 - \xi_2$, получим новую систему уравнений:

$$m \ddot{\xi}_I = -k \xi_I, \quad (1.16)$$

$$m \ddot{\xi}_{II} = -(k + 2k_1) \xi_{II}. \quad (1.17)$$

Введенные нами новые переменные ξ_I и ξ_{II} называются *нормальными координатами*. Таким образом, *нормальные координаты* представляют собой линейные комбинации обычных координат (ξ_1 и ξ_2). Введение нормальных координат позволяет свести исходные дифференциальные уравнения, описывающие колебания связанных осцилляторов, к такому же количеству независимых дифференциальных уравнений, каждое из которых содержит только одну переменную величину и является уравнением гармонических колебаний.

Ясно, что число нормальных координат равно числу исходных уравнений движения, описывающих колебания системы (т.е. количеству *колебательных степеней свободы* системы).

Общие решения уравнений (1.16) и (1.17) имеют вид, аналогичный (1.5):

$$\xi_I = A_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_1), \quad (1.18)$$

§3. Свободные колебания связанных систем

$$\xi_{II} = A_{II} \cos(\omega_{II}t + \varphi_{II}). \quad (1.19)$$

Функции (1.18) и (1.19) описывают так называемые **нормальные колебания** (*нормальные моды*) рассматриваемой системы, а частоты:

$$\omega_I = \sqrt{k/m}, \quad \omega_{II} = \sqrt{(k + 2k_1)/m}, \quad (1.20)$$

называются *частотами нормальных колебаний* (*нормальных мод*).

Движение каждого тела связанной системы является результатом сложения нормальных колебаний этой системы. В рассматриваемом случае легко вернуться к исходным переменным, описывающим движение каждого из тел системы:

$$\xi_1 = (\xi_I + \xi_{II})/2, \quad \xi_2 = (\xi_I - \xi_{II})/2. \quad (1.21)$$

В нашей модели число колебательных степеней свободы и, соответственно, нормальных колебаний равно двум. Нумерацию нормальных мод обычно начинают с низкочастотных (по мере возрастания частоты нормального колебания номер моды увеличивается).

Для полного описания движения системы, состоящей из N связанных осцилляторов, необходимо, помимо частот всех нормальных мод, знать амплитуды и начальные фазы всех нормальных колебаний (всего $2N$ параметров). В рассмотренном выше примере ($N = 2$) необходимо определить четыре параметра, входящих в соотношения (1.18) и (1.19) $A_I, A_{II}, \varphi_I, \varphi_{II}$. Это может быть сделано, если заданы четыре начальных условия (обычно это начальные координаты и скорости всех тел). В нашем случае нужно задать координаты и скорости двух лёгких атомов в начальный момент времени $\xi_1(0), \xi_2(0), \dot{\xi}_1(0), \dot{\xi}_2(0)$.

Легко убедиться в том, что, если в начальный момент оба атома смещены от положений равновесия в одну и ту же сторону на одинаковую величину ($\xi_1(0) = \xi_2(0)$), то амплитуда второго

нормального колебания A_{II} окажется равной нулю (т.е. при этом в системе возбуждается только первая, низкочастотная мода колебаний). Поскольку частота первой нормальной моды никак не зависит от коэффициента упругости средней пружинки k_1 , первая нормальная мода представляет собой синхронное колебание обоих атомов (при этом средняя пружинка остается ненатянутой в любой момент времени) – рис.1.5,*а*.

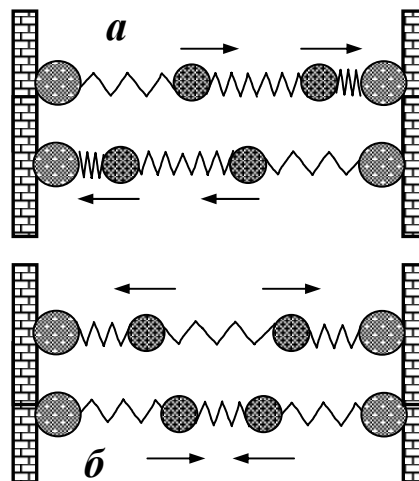


Рис. 1.5

Вторая (высокочастотная) нормальная мода в рассматриваемой системе может быть возбуждена, если в начальный момент времени оба атома отклоняются от положений равновесия на одну и ту же величину, но в разные стороны ($\xi_1(0) = -\xi_2(0)$). В этом случае решение системы (1.16) и (1.17), напротив, даёт $\xi_1 = 0$, т.е. в этих условиях низкочастотная мода вообще не возбуждается. В формуле для частоты второго нормального колебания параметр k_1 средней пружины присутствует с коэффициентом 2, т.е. эта пружина деформируется в два раза больше, чем крайние. Нетрудно сообразить, что вторая нормальная мода представляет собой противофазное движение двух атомов – см. рис.1.5,*б*.

Если же в начальный момент времени созданы несимметричные условия для двух тел (разные начальные отклонения, либо разные начальные скорости), то в системе сосуществуют оба нормальных колебания. При этом движение каждого тела будет представлять собой сумму двух гармонических колебаний с частотами ω_I и ω_{II} . Если связь между двумя осцилляторами достаточно слабая ($k_1 \ll k$), то частоты ω_I

§3. Свободные колебания связанных систем

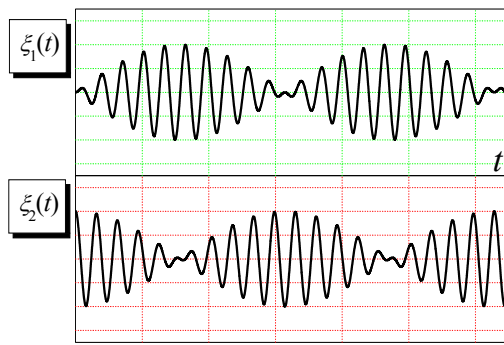


Рис. 1.6

и ω_{Π} близки, сложение двух колебаний приведет к известному эффекту «биений» – амплитуда колебаний каждого осциллятора будет претерпевать медленные периодические изменения с частотой, равной разности частот собственных колебаний каждого

из осцилляторов – рис.1.6.

Подчеркнём, что если в какой-то момент времени в системе связанных осцилляторов была возбуждена только одна мода колебаний, то и в дальнейшем будет существовать только эта нормальная мода. Если в системе возбуждено несколько нормальных мод, то энергия, “запасенная” каждым нормальным колебанием, сохраняется неизменной. Это отражает *важнейшее свойство нормальных мод – их независимость* (энергия не может передаваться от одной моды к другой).

Из (1.20) следует, что по мере ослабления силы взаимодействия между двумя осцилляторами частоты нормальных колебаний двух типов постепенно сближаются и в пределе (при $k_1 \rightarrow 0$) стремятся к одной и той же частоте собственных колебаний изолированного осциллятора.

Совершенно аналогично ведет себя система двух связанных контуров (см. рис.1.7). Будем предполагать, что два одинаковых

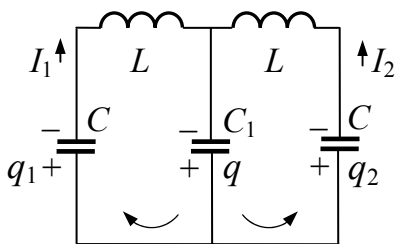


Рис. 1.7

электрических контура, состоящих из одинаковых катушек индуктивности L и конденсаторов с ёмкостью C , связаны через общий конденсатор с ёмкостью C_1 (аналог упругой связи двух механических осцилляторов через пружинку с жёсткостью k_1). Потерями

энергии на выделение тепла Джоуля-Ленца или перемагничивание сердечника катушек, как и ранее, будем пренебрегать. Для определенности зададим знаки зарядов на конденсаторах и направления токов в контурах I_1 и I_2 . Совершая обходы по каждому контуру в направлениях, указанных на рис.1.7 стрелками, получим два уравнения:

$$\frac{q_1}{C} - \frac{q}{C_1} = -L \frac{dI_1}{dt}, \quad (1.22)$$

$$\frac{q_2}{C} - \frac{q}{C_1} = -L \frac{dI_2}{dt}. \quad (1.23)$$

С учётом того, что $I_1 = \frac{dq_1}{dt} = \dot{q}_1$, $I_2 = \frac{dq_2}{dt} = \dot{q}_2$ и принимая во внимание условие сохранения электрического заряда^{*)}:

$$q_1 + q + q_2 = 0, \quad (1.23,a)$$

эти уравнения преобразуются к виду

$$L\ddot{q}_1 + \frac{q_1}{C} + \frac{q_1 + q_2}{C_1} = 0, \quad (1.24)$$

$$L\ddot{q}_2 + \frac{q_1 + q_2}{C_1} + \frac{q_2}{C} = 0. \quad (1.25)$$

Как и ранее, почленно вычитаем и суммируем эти уравнения, получая в итоге

$$\ddot{q}_1 + \frac{1}{LC} q_1 = 0, \quad (1.26)$$

$$\ddot{q}_{II} + \frac{1}{L} \left(\frac{1}{C} + \frac{2}{C_1} \right) q_{II} = 0. \quad (1.27)$$

Здесь введены нормальные координаты: $q_I = q_1 - q_2$, $q_{II} = q_1 + q_2$. Соответствующие нормальные частоты

^{*)} Для упрощения последующих математических выкладок мы приняли исходный заряд конденсаторов равным нулю.

§3. Свободные колебания связанных систем

$$\omega_I = \frac{1}{\sqrt{LC}}, \quad \omega_{II} = \sqrt{\frac{1}{L} \left(\frac{1}{C} + \frac{2}{C_1} \right)}. \quad (1.28)$$

вполне аналогичны соотношениям (1.20).

При возбуждении в рассматриваемой системе первой моды одинаковые по величине токи I_1 и I_2 в обоих контурах в любой момент времени направлены либо по часовой стрелке, либо против неё, поэтому ток через конденсатор C_1 вообще не протекает. Напротив, при возбуждении второй нормальной моды сила тока через конденсатор C_1 в любой момент времени равен удвоенному току I_1 (или I_2). Таким образом, очевидна полная аналогия колебательных явлений в системах, показанных на рис.1.4 и рис.1.7.

В заключение подчеркнем, что простой способ определения нормальных координат и нормальных мод – сложение и вычитание исходных дифференциальных уравнений, описывающих каждый осциллятор системы, “работает” только для симметричных систем связанных осцилляторов. В случае несимметричных систем нормальные координаты следует искать в виде $\xi = \xi_1 + n\xi_2$, где n – постоянный коэффициент, значение которого для каждой нормальной моды своё. Каждому значению коэффициента n будет соответствовать определенная частота нормальных колебаний. Другой способ поиска частот нормальных колебаний базируется на том обстоятельстве, что при возбуждении в системе какой-либо одной нормальной моды все осцилляторы совершают колебания с одинаковой частотой, причём либо в фазе, либо в противофазе. Поэтому можно в исходной системе дифференциальных уравнений задать координаты осцилляторов в виде гармонических функций (например, в случае двух связанных осцилляторов $\xi_1 = A\cos\omega t$ и $\xi_2 = B\cos\omega t$). В результате решения получившихся алгебраических уравнений легко определить частоты нормальных мод и соответствующие значения отношения амплитуд колебаний двух осцилляторов A/B для каждой моды.

§ 4. Затухающие колебания

В реальных колебательных системах всегда происходят потери энергии (в механических системах – из-за трения, в электрических – из-за наличия электрического сопротивления). Поэтому свободные колебания будут затухающими (а следовательно, не гармоническими). Учтём это обстоятельство, добавляя в правую часть уравнения (1.4) силу трения, которую будем считать пропорциональной скорости тела $(F_{mp})_x = -r \cdot \dot{\xi}$ (такая зависимость силы трения от скорости типична для движения тела в вязкой среде). Параметр r называется *коэффициентом сопротивления*.

В результате второй закон динамики для механического осциллятора при наличии вязкого трения можно записать так:

$$m\ddot{\xi} = -r\dot{\xi} - k\xi. \quad (1.29)$$

Обозначив $r/m = 2\beta$, соотношение (1.29) приведём к виду

$$\ddot{\xi} + 2\beta\dot{\xi} + \omega_0^2\xi = 0. \quad (1.30)$$

Величина $\omega_0^2 = k/m$ – как и ранее, собственная частота осциллятора в отсутствии затухания.

Совершенно аналогичное уравнение можно получить для электрического контура (рис.1.2,б) с учётом затухания, добавив в левую часть равенства (1.6) падение напряжения на сопротивлении U_R . Только в этом случае дифференциальное уравнение типа (1.30) записывается не для смещения $\xi(t)$, а для заряда на конденсаторе $q(t)$; коэффициент вязкого трения r нужно заменить на электрическое сопротивление цепи R ; при этом $2\beta = R/L$, $\omega_0^2 = 1/LC$.

§4. Затухающие колебания

Поскольку функции $\xi(t)$, $\dot{\xi}(t)$, $\ddot{\xi}(t)$ должны быть с точностью до постоянных коэффициентов одинаковыми (это очевидно из уравнения (1.30)), решение (1.30) будем искать в виде:

$$\xi(t) = A_0 e^{\alpha t}. \quad (1.31)$$

Подставляя (1.31) в (1.30), получаем т.н. «**характеристическое уравнение**» для коэффициента α :

$$\alpha^2 + 2\beta\alpha + \omega_0^2 = 0. \quad (1.32)$$

Решение этого уравнения:

$$\alpha = -\beta \pm \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}. \quad (1.33)$$

Рассмотрим сначала случай **малого затухания** $\beta < \omega_0$.

При этом $\alpha = -\beta \pm i\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$

и, используя формулу Эйлера, решение уравнения (1.30) можно записать в форме

$$\xi(t) = A_0 \cdot e^{-\beta t} \cdot \cos(\omega_c t + \varphi_0), \quad (1.34)$$

где $\omega_c = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$ – частота собственных затухающих колебаний; φ_0 – как и ранее, начальная фаза. Как видно из рис.1.8,

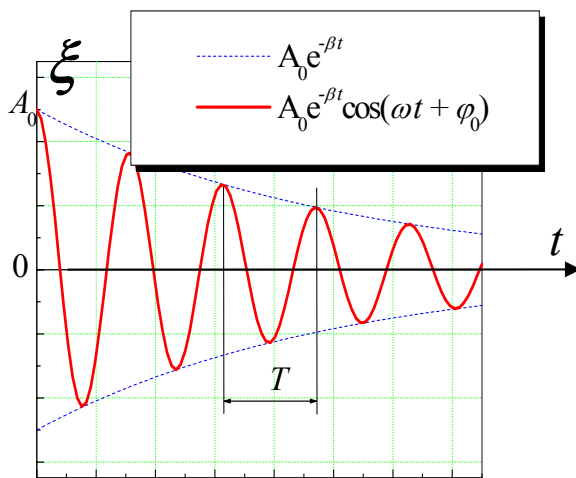


Рис.1.8

колебания осциллятора в этом случае напоминают гармонические, но амплитуда колебаний постепенно уменьшается по экспоненциальному закону. Такие колебания, конечно, не являются гармоническими.

Параметр, β определяющий темп затухания амплитуды, называется **коэффициентом затухания**.

Для описания колебаний с малым затуханием используют следующие характеристики:

1. Время релаксации амплитуды τ_A – время уменьшения амплитуды колебаний в “e” раз:

$$\frac{A_0}{A_0 e^{-\beta \tau_A}} = e, \quad \text{откуда} \quad \tau_A = 1/\beta.$$

2. Количество колебаний N_e , за которое амплитуда уменьшится в “e” раз :

$$N_e = \frac{\tau_A}{T} = \frac{1}{\beta T}.$$

Здесь $T = \frac{2\pi}{\omega_c}$ – период колебаний.

3. Декремент затухания $D = \frac{A(t)}{A(t+T)} = e^{\beta T}$.

4. Логарифмический декремент затухания γ – логарифм отношения амплитуд двух последовательных колебаний:

$$\gamma = \ln D = \ln \frac{A(t)}{A(t+T)} = \beta T = \frac{1}{N_e}.$$

5. Добротность колебательной системы Q :

$$Q = \pi N_e = \frac{\pi}{\gamma} = \frac{\pi}{\beta T} = \frac{\omega_c}{2\beta}.$$

При *очень малом затухании* ($\beta \ll \omega_0$) можно использовать приближенное соотношение $Q \approx \frac{\omega_0}{2\beta}$, которое в случае

электрического контура легко преобразуется к виду: $Q \approx \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}$.

Далее мы встретимся ещё с несколькими определениями добротности. В частности, этот параметр при малом затухании

§4. Затухающие колебания

пропорционален отношению энергии, запасённой осциллятором, к энергии, теряемой за период.

Действительно, энергия, запасённая осциллятором, пропорциональна квадрату амплитуда колебаний (для механических колебаний) или квадрату максимального заряда конденсатора (для электрических колебаний) – см. соотношения (1.7) и (1.8). Следовательно, в любой момент времени

$$W(t) = W_0 \cdot e^{-2\beta t} = W_0 \cdot e^{-t/\tau_w}, \quad (1.35)$$

где W_0 – начальный запас энергии осциллятора, $\tau_w = 1/2\beta$ – время релаксации энергии (оно в два раза меньше времени релаксации амплитуды). Учитывая, что потеря энергии за период

$$\Delta W_T(t) = W(t) - W(t+T) = W(t)(1 - e^{-2\beta T}), \quad (1.36)$$

получаем

$$\frac{W(t)}{\Delta W_T(t, T)} = \frac{1}{1 - e^{-2\beta T}}. \quad (1.37)$$

В условиях очень малого затухания $e^{-2\beta T} \approx 1 - 2\beta T$ и соотношение (1.37) преобразуется к виду

$$\frac{W(t)}{\Delta W_T(t, T)} = \frac{1}{2\beta T} = \frac{N_e}{2} = \frac{1}{2\gamma} = \frac{Q}{2\pi}. \quad (1.38)$$

Отсюда следует ещё одно определение добротности (подчеркнем, что оно справедливо только при очень малом затухании):

$$Q \cong 2\pi \frac{W(t)}{\Delta W(t, T)}. \quad (1.39)$$

Заметим, что, поскольку время релаксации энергии равно $\tau_w = 1/2\beta$, можно дать “третье” определение добротности:

$$Q = \frac{\omega_c}{2\beta} = \omega_c \tau_w \cong \omega_0 \tau_w. \quad (1.39, a)$$

Последнее выражение также правомерно в условиях очень малого затухания.

Обсудим теперь некоторые закономерности поведения осциллятора с большим затуханием ($\beta > \omega_0$). Как следует из (1.33), в этом случае решение дифференциального уравнения (1.30) таково:

$$\xi(t) = e^{-\beta t} (Ae^{\beta_1 t} + Be^{-\beta_1 t}) = A \cdot e^{-\frac{t}{\tau_1}} + B \cdot e^{-\frac{t}{\tau_2}}. \quad (1.40)$$

$$\text{Здесь } \beta_1 = \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}, \quad \tau_1 = \frac{1}{\beta - \beta_1}, \quad \tau_2 = \frac{1}{\beta + \beta_1}.$$

Два параметра – A и B определяются из начальных условий (начальная координата и начальная скорость должны быть заданы). В частности, если в начальный момент времени смещение равно нулю (например, маятник выводится из равновесия толчком), то $\xi(0) = A + B = 0$ и $A = -B$.

Соответствующая зависимость смещения от времени показана на рис.1.9(а). Если начальное отклонение от положения равновесия не равно нулю, то $A \neq -B$; траектория движения тела для этого случая показана на рис.1.9 (б).

Сравнивая рисунки 1.8 и 1.9, легко понять, почему режим с

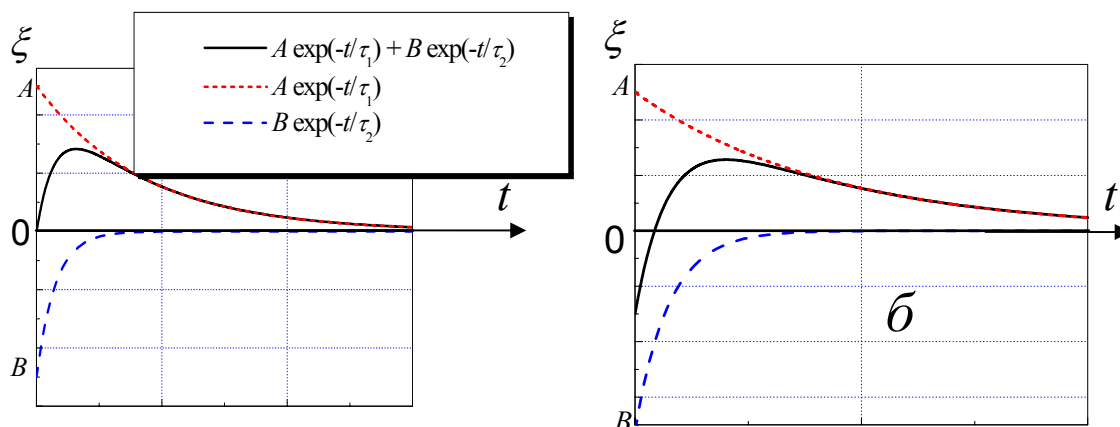


Рис. 1.9

§4. Затухающие колебания

большим затуханием часто называют «**апериодическим**». Существенно, что время возвращения системы к равновесию определяется в апериодическом режиме экспонентой с наибольшей постоянной времени $\tau_1 = \frac{1}{\beta - \beta_1}$. При очень сильном затухании ($\beta \gg \omega_0$) эта постоянная времени может быть весьма большой ($\beta \cong \beta_1, \tau_1 \rightarrow \infty$). Очевидно, режим с большим затуханием нецелесообразно использовать при работе стрелочных приборов, как, впрочем, и режим с малым затуханием – см. рис.1.8. С этой точка зрения наиболее интересен т.н. «**критический**» режим, когда выполняется условие $\beta = \omega_0$, т.е. $\beta_1 = 0$.

Критический режим широко используется в работе различных приборов, поскольку в этом режиме возвращение к положению равновесия происходит наиболее быстро.

В критическом режиме $\tau_1 = \tau_2$, и решение (1.40) не может быть общим решением дифференциального уравнения второго порядка, поскольку фактически в (1.40) останется только один параметр – множитель перед экспонентой. Легко показать, что решением уравнения (1.30) при $\beta = \omega_0$ является функция

$$\xi(t) = (A + B \cdot t)e^{-\beta t}. \quad (1.41)$$

Параметр A в этом случае имеет смысл начального смещения $\xi(0)$, начальная скорость равна $\dot{\xi}(0) = B - \beta \cdot A$. Если начальное отклонение от положения равновесия равно нулю ($A = 0$), то параметр B определяет величину начальной скорости осциллятора. В рассматриваемом случае зависимость смещения тела от времени получается умножением спадающей экспоненты на функцию Bt – см. рис.1.10.

Дифференцируя по времени $\xi(t) = V_0 \cdot t \cdot e^{-\beta t}$ и приравнявая производную нулю, находим, что максимальное отклонение от положения равновесия достигается в момент времени

$t_{max} = \frac{1}{\beta}$. В этот момент

$$\xi_{max} = \xi(1/\beta) = \frac{B}{\beta e}. \quad (1.42)$$

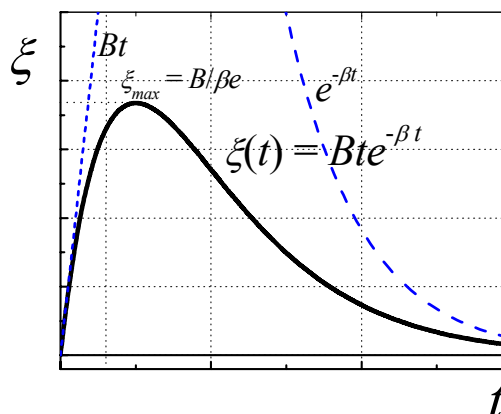


Рис.1.10

Таким образом, максимальное отклонение от положения равновесия в рассматриваемом случае оказывается пропорциональным начальной скорости $\xi_{max} \sim B = \dot{\xi}(0)$. Это фундаментальное свойство осциллятора в критическом режиме используется в т.н. «баллистических» приборах (баллистических маятниках, баллистических гальванометрах). В этих приборах конструктивными «ухищрениями» добиваются того, чтобы период колебаний (маятника, либо рамки гальванометра) был достаточно большим (существенно превышал время того воздействия Δt , которое предполагается исследовать – например, время соударения маятника с каким-либо телом или время протекания импульса тока через рамку гальванометра). Тогда импульс, который получает баллистический маятник за время Δt , можно считать пропорциональным начальной скорости маятника. Следовательно, максимальное отклонение маятника от положения равновесия с точностью до градуировочного множителя будет указывать величину сообщенного маятнику импульса («количества движения»).

§5. Вынужденные колебания

Для баллистического гальванометра начальная скорость рамки также пропорциональна импульсу силы, действовавшей на рамку в течение времени Δt . Так как сила, действующая на рамку, пропорциональна протекающему по рамке току, то $F\Delta t \sim I\Delta t \sim \Delta q$. В этом случае максимальное отклонение рамки от положения равновесия пропорционально полному заряду Δq , протекшему через рамку за время Δt .

В заключение сделаем несколько замечаний о специфике затухающих колебаний в системе связанных осцилляторов. Во-первых, необходимо иметь в виду, что представление о нормальных модах колебаний в случае затухающих колебаний имеет смысл только в условиях малого затухания. Во-вторых, необходимо учитывать, что затухание может быть неодинаковым для разных мод, поскольку, например, пружины в случае механических колебаний или конденсаторы – в случае электрических “работают” для различных нормальных колебаний по-разному. Наконец, очевидно, что небольшое затухание никак не может повлиять на фундаментальные свойства нормальных колебаний – соответствие между числом нормальных мод и количеством колебательных степеней свободы.

§5. Вынужденные колебания

Вынужденные колебания – это колебания, которые происходят под действием внешней периодической силы. Здесь мы ограничимся рассмотрением случая, когда “вынуждающая” сила изменяется со временем по гармоническому закону:

$$F(t) = F_0 \cos \Omega t. \quad (1.43)$$

В случае, когда на осциллятор действует любая иная периодическая сила, зависимость $F(t)$ может быть представлена

в виде разложения по гармоническим функциям вида (1.43), так что приведённое далее рассмотрение носит достаточно общий характер.

Совершенно ясно, что, как только на систему начнёт действовать посторонняя сила, система будет выведена из положения равновесия и, следовательно, в ней неминуемо будут возбуждаться собственные колебания с частотой ω_0 . Кроме того, система будет вынуждена “подчиняться” внешней силе, действующей в общем случае с иной частотой Ω . Поэтому на начальном этапе колебания системы будут сложными, состоящими из двух колебательных процессов с разными частотами. Однако в системе с затуханием собственные колебания, как это было выяснено в предыдущем параграфе, прекратятся по истечению времени порядка $\tau_A = 1/\beta$. После этого осциллятор будет совершать только вынужденные колебания с частотой вынуждающей силы Ω . Этот режим мы будем называть режимом *установившихся вынужденных колебаний* и в дальнейшем только этот режим и будем рассматривать.

В этом случае в дифференциальном уравнении, описывающем колебательный процесс, в правой части появляется дополнительное слагаемое – вынуждающая сила:

$$m\ddot{\xi} = -r\dot{\xi} - k\xi + F_0 \cos \Omega t. \quad (1.44)$$

Это уравнение удобнее привести к виду

$$\ddot{\xi} + 2\beta\dot{\xi} + \omega_0^2\xi = f_0 \cos \Omega t, \quad (1.45)$$

где $f_0 = F_0/m$, $\beta = r/2m$, $\omega_0^2 = k/m$.

§5. Вынужденные колебания

Аналогичное уравнение справедливо и для электрического контура, представленного на рис.1.11, в котором роль вынуждающего воздействия играет внешняя ЭДС $U(t) = U_0 \cos \Omega t$.

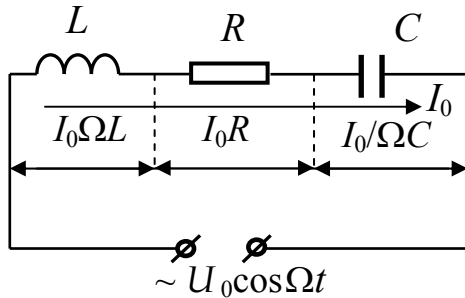


Рис.1.11

Учитывая, что сумма напряжений на конденсаторе, катушке индуктивности и резисторе равна в рассматриваемом случае внешней ЭДС, получим уравнение (1.45), в котором $f_0 = U_0/L$, $\beta = R/2L$, $\omega_0^2 = 1/LC$, а вместо смещения ξ будет

фигурировать заряд на конденсаторе q .

Поскольку установившиеся колебания происходят с частотой вынуждающей силы Ω , решение уравнения (1.45) будем искать в виде:

$$\xi = A \cos(\Omega t - \alpha). \quad (1.46)$$

Дифференцируя (1.46), получаем

$$\dot{\xi} = -A\Omega \sin(\Omega t - \alpha) = A\Omega \cos(\Omega t - \alpha + \pi/2), \quad (1.47)$$

$$\ddot{\xi} = -A\Omega^2 \cos(\Omega t - \alpha) = A\Omega^2 \cos(\Omega t - \alpha + \pi). \quad (1.48)$$

Для решения уравнения (1.45) воспользуемся методом векторных диаграмм – заменим гармонические функции (1.46) – (1.48) векторами, вращающимися против часовой стрелки с угловой скоростью Ω . Длина каждого вектора равна амплитуде соответствующего колебания, а полярный угол – его фазе. Для определения амплитуды вынужденных колебаний A и фазового сдвига α теперь достаточно провести сложение векторов, соответствующих гармоническим функциям в левой части уравнения (1.45). Направим вектор, соответствующий функции $\omega_0^2 \cdot \xi(t)$ по горизонтали вправо. На рисунке 1.12 представлены также векторы, соответствующие функциям $2\beta \dot{\xi}(t)$ и $\ddot{\xi}(t)$. Как

следует из (1.47) и (1.48), они опережают по фазе $\xi(t)$ на $\pi/2$ и π , соответственно.

В итоге получим векторную диаграмму, показанную на рис.1.12. Результат сложения трёх векторов, соответствующих трём членам в левой части уравнения (1.45), должен быть равным вектору, соответствующему правой части. Длина этого вектора равна f_0 , угол α – сдвиг по фазе между силой и

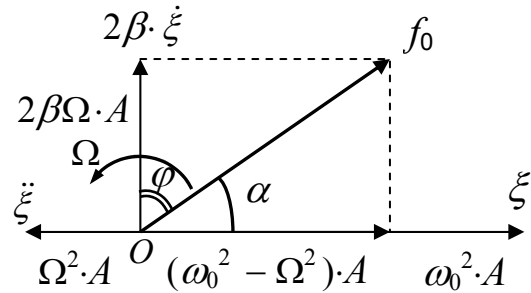


Рис. 1.12

смещением в соотношении (1.46). По теореме Пифагора имеем

$$A^2[(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\beta^2 \Omega^2] = f_0^2. \quad (1.49)$$

Отсюда получаем амплитуду колебаний, и из рис.1.12 – фазу:

$$A(\Omega) = \frac{f_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\beta^2 \Omega^2}}; \quad (1.50)$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{2\beta \Omega}{\omega_0^2 - \Omega^2}. \quad (1.51)$$

Введём понятия «амплитуда поглощения» и «амплитуда дисперсии» следующим образом:

$$A_n = A \sin \alpha, \quad A_d = A \cos \alpha. \quad (1.52)$$

Смысл этих терминов станет понятным позднее.

Рассмотрим сначала области низких ($\Omega \ll \omega_0$) и высоких ($\Omega \gg \omega_0$) частот вынуждающего воздействия. При $\Omega \ll \omega_0$, как легко видеть из соотношений (1.50) – (1.52):

при $\Omega \rightarrow 0$ $\alpha \approx 0$, $\sin \alpha \approx \operatorname{tg} \alpha \approx 2\beta\Omega/\omega_0^2$ и

$$A \approx f_0/\omega_0^2, \quad A_n \approx 2\beta f_0 \Omega/\omega_0^4 \rightarrow 0, \quad A_d \approx A. \quad (1.53)$$

Таким образом, на низких частотах смещение успевает следовать за силой без отставания по фазе; механический

§5. Вынужденные колебания

осциллятор ведёт себя практически так же, как под действием постоянной силы: в частности, при действии максимальной силы F_0 пружина растягивается на максимальную величину $A = \frac{F_0/m}{k/m} = \frac{F_0}{k}$. Соответственно, в электрическом контуре амплитуда заряда на конденсаторе на низких частотах $q_0 = CU_0$, т.е. все внешнее напряжение падает целиком на конденсаторе.

На высоких частотах ($\Omega \gg \omega_0$) амплитуда A стремится к нулю при $\Omega \rightarrow \infty$, а сдвиг фаз между силой и смещением при этом приближается к π ($\text{tg} \alpha \approx -2\beta/\Omega$). Амплитуды поглощения и дисперсии также асимптотически стремятся к нулю ($A_n \approx 2\beta f_0/\Omega^3$, $A_d \approx -f_0/\Omega^2 \rightarrow 0$). В этих условиях осциллятор вообще не успевает следовать за внешней силой, отсюда – малая амплитуда и отставание по фазе на π .

Найдём теперь условия, при которых достигается максимальная амплитуда колебаний (т.е. наблюдается «резонанс смещения»). Дифференцируя подкоренное выражение в (1.50) и приравнявая производную нулю, получаем частоту, на которой наблюдается резонанс:

$$\Omega_p = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2} = \sqrt{\omega_c^2 - \beta^2}. \quad (1.54)$$

Подставляя (1.54) в (1.50) и (1.51), получаем амплитуду смещения и тангенс угла сдвига фаз между смещением и силой при резонансе:

$$A_p = \frac{f_0}{2\beta\omega_c}; \quad (1.55)$$

$$\text{tg} \alpha_p = \frac{\Omega_p}{\beta}. \quad (1.56)$$

В условиях очень малого затухания ($\beta \ll \omega_0$) справедливы следующие приближительные выражения:

$$A_p \cong \frac{f_0}{2\beta\omega_0}; \quad (1.55,a)$$

$$\operatorname{tg} \alpha_p = \frac{\omega_0}{\beta}; \quad \alpha_p \approx \frac{\pi}{2}. \quad (1.56,a)$$

Из соотношений (1.53) и (1.55,a) следует, что отношение амплитуды колебаний при резонансе к амплитуде на низкой частоте с высокой степенью точности равно добротности (“четвёртое” определение добротности):

$$\frac{A_p}{A_{\omega \rightarrow 0}} = \frac{\omega_0^2}{2\beta\omega_c} \approx \omega_0 \tau_w \approx Q. \quad (1.57)$$

Для электрического контура величина добротности равна отношению амплитуды напряжения на конденсаторе при резонансе к амплитуде внешнего напряжения:

$$Q = \frac{U_{c0}^{(p)}}{U_0} \cong \frac{q_0^{(p)}}{CU_0}. \quad (1.58)$$

Из (1.52) видно, что при резонансе амплитуда дисперсии близка к нулю, а амплитуда поглощения приблизительно равна полной амплитуде.

Поскольку для электрических цепей важно знать частоту, при которой достигается максимальная амплитуда тока в цепи (а ток в электрическом контуре – аналог скорости для механического осциллятора), найдем условие максимальной скорости («резонанса скорости»). Учитывая, что амплитуда скорости, в соответствии с (1.47), равна $A_v = \Omega A$, получаем из (1.50):

$$A_v(\Omega) = \frac{f_0}{\sqrt{(\Omega^2 - \omega_0^2)^2 / \Omega^2 + 4\beta^2}}. \quad (1.59)$$

§5. Вынужденные колебания

Отсюда видно, что резонанс скорости (или тока в цепи, состоящей из последовательно соединённых катушки индуктивности, конденсатора и резистора) наблюдается при частоте $\Omega_p^v = \omega_0$.

Обсудим теперь вопрос о мощности, затрачиваемой внешним источником на поддержание вынужденных незатухающих колебаний. По определению, мгновенная величина мощности есть произведение действующей силы на скорость тела

$$P(t) = F(t) \cdot \dot{\xi}(t). \quad (1.60)$$

Подставляя в (1.61) соотношения (1.44) и (1.47), имеем:

$$\begin{aligned} P(t) &= F_0 \cos(\Omega t) \cdot \Omega A \cos(\Omega t - \alpha + \pi/2) = \\ &= \frac{1}{2} F_0 \cdot \Omega A [\cos(2\Omega t - \alpha + \pi/2) + \cos(\alpha - \pi/2)]. \end{aligned} \quad (1.61)$$

Из (1.61) следует, что мгновенная мощность, затрачиваемая внешней силой на поддержание вынужденных колебаний с частотой Ω , изменяется со временем с удвоенной частотой 2Ω . Средняя по времени величина затрачиваемой на поддержание колебаний мощности равна

$$\langle P(t) \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T P(t) dt = \frac{1}{2} F_0 A \Omega \cdot \cos(\alpha - \pi/2) = \frac{1}{2} F_0 A_n \Omega. \quad (1.62)$$

Таким образом, *величина $\langle P(t) \rangle$ оказывается пропорциональной амплитуде поглощения A_n – отсюда и происхождение этого термина.*

Для электрической цепи соотношение (1.62) легко трансформировать к виду

$$\langle P \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T I(t) U(t) dt = \frac{1}{2} q_0 U_0 \Omega \cdot \cos \varphi = \frac{1}{2} U_0 I_0 \cdot \cos \varphi. \quad (1.63)$$

В выражении (1.63) вместо угла α введен угол $\varphi = \alpha - \pi/2$,

равный сдвигу фаз между током и напряжением (см. рис.1.12). Отметим, что при $\varphi > 0$ ток *отстаёт* по фазе от напряжения. Поскольку $U_0 \cdot \cos \varphi = U_{R0} = I_0 R$ (см. рис. 12), то

$$\langle P \rangle = \frac{1}{2} I_0^2 R. \quad (1.64)$$

Отсюда видно, что протекание по цепи с сопротивлением R переменного тока вызывает в ней такое же тепловое действие, что и *постоянного* тока величиной $I = \frac{1}{\sqrt{2}} I_0 = I_\delta$. Эта величина называется «действующим» (или «эффektivным») значением силы переменного тока. По аналогии вводится и действующее значение напряжения $U_\delta = \frac{1}{\sqrt{2}} U_0$ (*). Т.о. выражение для средней мощности (1.63) может быть записано в виде:

$$\langle P \rangle = I_\delta \cdot U_\delta \cdot \cos \varphi. \quad (1.65)$$

Множитель $\cos \varphi$ иногда называют «коэффициентом мощности», потому что, как мы видим, именно сдвиг фаз между током и напряжением определяет величину выделяемой в цепи мощности при прочих равных условиях.

В частности, для идеальных (без потерь) конденсатора и катушки индуктивности выделяющаяся мощность при любых I и U равна нулю, так как равен нулю коэффициент мощности (сдвиг фаз между током и напряжением $\varphi = \pi/2$, см. рис.12 и 13).

Для цепи, состоящей из последовательно соединенных конденсатора, катушки индуктивности и резистора (см. рис.1.11), вместо рис.1.12 удобнее изобразить векторную диаграмму, на которой представлены напряжения на конденсаторе с ампли-

*) Далее под обозначениями U и I без индекса мы будем понимать именно действующие значения переменного тока и напряжения.

§5. Вынужденные колебания

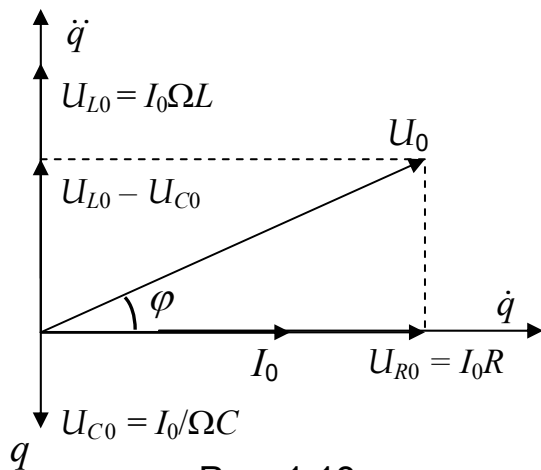


Рис. 1.13

тудой $U_{C0} = I_0/\Omega C$, катушке $U_{L0} = I_0\Omega L$ и резисторе I_0R (индексы “0” здесь означают амплитудные значения соответствующих величин).

Из вышесказанного ясно, что сила тока в общем случае не совпадает по фазе с приложенным напряжением

(так же, как в механических колебательных системах смещение и скорость осциллятора не совпадают по фазе с вынуждающим воздействием). Поэтому теряет смысл запись соотношения между *мгновенными значениями* силы тока и напряжения (аналогичная закону Ома для постоянного тока) – это соотношение изменяется со временем. Интерес представляет только соотношение между их *амплитудными* (или *действующими*) значениями, которое не меняется со временем.

$$\text{Отношение} \quad Z = \frac{U_0}{I_0} \left(= \frac{U_\partial}{I_\partial} \right) \quad (1.66)$$

называется *полным сопротивлением* цепи (или ее участка), а равенство

$$I_0 = \frac{U_0}{Z}; \quad \left(I_\partial = \frac{U_\partial}{Z} \right) \quad (1.67)$$

получило название *закона Ома для переменного тока*.

Используя рис.1.13, получаем связь между амплитудой тока в цепи и амплитудой внешнего напряжения для «последовательного» контура (рис.1.11)

$$I_0 = \frac{U_0}{\sqrt{R^2 + \left(\Omega L - \frac{1}{\Omega C}\right)^2}}. \quad (1.68)$$

Полное сопротивление переменному току цепи, состоящей из последовательно соединённых индуктивности, ёмкости и сопротивления, равно

$$Z = \sqrt{R^2 + \left(\Omega L - \frac{1}{\Omega C}\right)^2}. \quad (1.69)$$

Величина $X = \left(\Omega L - \frac{1}{\Omega C}\right)$ называется **реактивным сопротивлением**, тогда как R называется **омическим** сопротивлением.

С помощью векторной диаграммы (рис.1.13) также можно найти и фазовый сдвиг между напряжением и током в цепи:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\Omega L - \frac{1}{\Omega C}}{R}. \quad (1.70)$$

Подчеркнём, что φ – величина **отставания** по фазе тока в цепи от напряжения. В «**индуктивных**» цепях ($\Omega L > 1/\Omega C$) значение φ положительно, в «**ёмкостных**» ($\Omega L < 1/\Omega C$) – отрицательно.

Весьма важным с практической точки зрения является вопрос о зависимости от частоты внешнего воздействия величины мощности, затрачиваемой на поддержание вынужденных колебаний. Для электрических контуров эта зависимость определяет их резонансные свойства. Для осцилляторов типа молекул или их ансамблей зависимость такого типа отражает вид полос поглощения, связанных с возбуждением колебаний того или иного типа под действием, например, инфракрасного излучения (в ИК-спектроскопии) или электромагнитных волн

сантиметрового диапазона (*ЭПР-спектроскопия*), коротких радиоволн (*ЯМР-спектроскопия*).

Как следует из формулы (1.62), частотная зависимость поглощаемой мощности такова:

$$\langle P(t) \rangle = \frac{1}{2} F_0 A_n \Omega \sim \frac{\Omega^2}{(\Omega^2 - \omega_0^2)^2 + 4\beta^2 \Omega^2}. \quad (1.71)$$

Поскольку $(\Omega^2 - \omega_0^2)^2 = (\Omega - \omega_0)^2 (\omega_0 / \Omega + 1)^2 \Omega^2 \approx (\Omega - \omega_0)^2 \cdot 4\Omega^2$, легко видеть, что характер зависимости средней поглощаемой мощности от частоты может быть приближённо отображён функцией

$$\langle P(t) \rangle \sim R(\Omega) = \frac{\beta^2}{(\Omega^2 - \omega_0^2)^2 + \beta^2}. \quad (1.72)$$

В спектроскопии функция $R(\Omega)$ называется “*лоренцевской*” *функцией формы линии*. Она обладает следующими свойствами: $R(\Omega) = 1$ при $\Omega = \omega_0$; $R(\Omega) = 1/2$ при $|\Omega - \omega_0| = \beta$; $R(\Omega) = 0,1$ при $|\Omega - \omega_0| = 3\beta$. Отсюда очевидно, что ширина функции $R(\omega)$ на полувисоте $\Delta\Omega$ (т.н. “полуширина”)

$$\Delta\Omega \approx 2\beta = 1/\tau_W. \quad (1.73)$$

Используя (1.39,а), получаем “пятое” определение добротности:

$$Q = \omega_c \tau_W \approx \Omega_p \tau_W = \frac{\Omega_p}{\Delta\Omega}. \quad (1.74)$$

Так как при выводе (1.72) были сделаны упрощающие предположения, необходимо указать диапазон частот, в котором формула (1.72) “работает”. Нетрудно убедиться, что это диапазон ограничен весьма нежестким условием:

$$|\Omega - \omega_0| \leq n\beta, \quad \text{где } n \ll \frac{2\pi}{\gamma} = 2\pi N_e = 2Q. \quad (1.75)$$

Для иллюстрации подведём некоторые итоги вышесказанному в графической форме – см. рис.1.14.

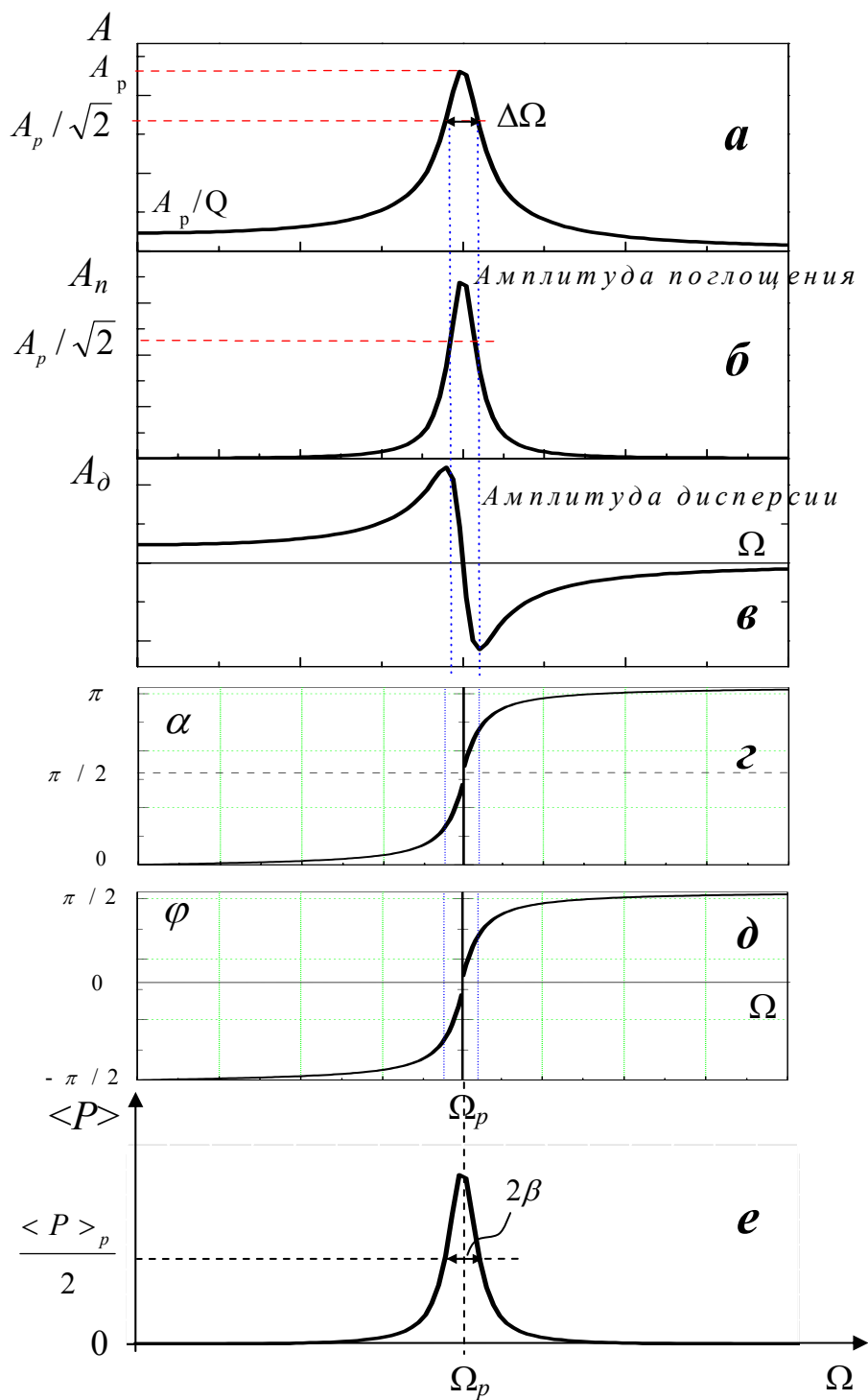


Рис.1.14

§5. Вынужденные колебания

Поясним теперь происхождение термина «*амплитуда дисперсии*». Заметим, что это амплитуда колебаний, *совпадающих по фазе* с вынуждающей силой. В частности, при распространении электромагнитных волн в диэлектрике происходят периодические смещения электронных оболочек в атомах под действием электрического поля волны. Амплитуда дисперсии в этом случае – это амплитуда колебаний электронных оболочек, происходящих в фазе с электрическим полем волны. А ведь такое смещение электронных оболочек – это поляризация диэлектрика, которая определяет величину его диэлектрической проницаемости и, следовательно, скорости распространения электромагнитных волн. Поэтому зависимость амплитуды дисперсии от частоты (см. рис.1.14,б) отражает характер *дисперсии волн* – т.е. зависимость скорости их распространения от длины волны. Более подробно этот вопрос будет обсуждаться в § 3 главы 6.

В заключительной части этого параграфа остановимся кратко на особенностях вынужденных колебаний в системе связанных осцилляторов. Ясно, что в системе с N степенями свободы при повышении частоты внешней силы будут поочередно наблюдаться резонансы для всех N нормальных мод. Соответствующие резонансные кривые будут тем шире, чем меньше добротность для данной моды колебаний (эти добротности могут быть разными!). На каждой резонансной частоте будут возбуждаться нормальные колебания только одного типа. С увеличением затухания резонансные кривые, соответствующие разным нормальным модам, начнут перекрываться. В этих условиях теряет смысл выделение отдельных нормальных мод, как независимых колебательных движений системы, не обменивающихся энергией; использование представлений о нормальных колебаниях становится некорректным.

ГЛАВА II. ВОЛНЫ

§1. Классическое дифференциальное волновое уравнение

При увеличении числа связанных осцилляторов в системе, помимо выделения нормальных мод, выяснения спектра их частот не менее важным становится вопрос о скорости передачи колебательного движения из одной части системы в другую – т. е. о скорости распространения волн в системе. Под волнами мы будем понимать возмущения, распространяющиеся в какой-либо среде.

Рассмотрим одномерную модель системы, состоящей из большого числа связанных осцилляторов – см. рис. 2.1.

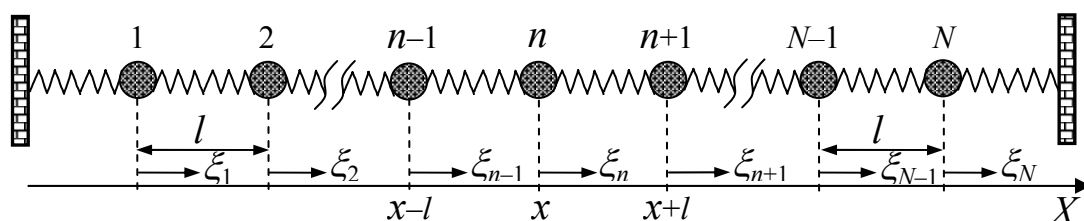


Рис. 2.1

Можно считать, что показанная на рис.2.1 система моделирует одномерный кристалл, либо длинную молекулу полимерного типа. Массы всех “атомов” будем считать одинаковыми и равными m , связь между ними моделируем пружинками с коэффициентами упругости k . Потерями (трением) в системе пренебрежем. Введем ось X , направленную вдоль цепочки атомов, через $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ обозначим отклонения каждого атома от положения равновесия. Расстояния между равновесными положениями всех соседних атомов будем полагать одинаковыми и равными l .

Запишем второй закон динамики для n -го атома:

$$m \ddot{\xi}_n = k(\xi_{n+1} - \xi_n) - k(\xi_n - \xi_{n-1}). \quad (2.1)$$

Поскольку n -й атом имеет координату x , можно заменить величину ξ_n на функцию $\xi(x)$. Далее мы ограничимся рассмотрением только таких колебательных движений в нашем кристалле, при которых соседние атомы движутся почти одинаково (это означает, что мы исключаем из рассмотрения наиболее высокочастотные моды колебаний). При этом на расстоянии l величина смещения атома от положения равновесия изменяется мало. Воспользовавшись разложением функций в ряд Тейлора, можно записать приблизительное выражение для смещений атомов с номерами $(n - 1)$ и $(n + 1)$, ограничиваясь тремя первыми членами разложений по малому параметру:

$$\xi_{n+1} = \xi(x + l, t) \approx \xi(x, t) + \frac{\partial \xi}{\partial x} \cdot l + \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} \cdot \frac{l^2}{2}; \quad (2.2)$$

$$\xi_{n-1} = \xi(x - l, t) \approx \xi(x, t) - \frac{\partial \xi}{\partial x} \cdot l + \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} \cdot \frac{l^2}{2}. \quad (2.3)$$

Подставив (2.2) – (2.3) в (2.1), получаем линейное дифференциальное уравнение второго порядка:

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = \frac{kl^2}{m} \cdot \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}. \quad (2.4)$$

Учитывая, что коэффициент перед производной $\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}$ имеет размерность квадрата скорости, уравнение (2.4) можно записать так:

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = v^2 \cdot \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}, \quad (2.5)$$

где
$$v^2 = \frac{kl^2}{m}. \quad (2.6)$$

Это уравнение описывает распространение возмущений в нашем одномерном кристалле. Оно называется *одномерным классическим дифференциальным уравнением волны*. Термин “классическое” применяется для того, чтобы подчеркнуть

ограниченный диапазон использования этого уравнения: только в случае *малых возмущений* (квазиупругая сила), распространяющихся в *недиспергирующих средах* (объяснение этого термина будет приведено ниже).

В трёхмерном случае уравнение (2.5) следует переписать так:

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = v^2 \cdot \Delta \xi. \quad (2.5,a)$$

Здесь $\Delta = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right)$ – оператор Лапласа.

§ 2. Уравнение волны

Уравнением упругой волны называется соотношение, описывающее зависимость смещения колеблющихся частиц от координат и времени *в явной форме*. В случае электромагнитной волны, как будет показано ниже, вместо смещения в уравнении волны будут фигурировать напряжённость электрического и индукция магнитного полей.

Сначала будем предполагать, что для нашего одномерного кристалла (рис.2.1) в начале координат ($x = 0$) колебательное движение “первого” атома происходит по гармоническому закону:

$$\xi(0,t) = A \cdot \cos \omega t. \quad (2.7)$$

Очевидно, что на соседние атомы будет действовать гармоническая возмущающая сила с частотой ω , и это возмущение будет постепенно распространяться всё дальше от “начального” атома. Обозначим через v скорость распространения этого возмущения. Тогда зависимость от времени смещения атома, расположенного в точке с координатой x , можно, очевидно, представить в виде “запаздывающей” на время $\tau = x/v$ гармонической функции

$$\xi(x,t) = A \cdot \cos[\omega(t - \tau)] = A \cdot \cos(\omega t - kx), \quad (2.8)$$

где $k = \omega/v$ – т. н. “*волновое число*”, λ – длина волны. Подставляя (2.8) в дифференциальное волновое уравнение (2.5), убеждаемся в том, что функция (2.8) – действительно решение волнового уравнения. Причём введённый ранее из соображений размерности параметр v дифференциального уравнения (2.5) по физическому смыслу соответствует скорости распространения фазы волны (и называется поэтому “*фазовой скоростью*”). Существенно, что классическому дифференциальному волновому уравнению (2.5) удовлетворяют гармонические волны (2.8) различных частот ω при том, однако, условии, что скорости распространения этих волн не зависят от частоты. *Среды, в которых скорости распространения волн с разными частотами одинаковы, называются “недиспергирующими”*. Поскольку всякая достаточно “плавная” функция может быть разложена на гармонические функции (в ряд Фурье), совершенно очевидно, что такая функция $\xi(t - x/v)$ также будет решением уравнения (2.5). Предлагаем убедиться в этом прямой подстановкой. Этой функции соответствует распространяющаяся по оси X , со скоростью v *негармоническая волна*.

Введем некоторые определения.

Волновой поверхностью мы будем называть такую поверхность, колебания во всех точках которой происходят в одной и той же фазе.

Из определения ясно, что волновых поверхностей бесконечно много. В модели одномерного кристалла (рис.2.1) каждая волновая поверхность вырождается в точку. Имеет смысл специально выделить переднюю волновую поверхность, которая

называется *фронтом волны*.

Если фронт волны и волновые поверхности – плоскости, то волна называется *плоской*. Плоскую волну можно наблюдать в тех случаях, когда расстояние до источника волн x много меньше размеров источника D :

$$x \ll D. \quad (2.9)$$

Плоская волна, распространяющейся по оси X , описывается уравнением (2.8), поскольку все точки, лежащие на одной и той же волновой поверхности (плоскости, перпендикулярной оси X), колеблются одинаково. Для плоской волны часто используют форму записи уравнения волны в полярной системе координат (см. рис.2.2). Введем радиус-вектор \vec{r} , проведенный из начала полярной системы координат O в произвольную точку пространства, а также волновой вектор \vec{k} , равный по величине волновому числу и направленный по нормали к волновой поверхности в сторону распространения волны (в данном случае по оси X). Тогда $kx = krcos\alpha = (\vec{k}, \vec{r})$ (см. рис.2.2) и уравнение плоской волны может быть записано в виде

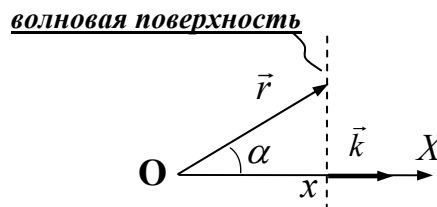


Рис. 2.2

$$\xi(r,t) = A \cdot \cos(\omega t - \vec{k}\vec{r}). \quad (2.10)$$

Если размеры источника много меньше расстояния до него (“*точечный*” источник),

$$D \ll x, r; \quad (2.9,a)$$

то волновые поверхности имеют сферическую форму, волна в этом случае называется *сферической*. Ясно, что по мере удаления волны от источника энергия волны распределяется по всё возрастающему количеству частиц среды. Энергия,

приходящаяся на одну частицу, обратно пропорциональна площади соответствующей волновой поверхности, т.е. $\sim 1/r^2$ (здесь r – расстояние от волновой поверхности до точечного источника). Поскольку энергия колеблющейся частицы пропорциональна квадрату амплитуды (см. (1.7)), амплитуда колебаний частиц в сферической волне обратно пропорциональна r . В итоге уравнение сферической волны следует записать так:

$$\xi(r,t) = \frac{A_0}{r} \cdot \cos(\omega t - kr). \quad (2.12)$$

Наконец, если часть энергии волны теряется в среде из-за *поглощения*, то происходит постепенное *затухание волны*, которое нужно учесть аналогично (1.34) введением дополнительного экспоненциального множителя перед косинусом:

$$A(x) = A_0 e^{-\eta x} \text{ – плоская волна;} \quad (2.13)$$

$$A(r) = \frac{A_0}{r} \cdot e^{-\eta r} \text{ – сферическая волна.} \quad (2.14)$$

Коэффициент η называется *коэффициентом поглощения* среды.

Подчеркнём, что соотношения (2.8), (2.10), (2.12)–(2.14) описывают как *продольные волны* (смещение частиц происходит вдоль направления распространения волны), так и *поперечные волны* (частицы колеблются в плоскости, перпендикулярной направлению распространения).

В заключение этого параграфа покажем, что полученное нами выражение для фазовой скорости упругой волны в одномерной цепочке атомов (рис. 2.1) легко обобщается на систему с распределёнными параметрами – длинный однородный стержень, изготовленный из материала, плотность которого ρ .

Рассмотрим отрезок стержня длиной l (см. рис.2.3), масса которого $m = \rho lS$, где S – площадь поперечного сечения стержня. Поскольку

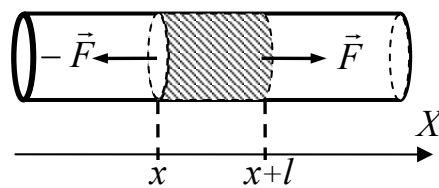


Рис. 2.3

выбранный нами отрезок в целом покоится, приложенные к нему слева и справа силы \vec{F} равны (для определённости будем считать эти силы растягивающими). При этом отрезок удлиняется на Δl . В рассматриваемом случае коэффициент упругости – это коэффициент пропорциональности между величинами силы F и удлинения стержня:

$$k = \frac{F}{\Delta l} = \frac{FS}{S\Delta l} = \frac{\sigma S}{\Delta l}. \quad (2.15)$$

В соотношении (2.15) введена величина механического напряжения $\sigma = \frac{F}{S}$. Подставим полученные для m и k выражения в формулу (2.6)

$$v^2 = \frac{kl^2}{m} = \frac{\sigma l}{\rho \Delta l}. \quad (2.16)$$

Учитывая, что величина $G = \frac{\sigma l}{\Delta l}$ является модулем Юнга (модулем продольной упругости), получаем для скорости распространения упругой волны следующее соотношение:

$$v = \sqrt{\frac{G}{\rho}}. \quad (2.17)$$

При выводе (2.17) мы предполагали, что при распространении волны силы действуют вдоль стержня (по направлению распространения волны). Соответственно, частицы стержня также совершают колебательные движения вдоль оси X

(т.е. рассматривались продольные волны). В твёрдом теле возможно также распространение поперечных волн. Нетрудно показать, что в этом случае модуль Юнга в формуле (2.17) нужно заменить на модуль сдвига.

§ 3. Энергия упругой волны

Начнём рассмотрение вопроса об энергии упругой волны на примере простой модели продольной волны в одномерном кристалле (рис.2.1). Вычислим энергию, приходящуюся на один “элемент” нашего кристалла – один “атом” массой m и одну связь (пружину) с коэффициентом упругости k – см. рис.2.4. Кинетическая энергия элемента – это энергия “атома”,

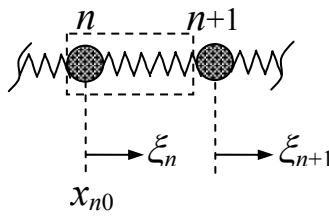


Рис.2.4

движущегося со скоростью $\frac{\partial \xi}{\partial t}$:

$$T = \frac{m}{2} \cdot \left(\frac{\partial \xi}{\partial t} \right)^2. \quad (2.18)$$

Потенциальная энергия деформированной пружины пропорциональна квадрату величины её растяжения или сжатия $(\xi_{n+1} - \xi_n)^2$; учитывая соотношение (2.2), имеем $(\xi_{n+1} - \xi_n) \approx l \cdot \frac{\partial \xi}{\partial x}$, откуда

$$U = \frac{kl^2}{2} \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \right)^2 = \frac{m\nu^2}{2} \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \right)^2. \quad (2.19)$$

Итак, для рассматриваемой нами простой модели полная энергия одного элемента одномерного кристалла:

$$W = \frac{m}{2} \left[\left(\frac{\partial \xi}{\partial t} \right)^2 + \nu^2 \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \right)^2 \right]. \quad (2.20)$$

Эта формула может быть естественным образом обобщена

на любые (не обязательно одномерные) среды с распределёнными параметрами. Для этого нужно только заменить массу одного элемента на массу, приходящуюся на единицу объёма среды (т.е. плотность ρ), при этом получим полную энергию, приходящуюся на единицу объёма среды, в которой распространяется упругая волна:

$$W_0 = \frac{\rho}{2} \left[\left(\frac{\partial \xi}{\partial t} \right)^2 + v^2 \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \right)^2 \right]. \quad (2.21)$$

Величина W_0 называется ***плотностью энергии упругой волны***. Для плоской волны, распространяющейся по оси X (как продольной, так и поперечной), зависимость смещения от координаты и времени определяется уравнением (2.8), откуда

$$T_0 = \frac{\rho}{2} \left(\frac{\partial \xi}{\partial t} \right)^2 = \frac{\rho}{2} A^2 \omega^2 \sin^2(\omega t - kx), \quad (2.22)$$

$$U_0 = \frac{\rho}{2} \left(v \frac{\partial \xi}{\partial x} \right)^2 = \frac{\rho}{2} A^2 \omega^2 \sin^2(\omega t - kx) = T_0. \quad (2.23)$$

Из соотношений (2.22)–(2.23) получаем

$$W_0 = T_0 + U_0 = \rho A^2 \omega^2 \sin^2(\omega t - kx). \quad (2.24)$$

На рис.2.5 показаны пространственное распределение $\xi(x)$ и соответствующие функции $T_0(x)$, $U_0(x)$ для бегущей упругой волны. Максимумы потенциальной и кинетической энергии в бегущей волне локализованы в одних и тех же местах (там, где $\xi = 0$). С течением времени показанная на рис.2.5 картинка “бежит” по оси X со

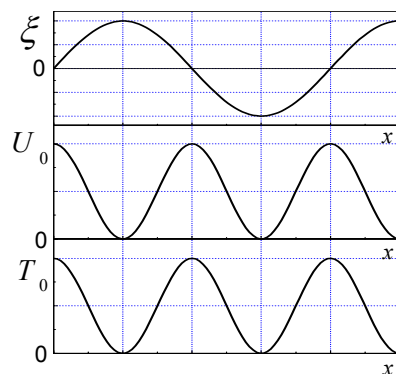


Рис. 2.5

скоростью v . В любой фиксированной точке пространства величина плотности энергии со временем пульсирует (период пульсаций в два раза меньше периода волны – см. рис.2.5) Поэтому целесообразно определить среднее по времени (или в пространстве) значение плотности энергии $\langle W_0 \rangle$. Учитывая, что усреднение по времени квадрата синуса дает $\frac{1}{2}$, получаем:

$$\langle W_0(t) \rangle = \frac{\rho A^2 \omega^2}{2}. \quad (2.25)$$

Поскольку волна переносит энергию, полезно определить несколько величин, характеризующих этот перенос.

Плотность потока энергии – количество энергии, переносимой волной в единицу времени через единичную площадку, перпендикулярную направлению распространения волны. Численно эта величина равна энергии, заключённой внутри цилиндрической поверхности с единичным основанием и образующей, равной v :

$$S(t) = W_0(t) \cdot v. \quad (2.26)$$

Подчеркнём, что плотность потока энергии является функцией времени, поскольку зависит от времени величина $W_0(t)$ – см. (2.24).

Интенсивностью волны называется среднее по времени значение плотности потока энергии волны:

$$I = \langle S(t) \rangle = \langle W_0(t) \rangle \cdot v = \frac{\rho A^2 \omega^2 v}{2}. \quad (2.27)$$

Русским физиком Н.А. Умовым в 1874 г. была введена векторная характеристика переноса энергии упругой волной:

$$\vec{S}(t) = W_0(t) \cdot \vec{v}. \quad (2.28)$$

Впоследствии величина \vec{S} получила название *вектора Умова*. Как следует из (2.28), амплитуда вектора Умова изменяется со временем и в пространстве, поэтому целесообразно определить среднее по времени значение вектора Умова (*векторную интенсивность волны*):

$$\langle \vec{S}(t) \rangle = \langle W_0(t) \rangle \cdot \vec{v} = \frac{\rho A^2 \omega^2 \vec{v}}{2}. \quad (2.29)$$

Поток энергии упругой волны через любую поверхность Σ можно определить интегрированием скалярного произведения вектора Умова на векторный элемент площадки $d\vec{s}$ (вектор $d\vec{s}$ направлен по нормали к площадке ds):

$$\Phi = \int_{\Sigma} \vec{S}(t) \cdot d\vec{s} = \int_{\Sigma} S_n(t) ds. \quad (2.30)$$

Здесь S_n – нормальная к площадке ds составляющая вектора \vec{S} . Наконец, среднее по времени значение потока энергии упругой волны через поверхность:

$$\langle \Phi(t) \rangle = \int_{\Sigma} \langle \vec{S}(t) \rangle \cdot d\vec{s} = \int_{\Sigma} \langle S_n(t) \rangle ds. \quad (2.31)$$

§ 4. Электромагнитные волны в системе связанных контуров и в двухпроводной линии

Рассмотрим процесс распространения колебаний в системе связанных контуров, являющейся в некотором смысле аналогом модели одномерного кристалла – см. рис.2.6. Выделим в этой системе два произвольных соседних контура, включающих конденсаторы с номерами $(n - 1)$, n и $(n + 1)$. Для определённости

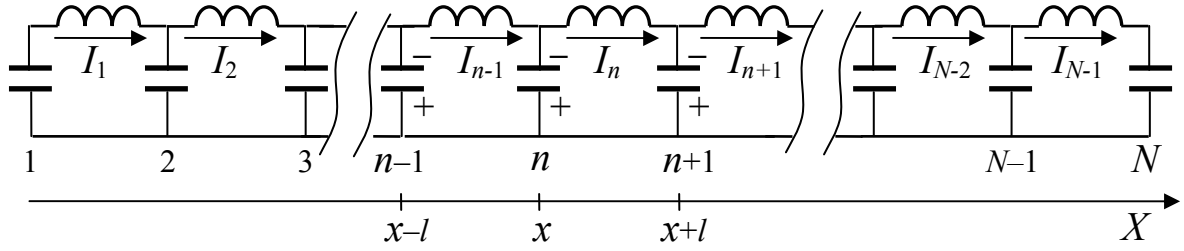


Рис. 2.6

обозначим на рисунке знаки зарядов на конденсаторах и направления токов через катушки индуктивностей. Осуществляя обход по двум контурам по часовой стрелке, получаем уравнения:

$$\frac{q_{n-1}}{C} - \frac{q_n}{C} = -L \frac{dI_{n-1}}{dt}, \quad (2.32)$$

$$\frac{q_n}{C} - \frac{q_{n+1}}{C} = -L \frac{dI_n}{dt}. \quad (2.33)$$

После вычитания (2.33) из (2.32) получаем:

$$\frac{q_{n-1}}{C} - \frac{2q_n}{C} + \frac{q_{n+1}}{C} = -L \frac{d(I_{n-1} - I_n)}{dt}. \quad (2.34)$$

Поскольку $I_{n-1} - I_n = -\dot{q}_n$, правая часть уравнения (2.34) может быть записана в форме $L\ddot{q}_n$. Будем, кроме того, считать по аналогии с одномерным кристаллом, что заряд на конденсаторах является достаточно плавной и непрерывной функцией координаты и воспользуемся, как и ранее, разложением функций в ряды Тейлора:

$$q_n \equiv q(x, t); \quad (2.35)$$

$$q_{n+1} \equiv q(x+l, t) = q(x, t) + \frac{\partial q}{\partial x} \cdot l + \frac{\partial^2 q}{\partial x^2} \cdot \frac{l^2}{2} + \dots; \quad (2.36)$$

$$q_{n-1} \equiv q(x-l, t) = q(x, t) - \frac{\partial q}{\partial x} \cdot l + \frac{\partial^2 q}{\partial x^2} \cdot \frac{l^2}{2} + \dots \quad (2.37)$$

Ограничиваясь только указанными членами разложений в

ряды и подставляя (2.35)–(2.37) в (2.34), получаем дифференциальное волновое уравнение в форме:

$$\frac{\partial^2 q}{\partial t^2} = \frac{l^2}{LC} \cdot \frac{\partial^2 q}{\partial x^2}. \quad (2.38)$$

Сравнивая (2.38) с (2.5), находим скорость электромагнитной волны в системе, состоящей из большого количества связанных контуров:

$$v = \frac{l}{\sqrt{LC}}. \quad (2.39)$$

По аналогии с механической системой уравнение (2.38) можно обобщить на систему с распределенными параметрами – двухпроводную линию (см. рис.2.7). Будем считать, что двухпроводная линия представляет собой расположенные на расстоянии h друг от друга две широкие длинные проводящие полосы (“шины”), параллельные друг другу. Потерями в линии будем пренебрегать. В такой линии ёмкость и индуктивность распределены по всей линии, а не сосредоточены на дискретных элементах, как в системе, показанной на рис.2.6.

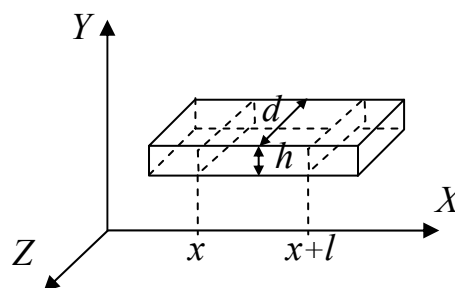


Рис. 2.7

Как и в случае механической системы с распределенными параметрами (рис.2.3), задача сводится к некоторому преобразованию соотношения (2.39). Для этого определим ёмкость и индуктивность участка двухпроводной линии длиной l .

Электроёмкость плоского конденсатора с площадью пластин ld и расстоянием h между ними равна

$$C = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 ld}{h}, \quad (2.40)$$

где ε – диэлектрическая проницаемость среды между пластинами конденсатора, ε_0 – электрическая постоянная.

Для определения индуктивности участка линии длиной l предположим, что на этом участке по верхней шине протекает ток I , направленный по оси X ; соответственно по нижней шине течёт такой же ток, но направленный в противоположную сторону (как в каждом контуре рис. 2.6). Из теоремы о циркуляции следует, что магнитное поле такой “бифилярной” системы будет отличаться от нуля только в пространстве между пластинами. Направление вектора магнитной индукции легко определить по правилу буравчика – вектор \vec{B} направлен вдоль оси Z . Совершая обход по замкнутому контуру, расположенному в плоскости YZ и охватывающему только один провод линии, имеем по теореме о циркуляции:

$$Bd = \mu\mu_0 I, \quad B = \frac{\mu\mu_0 I}{d}, \quad (2.41)$$

где μ_0 – магнитная постоянная.

Умножая величину магнитной индукции на lh , получаем магнитный поток через участок боковой поверхности линии длиной l :

$$\Phi = Blh = \frac{\mu\mu_0 lhI}{d}. \quad (2.42)$$

Поскольку по определению индуктивности $\Phi = LI$, искомая индуктивность L участка линии длиной l равна:

$$L = \frac{\mu\mu_0 lh}{d}. \quad (2.43)$$

Наконец, подставляем (2.43) и (2.40) в (2.39), и определяем фазовую скорость электромагнитной волны в двухпроводной линии, помещённой в среду с диэлектрической проницаемостью

ε , и магнитной проницаемостью μ :

$$v = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\varepsilon_0\mu\mu_0}} = \frac{c}{n}. \quad (2.44)$$

Здесь $c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}} = 3 \cdot 10^8 \text{ м/с}$ – фазовая скорость электромагнитной

волны в двухпроводной линии, помещённой в вакуум; $n = \sqrt{\varepsilon\mu}$ – параметр, зависящий от свойств среды.

Так как величина заряда на верхней и нижней шинах в каком-либо месте двухпроводной линии $q(x)$ пропорциональна напряжённости электрического поля в этом месте $E(x)$, дифференциальное уравнение (2.38) можно записать следующим образом:

$$\frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = v^2 \cdot \frac{\partial^2 E}{\partial x^2}. \quad (2.45)$$

Подчеркнём, что в распространяющейся по оси X электромагнитной волне вектор \vec{E} направлен вдоль оси Y , а вектор магнитной индукции \vec{B} – вдоль оси Z , т. е. электромагнитная волна – поперечная.

§ 5. Электромагнитные волны в однородной непроводящей среде

Для вывода уравнения электромагнитной волны в однородной непроводящей среде воспользуемся **уравнениями Максвелла в интегральной форме**. При выводе дифференциального уравнения волны нам понадобятся только два из них – обобщенные выражения **закона электромагнитной индукции и теоремы о циркуляции** (с учётом того, что ток проводимости отсутствует):

$$-\frac{\partial}{\partial t} \int_{\Sigma} (\vec{B}, d\vec{S}) = \int_C (\vec{E}, d\vec{l}), \quad (2.46)$$

$$\varepsilon\varepsilon_0\mu\mu_0 \frac{\partial}{\partial t} \int_{\Sigma} (\vec{E}, d\vec{S}) = \int_C (\vec{B}, d\vec{l}). \quad (2.47)$$

Правые интегралы в (2.46) и (2.47) берутся по замкнутому контуру C ($d\vec{l}$ – элемент такого контура), левые – по поверхностям Σ , ограниченным соответствующими контурами. Необходимо помнить, что *направление обхода по контуру и направление нормали к поверхности связаны между собой правилом буравчика.*

Будем предполагать, что напряжённость электрического поля и индукция магнитного поля – функции только координаты x , – см. рис.2.8. Это означает, что рассматриваемая нами электромагнитная волна (если, конечно, мы докажем её существование) – плоская.

Выберем прямоугольный контур в плоскости XY и будем осуществлять обход по пути 1-2-3-4, предполагая величины dx и dy малыми. Учтём, что на участке 1-2 перемещение происходит по оси Y , поэтому $\int_1^2 (\vec{E}, d\vec{l}) = E_y(x + dx)dy$; на участке 3-4 перемещение

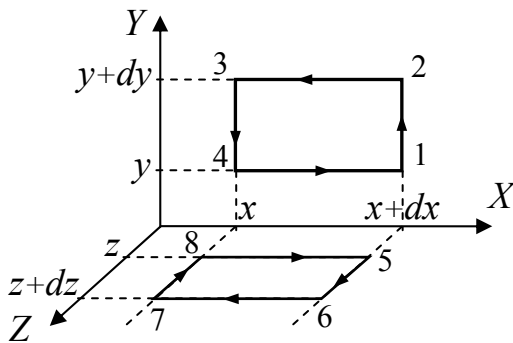


Рис. 2.8

происходит против оси Y , поэтому $\int_3^4 (\vec{E}, d\vec{l}) = -E_y(x)dy$; участки 2-3 и 4-1 абсолютно одинаковы, но проходятся в разные стороны, следовательно $\int_2^3 (\vec{E}, d\vec{l}) = -\int_4^1 (\vec{E}, d\vec{l})$.

В итоге имеем:

$$\int_C (\vec{E}, d\vec{l}) = [E_y(x + dx) - E_y(x)] dy = \frac{\partial E_y}{\partial x} dx dy. \quad (2.48)$$

Левая часть соотношения (2.46) легко вычисляется, если иметь в виду, что поверхность Σ мала, так что величина \vec{B} в разных местах этой поверхности практически одинакова, а нормаль к этой поверхности направлена по оси Z :

$$\int_{\Sigma} (\vec{B}, d\vec{S}) = B_z dx dy. \quad (2.49)$$

Подставив (2.48) и (2.49) в соотношение (2.46), получаем:

$$\frac{\partial E_y}{\partial x} = -\frac{\partial B_z}{\partial t}. \quad (2.50)$$

Аналогичным образом выберем прямоугольный контур в плоскости XZ и осуществим обход по пути 5-6-7-8. Правая часть уравнения (2.47) вычисляется точно так же, как и правая часть (2.46):

$$\int_C (\vec{B}, d\vec{l}) = [B_z(x + dx) - B_z(x)] dz = \frac{\partial B_z}{\partial x} dx dz. \quad (2.51)$$

При вычислении левой части нужно учитывать, что направление нормали к контуру 5-6-7-8 противоположно оси Y :

$$\int_{\Sigma} (\vec{E}, d\vec{S}) = -E_y dx dz. \quad (2.52)$$

Подстановка (2.51) и (2.52) в (2.47) приводит к уравнению

$$\frac{\partial B_z}{\partial x} = -\varepsilon\varepsilon_0\mu\mu_0 \frac{\partial E_y}{\partial t}. \quad (2.53)$$

Дифференцируя (2.50) и (2.53) по координате x и, изменяя порядок дифференцирования в правых частях (2.50) и (2.53), получаем

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} = -\frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial B_z}{\partial x}, \quad (2.50,a)$$

$$\frac{\partial^2 B_z}{\partial x^2} = -\varepsilon\varepsilon_0\mu\mu_0 \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial E_y}{\partial x} \right). \quad (2.53,a)$$

Наконец, подставляем в правую часть (2.50,a) равенство (2.53), а в правую часть (2.53,a) – соотношение (2.50); в итоге имеем два дифференциальных уравнения электромагнитной волны:

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2}, \quad (2.54)$$

$$\frac{\partial^2 B_z}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 B_z}{\partial x^2}. \quad (2.55)$$

Естественно, что эти уравнения абсолютно одинаковы – изменения электрического и магнитного полей в электромагнитной волне строго взаимосвязаны. Фазовая скорость электромагнитной волны получилась такой же, как и в двухпроводной линии – см. формулу (2.44). Следовательно, двухпроводная линия просто направляет электромагнитную волну в нужную сторону, присутствие линии не является необходимым условием существования волны.

Из уравнений (2.54)–(2.55) следует, что электромагнитная волна, в отличие от упругой, может распространяться в вакууме с фазовой скоростью $c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}} \approx 3 \cdot 10^8 \text{ м/с}$. Получив это число из

своих уравнений, Максвелл сделал фундаментальный вывод – *свет представляет собой электромагнитную волну* (к тому времени скорость света была уже измерена экспериментально с

достаточно большой точностью, хотя природа света окончательно не была установлена). Для световой волны параметр $n = \sqrt{\varepsilon\mu}$ называется показателем преломления; скорость света в среде с показателем преломления n определяется соотношением $v = c/n$.

Из уравнений (2.54) и (2.55) следует ещё один принципиальный вывод – электромагнитная волна всегда является поперечной. Действительно, задавшись только одним ограничением – предполагая, что волна плоская, мы в итоге автоматически получили, что в уравнениях (2.54) и (2.55) присутствуют только компоненты напряжённости электрического поля и индукции магнитного поля, направленные по осям Y и Z соответственно.

Поэтому в дальнейшем мы не будем использовать индексы “ y ”, “ z ” при обозначении напряжённости электрического поля E и индукции магнитного поля B .

Анализ полученных нами уравнений позволяет получить дополнительные сведения о взаимосвязи между амплитудами и фазами колебаний векторов \vec{E} и \vec{B} . Пусть напряжённость электрического поля в плоской волне изменяется по закону:

$$E(x,t) = E_0 \cos(\omega t - kx), \quad (2.56)$$

Предполагая возможность сдвига по фазе между колебаниями векторов \vec{E} и \vec{B} , запишем:

$$B(x,t) = B_0 \cos(\omega t - kx + \varphi), \quad (2.57)$$

Далее подставляем (2.56) и (2.57) в уравнения (2.50) и (2.53):

$$kE_0 \sin(\omega t - kx) = \omega B_0 \cos(\omega t - kx + \varphi), \quad (2.58)$$

$$kB_0 \sin(\omega t - kx + \varphi) = \omega E_0 \varepsilon \varepsilon_0 \mu \mu_0 \sin(\omega t - kx). \quad (2.59)$$

Совершенно очевидно, что равенства (2.58) и (2.59) могут выполняться, только если равны амплитуды и фазы гармонических функций в левых и правых частях этих равенств. Отсюда получаем, что фазы колебаний векторов \vec{E} и \vec{B} одинаковы ($\varphi = 0$); перемножив перекрёстно амплитуды (2.58) и (2.59) и приравняв результаты перемножения, имеем:

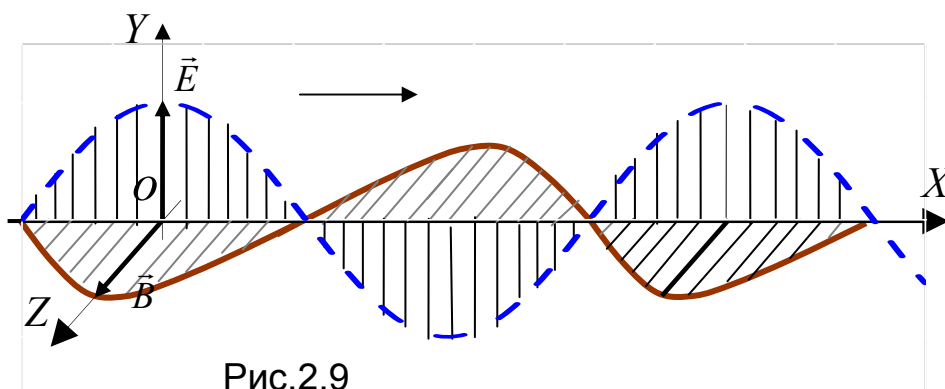
$$\varepsilon \varepsilon_0 E_0^2 = \frac{B_0^2}{\mu \mu_0}. \quad (2.60)$$

Поскольку фазы колебаний векторов \vec{E} и \vec{B} совпадают, соотношение (2.60) выполняется для величин напряжённости электрического поля и индукции магнитного поля в произвольные моменты времени (не только для амплитудных значений):

$$\varepsilon \varepsilon_0 E^2 = \frac{B^2}{\mu \mu_0}, \quad B = \frac{E}{v}. \quad (2.61)$$

На рис.2.9 показана “мгновенная фотография” плоской электромагнитной волны, распространяющейся по оси X . С течением времени волна движется по оси со скоростью $v = c/n$.

Обратим внимание, что тройка векторов \vec{E} , \vec{B} и \vec{v}



ориентирована совершенно определенным образом – направление скорости волны всегда совпадает с направлением векторного произведения $[\vec{E}, \vec{B}]$. Максимумы напряжённости электрического поля в электромагнитной волне совпадают с максимумами индукции магнитного поля – рис.2.9.

§6. Энергия электромагнитной волны

Энергия электромагнитной волны складывается из энергии электрического поля и энергии магнитного поля. Ранее были получены выражения для плотности энергии электрического W_{0E} и магнитного W_{0B} полей:

$$W_{0E} = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 E^2}{2}, \quad (2.62)$$

$$W_{0B} = \frac{B^2}{2\mu\mu_0}. \quad (2.63)$$

Сравнивая (2.62) и (2.63) с (2.61), приходим к выводу, что в электромагнитной волне энергия распределяется поровну между электрическим и магнитным полем (точно так же, как в упругой волне энергия распределяется поровну между кинетической и потенциальной – см. (2.24)).

Из соотношений (2.62) и (2.63) следует, что плотность энергии (энергия, приходящаяся на единицу объёма среды, в которой распространяется электромагнитная волна), равна:

$$W_0 = W_{0E} + W_{0B} = \varepsilon\varepsilon_0 E^2 = \frac{B^2}{\mu\mu_0} = \frac{EB}{\mu\mu_0\nu}. \quad (2.64)$$

Для характеристики переноса энергии электромагнитной волной вводятся плотность потока энергии (S), интенсивность (I),

поток энергии через какую-либо площадку (Φ). Определения этих величин такие же, как для упругой волны (см. стр. 50). Аналогом вектора Умова является вектор Пойнтинга^{*)} (\vec{S}):

$$S(t) = W_0(t) \cdot v = \frac{EB}{\mu\mu_0}, \quad (2.65)$$

$$I = \langle S(t) \rangle = \langle W_0(t) \rangle \cdot v = \frac{E_0 B_0}{2\mu\mu_0}, \quad (2.66)$$

$$\vec{S}(t) = W_0(t) \cdot \vec{v} = \frac{[\vec{E}, \vec{B}]}{\mu\mu_0}, \quad (2.67)$$

$$\langle \vec{S}(t) \rangle = \langle W_0(t) \rangle \cdot \vec{v} = \frac{[\vec{E}_0, \vec{B}_0]}{2\mu\mu_0}, \quad (2.68)$$

$$\Phi = \int_{\Sigma} \vec{S} d\vec{s} = \int_{\Sigma} S_n ds, \quad (2.69)$$

$$\langle \Phi \rangle = \int_{\Sigma} \langle \vec{S}(t) \rangle d\vec{s} = \int_{\Sigma} \langle S_n(t) \rangle ds. \quad (2.70)$$

^{*)} Введен английским физиком Дж.Г. Пойнтингом в 1885 г.

ГЛАВА III. ИНТЕРФЕРЕНЦИЯ ВОЛН

§1. Наложение волн

Пусть в данную точку пространства приходят две волны (упругие или электромагнитные). Пока будем рассматривать случай, когда обе волны вызывают в этой точке колебания, направленные по одной оси (смещения частиц в упругих волнах, или колебания вектора напряжённости \vec{E} в электромагнитных волнах).

Будем предполагать, что выполняется принцип суперпозиции (принцип наложения волн), т.е. допустим, что результирующий эффект от наложения двух волн есть просто сумма эффектов, вызываемых каждой волной (иначе говоря, предположим, что отсутствует влияние волн друг на друга). В этом случае, предполагая для простоты, что в рассматриваемую точку приходят две монохроматические гармонические волны с частотами ω_1 и ω_2 , результирующее колебание можно найти сложением двух колебаний:

$$\xi = \xi_1 + \xi_2, \quad (3.1)$$

$$\text{где } \xi_1(t) = A_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_{01}); \quad \xi_2(t) = A_2 \cos(\omega_2 t + \varphi_{02}), \quad (3.2)$$

Здесь A_1, A_2 и $\varphi_{01}, \varphi_{02}$ – амплитуды и начальные фазы соответствующих колебаний.

Сложение колебаний удобно провести методом векторных диаграмм (см. стр.29). Сопоставим гармоническим колебаниям (3.2)

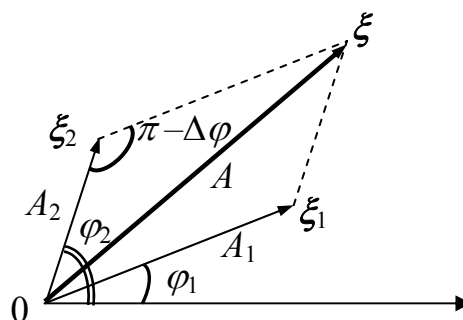


Рис.3.1

два вектора, вращающиеся против часовой стрелки с угловыми скоростями ω_1 и ω_2 – см. рис.3.1. На рисунке приведена “мгновенная фотография” векторов в произвольный момент времени t . Углы φ_1, φ_2 равны фазам колебаний в этот момент:

$$\varphi_1 = \omega_1 t + \varphi_{01}, \quad \varphi_2(t) = \omega_2 t + \varphi_{02}. \quad (3.2)$$

Обозначая $\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$ и используя теорему косинусов, получаем выражение для квадрата амплитуды результирующего колебания:

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1 A_2 \cos \Delta\varphi. \quad (3.2)$$

Нас в первую очередь интересует интенсивность волны в рассматриваемой точке пространства, которая, как было показано ранее (см. (2.27), (2.66)), пропорциональна средней по времени величине квадрата амплитуды колебаний

$$\langle A^2 \rangle = \frac{1}{\tau} \int_0^{\tau} A^2 dt = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1 A_2 \langle \cos \Delta\varphi \rangle. \quad (3.5)$$

Отсюда следует, что интенсивность результирующего колебания равна

$$I = I_1 + I_2 + \Delta I, \quad (3.6)$$

где третье слагаемое называется “интерференционным”.

$$\Delta I = 2\sqrt{I_1 I_2} \cdot \langle \cos \Delta\varphi \rangle. \quad (3.7)$$

Пусть в точке, которую мы рассматриваем, находится какой-либо аппарат, регистрирующий воздействие пришедших волн (для световых волн – фотоплёнка, глаз; для звуковых – микрофон, ухо). Необходимо учитывать, что любой аппарат осуществляет измерение интенсивности колебаний в течение некоторого конечного интервала времени τ . Если за это время разность фаз $\Delta\varphi$ будет *беспорядочно* изменяться, то средняя величина

интерференционного слагаемого (3.7), окажется равной нулю. В этом случае при сложении колебаний от двух источников результирующая интенсивность оказывается равной просто сумме интенсивностей этих колебаний:

$$I = I_1 + I_2. \quad (3.8)$$

Если же за время измерений изменение разности фаз будет меньше π , интенсивность волны в данной точке пространства может оказаться как больше, так и меньше суммы I_1 и I_2 (в зависимости от знака интерференционной добавки). При этом, очевидно, происходит перераспределение энергии волн в пространстве (в некоторых областях будут максимумы интенсивности, в других – минимумы). Складывающиеся друг с другом волны называются в этом случае *когерентными*, а наблюдаемое явление – «интерференцией волн». Таким образом, *интерференция – это сложение когерентных волн, сопровождающееся перераспределением энергии волн в пространстве.*

§ 2. Интерференция волн от двух точечных источников

Рассмотрим интерференцию волн в простейшем случае – будем предполагать, что гармонические волны испускают два точечных источника, характеризующиеся одинаковыми величинами частоты, начальной фазы и амплитуды. Поскольку в этом случае в любой точке пространства разность фаз колебаний, возбуждаемых этими волнами, будет сохраняться постоянной, колебания будут когерентными и, следовательно, будет наблюдаться интерференция волн.

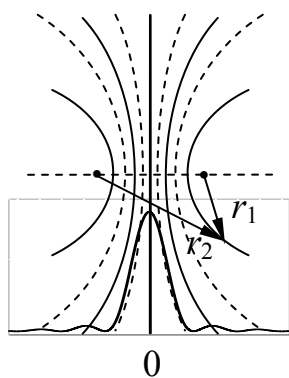


Рис.3.2

Определим вид интерференционной картины в пространстве – см. рис.3.2. Если волны распространяются в однородной среде, то величина $\Delta\varphi$ в любой точке пространства полностью определяется разностью путей r_2 и r_1 , пройденных волнами от двух источников до данной точки. Совершенно ясно, что геометрическое место точек на плоскости, для которых одинакова разность фаз колебаний, приходящих от двух источников – гипербола. Таким образом, максимумы интенсивности на рис.3.2 будут располагаться на гиперболах, в фокусах которых находятся источники. Между максимумами будут находиться минимумы интенсивности – также гиперболические кривые (показаны на рисунке пунктирными линиями). Положения максимумов и минимумов интерференционной картины в пространстве легко получить вращением рис.3.2 относительно оси, проходящей через источники – это семейство гиперболоидов вращения. На плоском экране, показанном на рис.3.2 внизу, будет наблюдаться интерференционная картина, представляющая собой последовательность светлых и темных гипербол – кривых, по которым гиперболоиды вращения пересекаются с экраном.

Рассмотрим подробнее результат сложения когерентных волн от двух точечных источников на примере классического опыта Юнга, впервые наблюдавшего интерференцию света в начале XIX века.

В опыте Юнга между точечным монохроматическим источником света S и экраном \mathcal{E} , на котором наблюдается интерференция, располагается преграда с двумя маленькими

отверстиями (или узкими щелями), которые играют роль двух вторичных когерентных источников S_1 и S_2 (см. рис. 3.3).

Чтобы получить структуру интерференционной картины (т.е. зависимость освещенности экрана от координаты x) вблизи центра экрана – точки 0 на рис.3.3, рассмотрим результат сложения волн от вторичных источников S_1 и S_2 : $E_1 = E_{01} \cdot \cos(\omega t - kr_1)$ и $E_2 =$

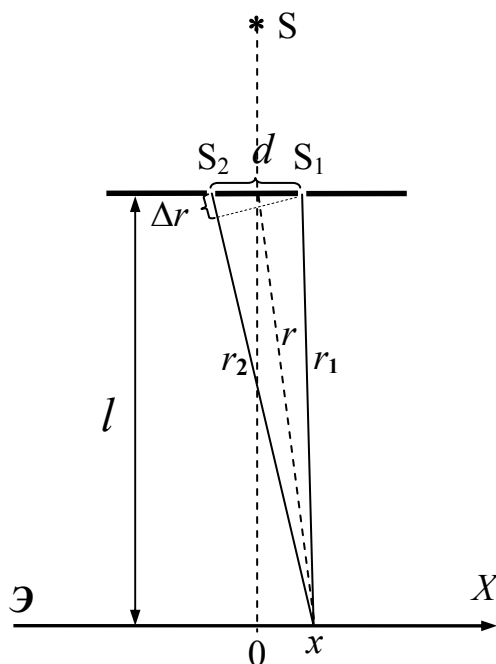


Рис. 3.3

$= E_{02} \cdot \cos(\omega t - kr_2)$. Так как расстояния

от источников до центральной части экрана практически одинаковы, будем считать амплитуды этих волн одинаковыми: $E_{01} = E_{02} = E_0$; $I_1 = I_2 = I_0$. Тогда соотношение (3.6) упрощается:

$$I = 2I_0 + 2I_0 \cos \Delta \varphi, \quad (3.9)$$

В максимумах интерференционной картины $\Delta \varphi = \pm 2\pi m$ и интенсивность $I = 4I_0$; в минимумах $\Delta \varphi = \pm (2m + 1)\pi$, $I = 0$; ($m = 0, 1, 2, \dots$ – любое целое положительное число).

Если оба источника и экран находятся в однородной среде, то разности фаз, кратной 2π , соответствует разность хода волн от двух источников

$$\Delta r = r_2 - r_1 = \pm m \lambda, \quad (3.10)$$

где λ – длина волны в данной среде.

В тех точках экрана, где выполняется условие (3.10), будут наблюдаться максимумы интерференционной картины.

Соответственно, условие минимумов для однородной среды таково:

$$\Delta r = r_2 - r_1 = \pm(m + 1/2)\lambda, \quad (3.11)$$

Целое число $m = 0, 1, 2, \dots$ в соотношениях (3.9)–(3.11), позволяющее выразить разность хода двух волн через длину волны, называется **порядком интерференции**.

В том случае, когда два источника расположены близко друг от друга, но далеко от экрана, для центральной области экрана выполняются неравенства $l \approx r \approx r_1 \approx r_2 \gg d, x; \Delta r \ll d$ (см. рис.3.3). При этом из подобия двух треугольников имеем $\frac{\Delta r}{d} = \frac{x}{r} \cong \frac{x}{l}$ и, следовательно, максимумы и минимумы интерференционной картины вблизи центра экрана будут расположены по оси X в точках

$$\text{максимумы: } x_{\max} \cong \pm m\lambda \frac{l}{d}; \quad m = 0, 1, 2, \dots \quad (3.12)$$

$$\text{минимумы: } x_{\min} \cong \pm (m + 1/2)\lambda \frac{l}{d}; \quad m = 0, 1, 2, \dots \quad (3.13)$$

Соотношения (3.12) и (3.13) замечательны тем, что позволяют, пользуясь результатами простого эксперимента, точно измерить длину световой волны (что и было сделано Юнгом).

Подчеркнём, что условия (3.10)–(3.11) в однородной среде справедливы всегда, для когерентных волн любого типа (как электромагнитных, так и упругих); условия же (3.12)–(3.13) выполняются только вблизи центра экрана, удаленного от двух источников.

Иногда приходится рассматривать ситуации, в которых волны от двух источников распространяются в разных средах. Если частоты, на которых излучают источники 1 и 2, одинаковы, то в разных средах будут отличаться скорости распространения и длины волн, а значит, и волновые числа k .

Полагая, что волна от первого источника распространяется в среде 1, а от второго – в среде 2 (длины волн λ_1 и λ_2 , соответственно) и, считая начальные фазы излучения для обоих источников одинаковыми, получим:

$$\Delta\varphi = k_2r_2 - k_1r_1 = 2\pi(r_2/\lambda_2 - r_1/\lambda_1), \quad (3.14)$$

Из (3.14) следует, что при распространении волн в различных средах нужно сравнивать не геометрические пути, пройденные каждой волной от источника до рассматриваемой точки, а расстояния, измеренные в количестве длин волн.

В оптике соотношение (3.14) принято использовать в несколько иной форме, вводя показатели преломления

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda_0}(n_2r_2 - n_1r_1) = \frac{2\pi\Delta_0}{\lambda_0}, \quad (3.15)$$

где λ_0 – длина волны в вакууме. Величина, заключённая в скобки, называется *оптической разностью хода* двух лучей:

$$\Delta_0 = n_2r_2 - n_1r_1. \quad (3.16)$$

Произведение n_1r_1 называют оптическим путем луча 1, соответственно, n_2r_2 – оптический путь луча 2. Эти выражения легко обобщаются на случай, когда каждый луч проходит через несколько разных сред:

$$\Delta_0 = \sum_i n_{2i}r_{2i} - \sum_j n_{1j}r_{1j}. \quad (3.17)$$

Суммирование здесь проводится по всем средам, по которым распространяются лучи 1 и 2.

Очевидно, что условие максимумов интерференционной картины двух световых волн

$$\Delta_0 = \pm m\lambda_0, \quad m = 0, 1, 2, \dots \quad (3.18)$$

Соответственно, минимумы должны наблюдаться в тех точках пространства, где

$$\Delta_0 = \pm (m + 1/2)\lambda_0, \quad m = 0, 1, 2, \dots \quad (3.19)$$

§ 3. Условия наблюдения интерференции

В предыдущем параграфе, рассматривая интерференцию монохроматических гармонических волн от двух точечных источников, мы преднамеренно идеализировали реальную картину интерференции. Действительно, в природе и технике нет источников, испускающих строго гармонические волны одной частоты; также как нет источников волн бесконечно малых размеров (“точечных” источников).

Поэтому необходимо выяснить, при каких условиях в реальных ситуациях возможно наблюдение интерференции волн.

1. Сначала обсудим, в какой степени осложняет наблюдение интерференции *немонохроматичность волн*. Начнем анализ с простейшего случая, когда в спектральный состав источника входит всего два значения частоты ω_1 и ω_2 , мало отличающиеся друг от друга. Предположим, что в какой-то точке пространства A в момент времени $t = 0$ две волны с частотами ω_1 и ω_2 , интерферируя, дают усиление колебаний – см. рис.3.4.

На рисунке колебания, возбуждаемые этими волнами в точке A , показаны отдельно, хотя мы будем считать, что волны

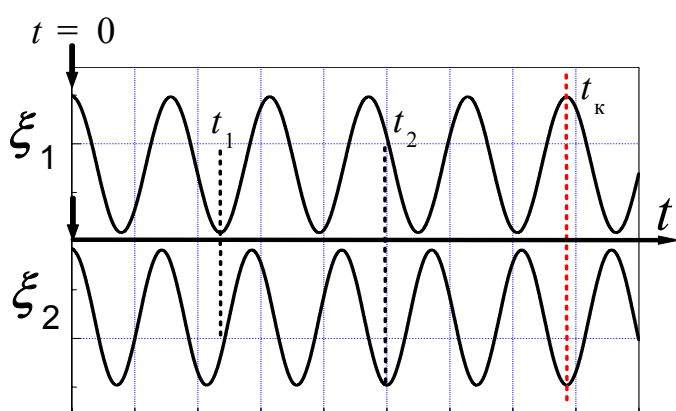


Рис. 3.4

распространяются по одной прямой. Если время измерений равно t_1 (см. рис.3.4), то разность фаз между колебаниями ξ_1 и ξ_2 изменится незначительно, эти колебания по-прежнему усиливают

друг друга. Если время, необходимое для измерения интенсивности больше – t_2 , то усреднение результатов сложения колебаний все ещё будет отличаться от случая сложения интенсивностей (отсутствие интерференции) и колебания всё ещё можно считать когерентными. Когерентность колебаний ξ_1 и ξ_2 полностью нарушится через время $t = \tau_k$, когда эти колебания будут уже не усиливать, а ослаблять друг друга ($\Delta\varphi = \pi$) – см. рис.3.4. Время, за которое это произойдет, называется **временем когерентности** τ_k . Из вышесказанного следует, что в случае интерференции двух монохроматических волн с отличающимися частотами время когерентности равно $\tau_k = \frac{\pi}{\omega_2 - \omega_1}$.

Перейдём к более реалистичной модели источника света. Обычно приходится иметь дело с источниками, частоты излучения которых распределены в некотором интервале от ω_1 до $\omega_2 = \omega_1 + \Delta\omega$ (“сплошной спектр”). Мы будем полагать для простоты, что интенсивности волн для всех частот в этом интервале одинаковы – см. рис.3.5,*а*.

Если в начальный момент времени $t = 0$ фазы всех колебаний совпадают (как это проиллюстрировано для двух волн на рис. 3.4), то в этот момент все волны усиливают друг друга. Эффект усиления исчезнет через некоторое время, когда наложение волн

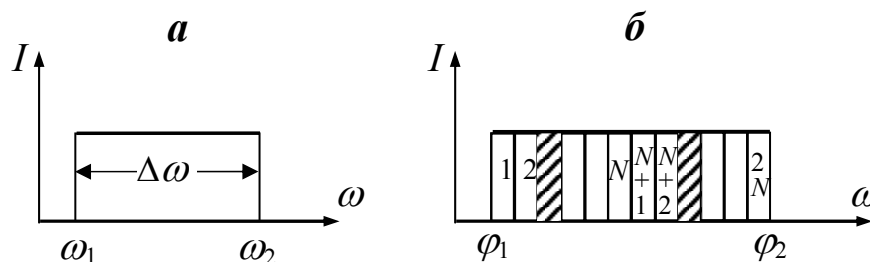


Рис. 3.5

будет приводить к их взаимному ослаблению. Покажем, что в рассматриваемом случае это произойдет в момент времени $t = \tau_k$, когда между “крайними” волнами (в спектральном смысле – с частотами ω_1 и $\omega_2 = \omega_1 + \Delta\omega$) накопится разность фаз, равная 2π . В этот момент фаза “первой” волны равна $\varphi_1 = \omega_1 t$, а фаза “последней” $\varphi_2 = \omega_2 t = \varphi_1 + 2\pi$. Фазы всех остальных волн будут равномерно распределены в интервале от φ_1 до φ_2 – см. рис.3.5,б. Разобьём этот интервал на $2N$ одинаковых малых участков. Любым двум участкам с номерами $n \leq N$ (на левой половине рис.3.5,б) и $n + N$ (на правой половине этого рисунка) соответствуют волны, отличающиеся по фазе на π , следовательно, эти волны взаимно уничтожатся. Тогда, в момент времени $t = \tau_k$ вместо усиления волн будет наблюдаться их полное взаимное подавление.

Итак, для источников, излучение которых происходит в полосе частот $\Delta\omega$, *время когерентности* равно

$$\tau_k = \frac{2\pi}{\Delta\omega} \quad (3.20)$$

Число колебаний, которое произойдёт за время когерентности, мы будем называть *числом когерентных колебаний*:

$$N_k = \frac{\tau_k}{T} = \frac{2\pi}{T \Delta\omega} = \frac{\omega}{\Delta\omega} = \frac{\lambda}{\Delta\lambda}. \quad (3.21)$$

Отметим, что число когерентных колебаний равно максимальному порядку интерференции, который можно наблюдать при такой некогерентности источника.

Длиной когерентности называется расстояние, на которое распространяется волна за время когерентности:

$$l_k = v\tau_k = \frac{\lambda\tau_k}{T} = \lambda N_k \cong \frac{\lambda^2}{\Delta\lambda}. \quad (3.22)$$

Колебания в пределах любого цуга волн длиной l_k остаются когерентными.

Очевидно, что чем более немонохроматическим является источник волн, тем меньше для этого источника длина когерентности, число когерентных колебаний и время когерентности.

С учетом (3.22) соотношение (3.20) может быть записано в несколько иной форме

$$\tau_k = \frac{l_k}{v} \cong \frac{\lambda^2}{v\Delta\lambda}. \quad (3.23)$$

Для солнечного света $\lambda = 400\text{--}760$ нм, число когерентных колебаний $N_k = \frac{\lambda}{\Delta\lambda} \cong 1\text{--}2$, а длина когерентности порядка 1-2 длин волн λ . Поэтому ясно, что если в схеме опыта Юнга, показанной на рис.3.3, спектральный состав излучения “первичного” точечного источника S такой же, как Солнца, то будет наблюдаться интерференционная картина, состоящая из центрального (нулевого, $m = 0$) максимума и двух (–четырёх) ближайших к нему максимумов первого (и возможно второго) порядка ($m = 1, 2$). При разности хода между волнами 1 и 2 (см. рис.3.3), превышающей две длины волны, когерентность между ними будет потеряна (максимальный порядок интерференции – максимально возможное число m в соотношении (3.18) – равно числу когерентных колебаний N_k).

Используя светофильтры (т.е. уменьшая $\Delta\lambda$), можно существенно улучшить условия наблюдения интерференции. Источником наиболее монохроматического излучения (помимо

лазеров) являются отдельные возбуждённые атомы, спектр излучения которых состоит из узких линий («линейчатый» спектр). Однако и в этом случае испускаемая волна не является строго гармонической, т.к. возбуждённый изолированный атом излучает в течение интервала времени $\tau_k \approx 10^{-8} \text{ с}$, и за это время испускается «цуг» гармонических волн длиной $l = \nu \tau_k$ (в вакууме или в воздухе $l \approx 3 \text{ м}$). Длина такого цуга волн по существу является длиной когерентности для излучения отдельного атома. Начальная фаза следующего акта испускания волн никак не связана с фазой предыдущего, поэтому колебания в двух последовательных цугах некогерентны. В лазерах за счет согласованного излучения многих атомов активного вещества достигаются длины когерентности, на несколько порядков большие, чем для излучения отдельного атома.

2. Рассмотрим теперь, как условия наблюдения интерференции зависят от размеров источника. Сначала предположим, что мы имеем точечный и монохроматический источник излучения S . Волновые поверхности для такого источника имеют вид сфер (на рис.3.6 пунктиром показана одна из них). По определению, любые две точки, расположенные на одной волновой поверхности, должны совершать колебания в одной и той же фазе. Как нам в этом удостовериться? Используем для этого уже известную нам схему Юнга. Поставим непрозрачную преграду с двумя маленькими отверстиями на пути волны, распространяющейся от источника S . На некотором расстоянии за преградой поместим экран, на котором будем наблюдать интерференционную картину. Если волны, распространяющиеся от двух отверстий в преграде, когерентны, то интерференционная картина должна уверенно регистрироваться

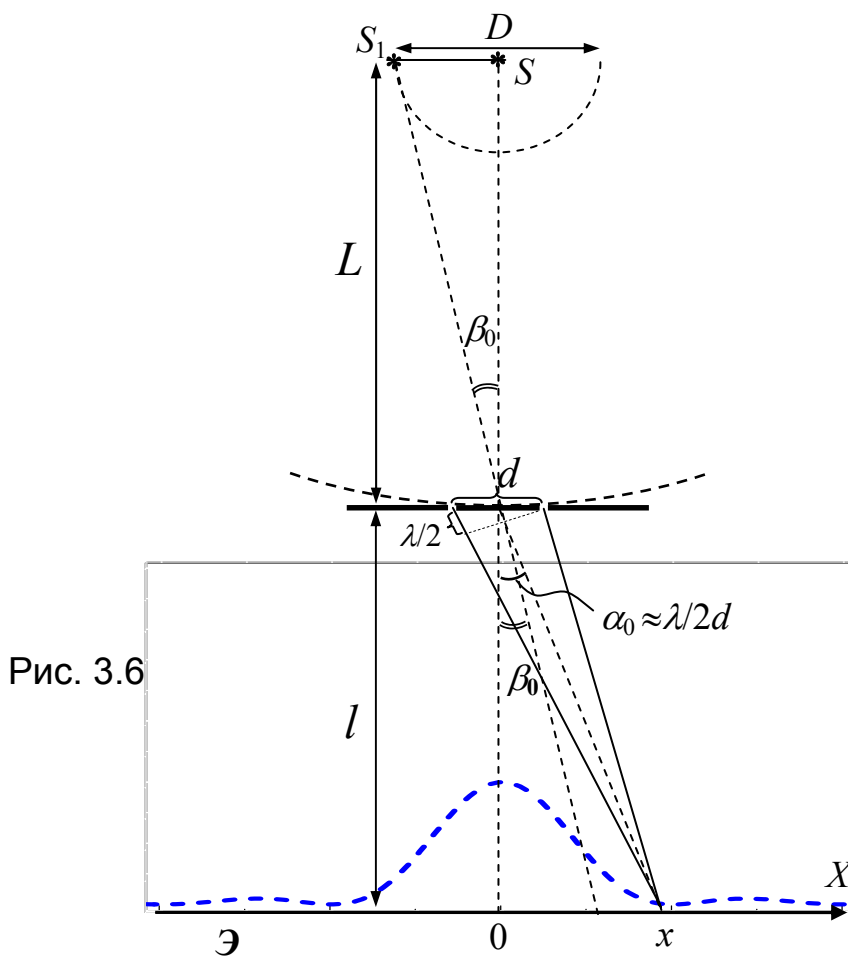


Рис. 3.6

(результат такого эксперимента мы уже обсудили в предыдущем параграфе).

Внесём в нашу задачу осложнение – будем предполагать, что источник продолжает оставаться монохроматическим, но теперь имеет конечные размеры D (на рис.3.6 показана “крайняя” точка источника – S_1). Очевидно, что интерференционная картина от точки S_1 на экране будет смещена относительно интерференционной картины от точки S на угол $\beta_0 = D/2L$, где L – расстояние от источника до преграды (т.е. до интересующей нас волновой поверхности). Если $\beta_0 > \alpha_0$, где α_0 – угловое положение первого минимума интерференционной картины от точки S , соответствующего $m = 0$ в соотношении (3.13), то полная интер-

ференционная картина от всего протяжённого источника окажется настолько “смазанной”, что наблюдать перераспределение энергии в пространстве не удастся. А это и означает, что выбранные нами две точки на сферической поверхности (два отверстия в преграде) испускают некогерентные волны.

Итак, интерференцию волн от протяженного источника можно наблюдать только при выполнении неравенства $\alpha_0 > \beta_0$. Учитывая, что согласно (3.13) $\alpha_0 = \frac{x_{\min}^{(0)}}{l} = \frac{\lambda}{2d}$, приходим к такому условию наблюдения интерференции

$$\frac{D}{L} < \frac{\lambda}{d}. \quad (3.24)$$

Это неравенство можно переписать несколько иначе:

$$D < r_k = \varphi_k \cdot L. \quad (3.25)$$

В соотношении (3.25) введены т.н. «радиус когерентности» r_k и «угол когерентности» φ_k :

$$r_k = \frac{\lambda}{\beta} = \frac{\lambda L}{D}, \quad \varphi_k = \frac{r_k}{L} = \frac{\lambda}{D}. \quad (3.26)$$

Здесь $\beta = 2\beta_0 = D/L$ – угловой размер источника волн.

По физическому смыслу радиус когерентности – это размер области на сферической поверхности, окружающей источник, в пределах которой колебания можно считать когерентными. Размеры этих областей обратно пропорциональны размерам источника

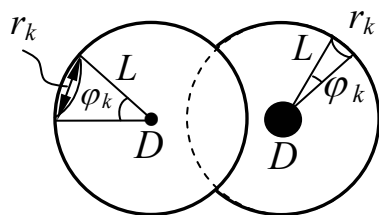


Рис. 3.7

– см. рис.3.7. Угол когерентности – это телесный угол, в который протяжённый источник испускает когерентные волны. Чем больше размеры источника, тем этот угол меньше. Из (3.26) очевидно,

что источник волн может считаться точечным, если его размеры меньше или, во всяком случае, порядка длины волны.

Для солнечного света радиус когерентности легко подсчитать, если учесть, что угловой размер Солнца $\beta \approx 0,01$ рад:

$r_k = \frac{\lambda}{\beta} \approx 5 \cdot 10^{-3}$ см. Поэтому, чтобы наблюдать интерференционную

картину в опыте, показанном на рис.3.6, расстояние между отверстиями в преграде должно быть меньше $5 \cdot 10^{-3}$ см, что трудно экспериментально осуществить. Лишь в начале XIX в. Томас Юнг впервые наблюдал интерференцию с использованием солнечного света от двух точечных источников (отверстий в непрозрачном экране). Существенно, что интерференцию можно было наблюдать только в том случае, когда между экраном с двумя отверстиями и Солнцем располагалась еще одна преграда с небольшим отверстием – см. рис.3.8. Назначение этой дополнительной преграды понятно – с её помощью удастся уменьшить угловые размеры “первичного” источника и, следовательно, увеличить радиус когерентности.

Введем еще одну характеристику, определяющую степень когерентности

$$V_k = l_k \cdot r_k^2. \quad (3.27)$$

Объем когерентности определяет объем той области пространства, в которой испускаемые источником волны когерентны.

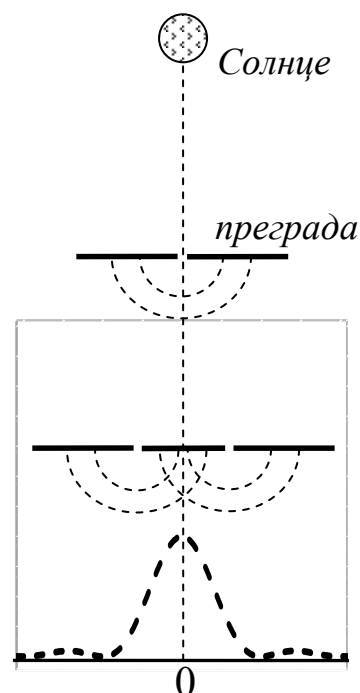


Рис. 3.8

§ 4. Стоячие волны

Возникновение стоячих волн – простейший случай интерференции. Пусть по оси X распространяется плоская гармоническая волна, частота которой ω , а волновое число k :

$$\xi_1(x,t) = A_0 \cdot \cos(\omega t - kx), \quad (3.28)$$

На пути этой волны расположена непоглощающая, идеально отражающая преграда (координата преграды $x = 0$). Уравнение отражённой от преграды плоской волны аналогично (3.28), только знак перед x необходимо изменить – направление распространения отраженной волны противоположное; кроме того, нужно учесть возможное изменение фазы при отражении:

$$\xi_2(x,t) = A_0 \cdot \cos(\omega t + kx + \varphi_0), \quad (3.29)$$

В результате сложения прямой и отраженной волн (эти волны когерентны) возникает так называемая «стоячая волна»

$$\xi = \xi_1 + \xi_2 = A \cos\left(\omega t - \frac{\varphi_0}{2}\right). \quad (3.30)$$

В соотношении (3.30) амплитуда колебаний

$$A = \left| 2A_0 \cos\left(kx + \frac{\varphi_0}{2}\right) \right|, \quad (3.31)$$

оказывается зависящей от координаты x : в точках, называемых «пучностями», где $\cos\left(kx + \frac{\varphi_0}{2}\right) = \pm 1$, амплитуда максимальна ($A = 2A_0$); в «узлах» $\cos\left(kx + \frac{\varphi_0}{2}\right) = 0$ и амплитуда колебаний равна нулю.

$$A = 2A_0 \text{ (пучности)}, \quad kx + \frac{\varphi_0}{2} = m\pi, \quad m = 0, 1, 2, \dots \quad (3.32)$$

$$A = 0 \text{ (узлы)}, \quad kx + \frac{\varphi_0}{2} = \left(m + \frac{1}{2}\right)\pi, \quad m = 0, 1, 2, \dots \quad (3.33)$$

На границе раздела двух сред ($x = 0$) число m принимает минимальное значение ($m = 0$), по мере удаления от неё m растёт. Найдём изменение фазы волны при отражении, пока не конкретизируя вид волн (упругие или электромагнитные).

а) Пусть на границе раздела наблюдается пучность – см. рис.3.9,а. Подставляя $x = 0$ и $m = 0$ в (3.32), получим

$$\varphi_0 = 0. \quad (3.34)$$

В этом случае отражение волн происходит без изменения фазы.

б) Если на границе раздела двух сред $A = 0$ (узел), то с учетом $x = 0$ и $m = 0$ из (3.33) получаем:

$$\varphi_0 = \pi. \quad (3.35)$$

Итак, если на границе образуется узел (рис. 3.9,б), то при отражении фаза волны изменяется на π (в этом случае принято говорить, что при отражении теряется полволны).

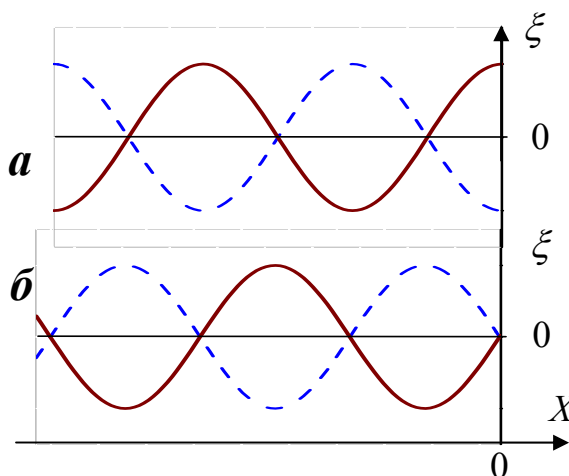


Рис. 3.9

Для упругих волн узел на границе раздела двух сред возникает, если отражение происходит от более плотной среды (пример – веревка, привязанная к стене; при образовании на ней стоячей волны у стены всегда наблюдается узел). В более плотной среде смещения колеблющихся частиц меньше, чем в менее плотной.

Для электромагнитных волн необходимо учесть их специфику – векторы \vec{E} , \vec{B} и \vec{V} жёстко связаны между собой (векторное

Глава III. Интерференция волн

произведение $[\vec{E}, \vec{B}]$ всегда направлено по направлению распространения волны). Поэтому при отражении электромагнитной

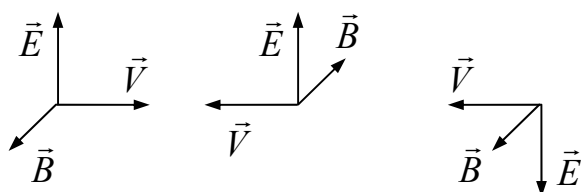


Рис.3.10

волны только один из векторов (\vec{E} , или \vec{B}) должен изменить направление – см. рис.3.10. Соответственно, если для одной составляющей электромаг-

нитной волны (например, \vec{E}) на границе будет узел, то для другой (в данном случае \vec{B}) – пучность (см. рис.3.10). Если, наоборот, на

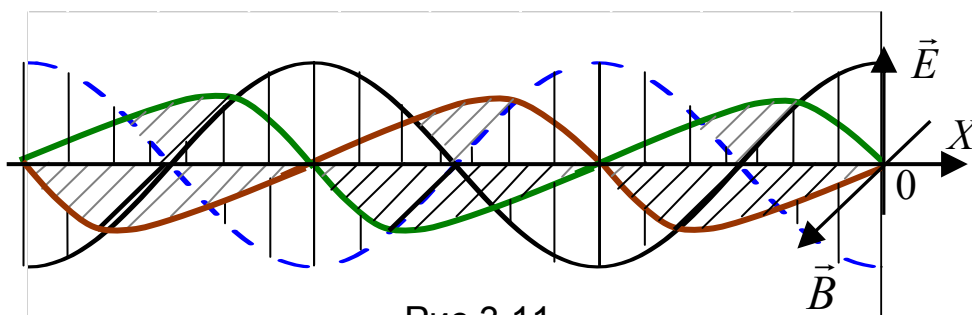


Рис.3.11

границе разделе двух сред наблюдается узел \vec{B} , то обязательно там же должна быть пучность \vec{E} – рис.3.11.

В дальнейшем нас в основном будет интересовать поведение *электрического* поля в электромагнитной волне, поскольку именно с электрическим полем связано воздействие электромагнитных волн на атомы и молекулы окружающей среды (регистрация электромагнитных волн также базируется на электрополевых эффектах). Параметром среды, определяющим действие на неё электрического поля, является диэлектрическая проницаемость ϵ . Аналогом более плотной среды в случае

электромагнитных волн следует считать среду с большой величиной диэлектрической проницаемости, так как в такой среде напряжённость электрического поля меньше (сравните смещения частиц для упругой волны). В применении к световым волнам среду с большими значениями ε и n называют *оптически более плотной*.

Итак, если электромагнитная волна распространяется в среде 1 и отражается от среды 2, то на границе раздела происходит потеря половины волны в том случае, когда справедливы неравенства:

$$\varepsilon_2 > \varepsilon_1, \quad v_2 < v_1, \quad \lambda_2 < \lambda_1. \quad (3.36)$$

В этой ситуации на границе раздела двух сред наблюдается узел для электрического поля и пучность – для магнитного – см. рис. 3.12. Обратим внимание, что в стоячей электромагнитной волне области максимумов энергии электрического и магнитного полей пространственно разнесены (в отличие от бегущей волны). Заметим, что такое же соответствие наблюдается и в случае упругих волн: для бегущей волны максимумы потенциальной и кинетической энергии совпадают; в стоячей упругой волне максимумы кинетической энергии приходятся на пучности, а потенциальной – на узлы.

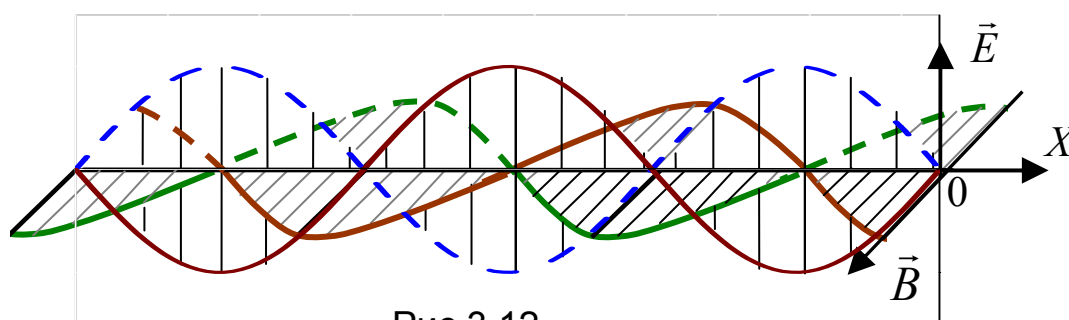


Рис.3.12

§ 5. Интерференция волн, отраженных от двух поверхностей

Пусть три различные среды разделены плоскими, параллельными границами раздела – см. рис.3.13. В первой среде распространяется плоская волна

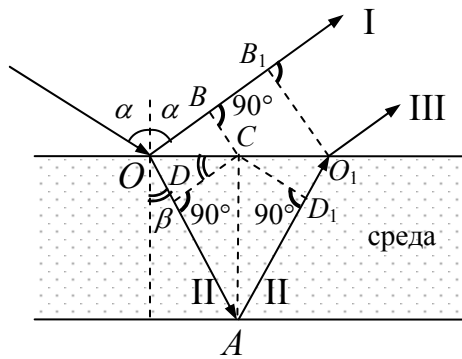


Рис. 3.13

(длина волны λ_1), падающая на границу раздела сред 1 и 2 под углом α . Луч I, соответствующий волне, отражённой от этой границы, также составляет угол α с нормалью к граничной плоскости. Пройдя во вторую среду волна II (длина волны во второй среде λ_2) частично отразится от “нижней” границы раздела и снова выйдет в первую среду (луч III). Таким образом, между колебаниями в точках O_1 и B_1 возникает разность фаз, поскольку лучи I и III попадают в эти точки по разным оптическим путям – OB_1 и OAO_1 соответственно. В дальнейшем это фазовое соотношение не меняется. Установим, какова эта разность фаз.

Выполним следующие построения: проведём перпендикуляр AC к обеим границам и из точки C опустим перпендикуляры к лучам I и II (CB и CD , соответственно). Из проведённого построения очевидно, что $\angle OCB = \alpha$ (углу падения), $\angle OCD = \beta$ (углу преломления).

Используя закон преломления света и связь показателя преломления с длиной волны $\left(n_{21} = \frac{\lambda_1}{\lambda_2} \right)$, можем записать:

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{\lambda_1}{\lambda_2}, \quad \frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{OB}{OC} : \frac{OD}{OC} = \frac{OB}{OD}. \quad (3.37)$$

Отсюда следует, что, если измерять пути в количестве длин волн (λ_1 и λ_2 для соответствующей среды), то такие “волновые пути” на отрезках OB (для луча I) и OD (для луча II) оказываются равными. Ясно также, что то же самое можно утверждать относительно “волновых путей” на отрезках BB_1 и D_1O_1 (т.к. $BB_1 = OB$ и $D_1O_1 = OD$). Таким образом, разность искомым волновых путей лучей I и III обусловлена тем, что луч II-III проходит дополнительный (по сравнению с лучом I) путь DAD_1 . Величину этого дополнительного пути во второй среде мы обозначим Δ , а толщину слоя среды 2 – h . Тогда

$$\Delta = 2h \cos \beta. \quad (3.38)$$

Если величина Δ меньше длины когерентности l_k , то при наложении лучей I и III возникнет интерференционная картина. Поскольку лучи I и III параллельны, говорят, что интерференционная картина “локализована в бесконечности”. Практически при наблюдении интерференции световых волн, отраженных от двух поверхностей тонкой плёнки, лучи I и III собирают с помощью линзы в её фокальной плоскости (роль линзы может играть хрусталик глаза).

Запишем условия максимумов и минимумов интенсивности интерференционной картины в двух случаях:

1. Отражение на каждой границе происходит от более плотной среды. При отражении луча I “теряется” $\lambda/2$ и при отражении луча III – тоже. Поэтому дополнительной разности фаз между лучами I и III из-за отражения не возникает.

$$\text{Максимумы } 2h \cos \beta = m \lambda_2.$$

$$\text{Минимумы: } 2h \cos\beta = (m + \frac{1}{2})\lambda_2, \quad m = 1, 2, 3, \dots \quad (3.39)$$

2. Среда 3 идентична среде 1, причём более плотной является среда 2. При отражении луча I “теряется”, как и ранее $\lambda/2$; но при отражении луча II изменения фазы нет (отражение от менее плотной среды). Эту дополнительную разность фаз между лучами I и III необходимо учесть при записи условий максимумов и минимумов:

$$\text{Максимумы} \quad 2h \cos\beta = (m + \frac{1}{2})\lambda_2.$$

$$\text{Минимумы:} \quad 2h \cos\beta = m \lambda_2, \quad m = 1, 2, 3, \dots \quad (3.40)$$

В частности, при наблюдении интерференции света, отражённого от тонкой плёнки с показателем преломления $n_2 > 1$ (плёнка находится в воздухе, $n_1 = n_3 = 1$), условия максимумов и минимумов интерференционной картины таковы:

$$\text{Максимумы:} \quad 2h n_2 \cos\beta = (m + \frac{1}{2})\lambda;$$

$$\text{Минимумы:} \quad 2h n_2 \cos\beta = m \lambda, \quad m = 1, 2, 3, \dots \quad (3.40,a)$$

(Здесь λ – длина световой волны в вакууме).

Явления, связанные с интерференцией волн, отражённых от двух поверхностей, особенно важны в оптике. Поскольку обычно эти явления наблюдаются в естественном (солнечном) свете, видеть их можно только в тех случаях, когда толщина плёнки (среды 2 на рис.3.13) порядка длины световой волны. Это объясняется тем, что длина когерентности солнечного света также имеет порядок λ , поэтому для более толстых плёнок теряется когерентность между лучами I и III. Естественно, что с повышением монохроматичности источника света условия наблюдения интерференции становятся всё более мягкими (увеличивается длина когерентности) и перечисленные ниже эффекты можно регистрировать, используя более толстые плёнки.

I. Цвета тонких плёнок. При наблюдении тонких плёнок в отражённом белом свете они окрашиваются в те цвета, для которых выполняются условия максимумов интерференционной картины. (3.39)–(3.40). В проходящем свете эти плёнки будут окрашены в “дополнительные” цвета.

II. Полосы равной толщины. Если тонкая плёнка неоднородна по толщине и освещается параллельным пучком монохроматического света, то области разной толщины будут иметь различную интенсивность окраски (т.к. для некоторых толщин будут выполняться условия максимумов, а для других – минимумов). При освещении такой плёнки белым светом участки плёнки, имеющие одинаковые толщины, будут одинаково окрашены. В частности, если плёнка представляет собой клин с малым углом (рис.3.14), то полосы равной толщины будут

расстояниях друг от друга. Легко доказать, что интерференционная картина в этом случае локализована в плоскости, проходящей через ребро клина (в этой плоскости пересекаются все лучи, отраженные от двух поверхностей клина).

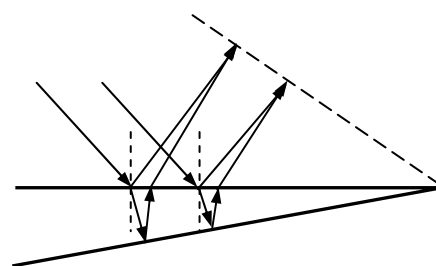


Рис. 3.14

Другой частный случай полос равной толщины – кольца, наблюдаемые, при отражении или прохождении света через систему, состоящую из плоской пластины и лежащей на ней линзы с большим радиусом («кольца Ньютона»). Кольца Ньютона представляют собой семейство концентрических тёмных и светлых окружностей, сгущающихся к периферии интерференционной картины.

III. Полосы равного наклона. Такие полосы наблюдаются, когда на тонкую плоскопараллельную плёнку падает конический пучок света. Интерференционная картина в этом случае состоит из системы концентрических тёмных и светлых колец, поскольку положения максимумов и минимумов целиком определяются углом, под которым лучи света падают на плёнку. Для всех лучей с одинаковыми углами падения (независимо от того, в какой плоскости они лежат), условия интерференции абсолютно одинаковы.

Ясно, что при освещении плёнки монохроматическим пучком наблюдаются интерференционные кольца одного цвета, но разной интенсивности; если используется конический пучок белого света, то кольца будут разных цветов.

IV. Формула Вульфа-Брэгга. Полученные нами соотношения (3.39) оказываются полезными и при рассмотрении интерференции рентгеновских лучей на кристаллической решётке – см. рис.3.15. В этом случае h – расстояние между атомными плоскостями кристаллической решётки, угол падения α равен углу преломления (“среда” всюду одна и та же), условия отражения двух лучей, как и при выводе соотношений (3.39),

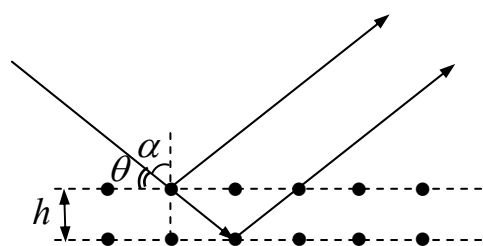


Рис. 3.15

одинаковы. Поэтому, переходя к углу *скольжения* θ , условие максимума можно записать в виде

$$2h \sin \theta = \pm m \lambda. \quad (3.41)$$

Соотношение (3.41) представляет собой основное уравнение

рентгеноструктурного анализа (т.н. «формула Вульфа-Брэгга»). Многочисленные методы рентгеноструктурного анализа базируются на этой формуле и широко используются (в частности, в химии) для анализа структуры твёрдых тел, в том числе молекулярных кристаллов.

ГЛАВА IV. ДИФРАКЦИЯ ВОЛН

§ 1. Принцип Гюйгенса-Френеля. Метод зон Френеля

Под дифракцией обычно понимают явление огибания волнами препятствий. В частности, свет может проникать в область геометрической тени за непрозрачными объектами на пути его распространения^{*)}. При этом за препятствием, наблюдается чередование максимумов и минимумов освещённости, как и при интерференции когерентных световых пучков. Это позволяет сделать вывод о том, что природа явлений дифракции и интерференции одна и та же. Дифракция проявляет себя и в тех случаях, когда форма фронта волны нарушается прозрачными телами с оптическими характеристиками, отличными от остальной среды. Таким образом, в широком смысле дифракцией света можно назвать любое *отклонение от законов геометрической оптики при распространении света в среде с резкими ^{**)} оптическими неоднородностями.*

Наше дальнейшее рассмотрение дифракции состоит в расчёте распределения освещённости в пространстве за препятствием определенных размеров и формы. Основой методологии решения этой задачи, а также понимания дифракционных явлений служит принцип Гюйгенса-Френеля, сформулированный в законченной форме в первой четверти XIX в.

Принцип Гюйгенса-Френеля состоит из двух положений:

1. Любой малый элемент волнового фронта может рассматриваться как *самостоятельный источник сферических*

^{*)} Первое научное описание этого явления, а также и само название «дифракция» принадлежит Ф. Гримальди (1665 г.).

^{**)} Т.е. изменяющихся на масштабах, сравнимых с длиной волны.

волн. Эти волны обычно называют “вторичными”.

2. Интенсивность волн в любой точке пространства можно найти, *вычислив результат интерференции когерентных вторичных волн* в этой точке.

Проиллюстрируем принцип Гюйгенса-Френеля таким примером. Пусть имеется точечный источник монохроматических волн A . Пусть поверхность Σ – положение волнового фронта

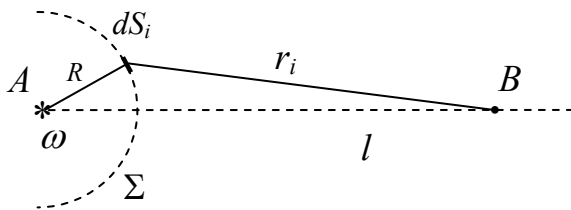


Рис.4.1

времени – рис.4.1. Разобьём эту поверхность на малые элементы dS_i , каждый из которых и будем считать “вторичным” точечным

источником. Для вычисления амплитуды колебаний электромагнитного поля в некоторой произвольной точке B , лежащей в области за волновым фронтом, можно, по Френелю, вместо волн от источника A рассматривать только вторичные волны от всех элементов dS_i . Результирующее колебание в точке B есть *результат сложения колебаний*, возбуждённых волнами от всех вторичных источников. Вторичные источники (расстояние от каждого вторичного источника r_i до точки B должно быть много больше размера элемента) считаем точечными, а распространяющиеся от них волны – сферическими:

$$\xi_i = \sum_i \xi_i = \sum_i \frac{E_{0i}}{r_i} \cdot \cos(\omega t - kr_i + \varphi_0), \quad (4.1)$$

Частота колебаний ω для всех вторичных волн такая же, как частота первичного источника A ; $k = 2\pi/\lambda$ – волновое число;

поскольку все вторичные источники принадлежат волновому фронту начальные фазы φ_0 для них одинаковы и определяются фазой колебаний, дошедших до соответствующего элемента поверхности dS_i из точки A .

Суммирование колебаний согласно равенству (4.1) может быть выполнено методами интегрального исчисления. Однако в ряде простейших, но практически весьма важных случаев, его можно заменить алгебраическим или геометрическим сложением. В частности, использование принципа Гюйгенса-Френеля позволяет предсказать основные закономерности дифракции волн на преградах простой формы – круглых отверстиях и дисках.

Дифракция на круглом отверстии.

Начнём с наиболее простого случая – рассмотрим дифракцию *плоской монохроматической волны*, падающей нормально на непрозрачную плоскую преграду с круглым отверстием (это соответствует случаю, когда источник удалён от преграды на

точке B за препятствием, которая лежит на перпендикуляре к плоскости преграды, проходящем через центр отверстия O . Френель предложил изящный способ решения такой задачи – «метод зон Френеля».

Метод зон Френеля состоит в том, что часть волнового фронта, ограниченную краями препятствия (в рассматриваемом случае –

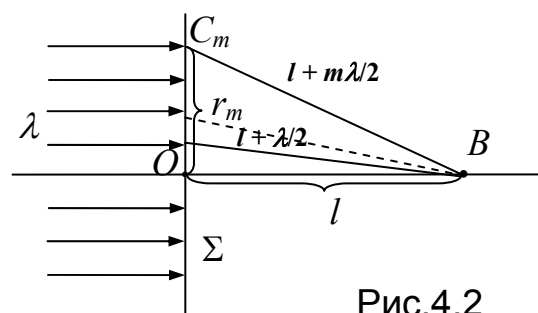
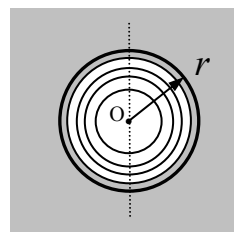


Рис.4.2



Несколько первых зон Френеля внутри отверстия

круг, совпадающий с отверстием) разбивают на участки конечных размеров таким образом, чтобы *расстояния от границ этих участков до точки наблюдения B отличались на $\lambda/2$* . Первая зона Френеля представляет собой круг, причём расстояние C_1B больше OB на $\lambda/2$; остальные зоны – кольца с внешним радиусом OC_m (m – номер зоны-кольца). Найдём радиусы границ таких зон Френеля, используя теорему Пифагора для треугольника OC_mB :

$$l^2 + r_m^2 = (l + m\lambda/2)^2. \quad (4.2)$$

Будем считать, что точка B располагается за преградой на расстоянии l , много большем длины световой волны. Тогда $l\lambda \gg \lambda^2$ и после возведения суммы в квадрат, получаем:

$$r_m^2 = m\lambda l \Rightarrow r_m = \sqrt{m\lambda l}. \quad (4.3)$$

Рассмотрим теперь более общий случай. Пусть теперь источник A находится на конечном расстоянии L от препятствия – см. рис.4.3. Как видно из рисунка, внешний радиус m -й зоны Френеля удовлетворяет условию:

$$r_m^2 = L^2 - (L - x_m)^2 = (l + m\lambda/2)^2 - (l + x_m)^2. \quad (4.4)$$

Используя допущение о малости длины волны λ по сравнению с

расстояниями l и L , из

равенства (4.4) находим сначала

x_m , а затем и интересующий нас

радиус:

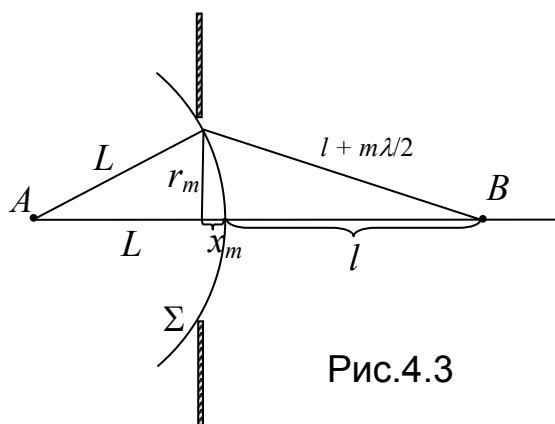


Рис.4.3

$$x_m = \frac{m\lambda l}{2(L+l)};$$

$$r_m = \sqrt{m\lambda \frac{Ll}{L+l}}. \quad (4.5)$$

Удобно ввести вспомогательную характеристику, учитывающую геометрию опыта и имеющую размерность длины

$$l^* = \frac{Ll}{L+l}. \quad (4.6)$$

Легко видеть, что выражение для радиуса зон Френеля приобретает с использованием этой величины точно такую же форму, как и в случае плоского волнового фронта:

$$r_m = \sqrt{m\lambda l^*}. \quad (4.7)$$

Каковы площади зон Френеля с разными номерами? Оказывается, в рассматриваемом приближении они одинаковы для всех зон

$$S_m = \pi r_m^2 - \pi r_{m-1}^2 = \pi \left[m \frac{Ll}{L+l} - (m-1) \frac{Ll}{L+l} \right] = \pi \lambda l^*. \quad (4.8)$$

Итак, построение Френеля разбивает волновой фронт на равновеликие участки – зоны Френеля. Сначала посмотрим, как это помогает определить интенсивность волн в центре экрана.

Пусть радиус отверстия точно равен радиусу первой зоны Френеля. Дополнительно разобьём эту зону на много кольцевых участков одинаковой площади (номера участков $i = 1, \dots, n$) столь малых, чтобы волны, приходящие в точку B от разных точек одного и того же кольцевого участка, имели одинаковую фазу. Амплитуду результирующих колебаний определим, выполняя сложение *графическим методом векторных диаграмм* (см. §5). Колебание, возбуждаемое в точке B волнами от первого ($i = 1$, центрального) участка первой зоны Френеля изобразим вектором

$\vec{E}_1^{(1)*}$, второго участка – $\vec{E}_2^{(1)}$ и т.д. (см. рис.4.4). Учтём, что колебания от каждого следующего участка приходят в точку B с некоторым запаздыванием по фазе $\Delta\varphi_i$, т.к. соответствующие волны проходят до точки B больший путь. Запаздыванию по фазе соответствует поворот вектора по часовой стрелке на угол $\Delta\varphi_i$. Длины векторов $\vec{E}_i^{(1)}$ почти (но не совсем! – см. ниже) одинаковы. Вектор $\vec{E}_n^{(1)}$, соответствующий колебанию, возбуждаемому волнами от последнего ($i = n$) участка первой зоны, повернут на угол $\Delta\varphi_n = \pi$ по отношению к вектору $\vec{E}_1^{(1)}$, так как соответствующее колебание отстает по фазе на π – ведь разность хода между соответствующими лучами равна $\lambda/2$. Векторная диаграмма для случая, когда открыта только одна первая зона Френеля, представляет собой полуокружность – см. рис.4.4^{**}). Суммируя все n векторов от n участков, получаем, что

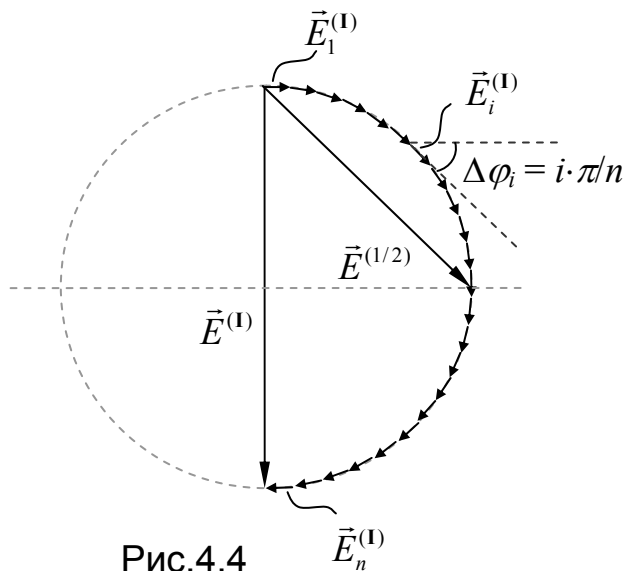


Рис.4.4

результатирующее колебание может быть представлено результирующим вектором $\vec{E}^{(1)}$.

Совершенно аналогично поступим, определяя результирующие колебания в точке B от остальных зон Френеля, оказавшихся в пределах отверстия:

^{*)} $\vec{E}_1^{(1)}$ – вектор напряженности электрического поля волны, приходящей в точку B от центрального участка первой зоны Френеля.

^{**)} Ломаная линия превращается в плавную дугу при увеличении числа участков разбиения зоны (т.е. при $n \rightarrow \infty$).

- а) разбиваем каждую зону на n узких кольцевых участков;
 б) первый вектор каждой последующей зоны $\vec{E}_1^{(k+1)}$ “пришиваем”, учитывая небольшой сдвиг по фазе, к последнему вектору предыдущей зоны $\vec{E}_n^{(k)}$;
 в) суммируем все векторы \vec{E}_i – вектор, соответствующий результирующему колебанию, соединяет на векторной диаграмме начало первого вектора с концом последнего.

На рис.4.5,*а* изображена векторная диаграмма для первых двух зон Френеля, на рис.4.5,*б* – трёх зон. На рис.4.5,*в* показана векторная диаграмма, получающаяся в результате сложения колебаний от всех вторичных источников, принадлежащих открытому волновому фронту (препятствие отсутствует, зон Френеля бесконечно много). На этих диаграммах учтено, что с увеличением номера зоны размеры векторов $\vec{E}_i^{(k)}$ постепенно уменьшаются, т.к. каждая последующая зона находится от точки B несколько дальше, чем предыдущая. Соответственно, уменьшается и “диаметр” полуокружностей, определяющий амплитуду результирующего колебания в точке B при увеличении количества “открытых” зон (1, 3, 5, ...). Сопоставляя рис.4.4 и 4.5,*в*, приходим к парадоксальному на первый взгляд выводу –

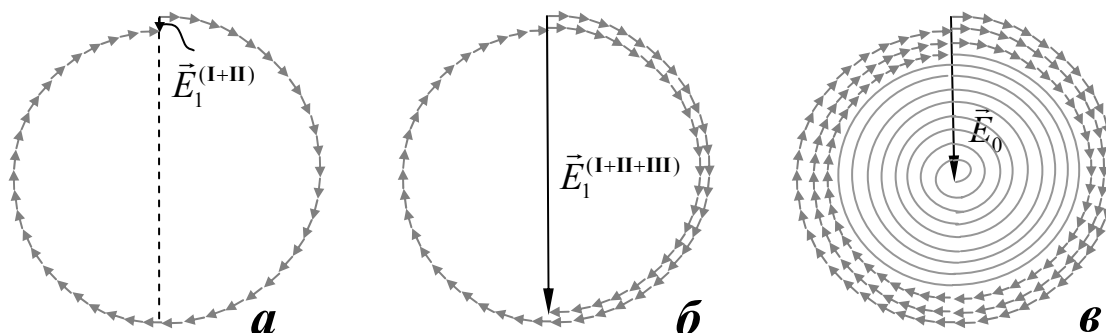


Рис.4.5

амплитуда колебаний в точке B от одной первой зоны в два раза больше амплитуды колебаний от всех зон, вместе взятых. Таким образом, если закрыть все зоны, кроме первой, то в центре экрана будет наблюдаться светлое пятно, интенсивность которого почти в 4 раза больше, чем в отсутствии преграды! Отсюда следует, что малое отверстие может выполнять роль линзы со слабым фокусирующим действием, что и использовалось в первых фотокамерах – “камерах-обскурах”.

Число открытых зон Френеля и, соответственно, интенсивность волн в центре экрана, существенно зависят от положения точки B за препятствием. Пусть, например, в исходном положении величины L , l и λ таковы, что круглое отверстие радиусом r оставляет открытыми 4 зоны Френеля (т.е. $r = r_4$). Из рис.4.5,в следует, что при этом в точке B будет наблюдаться минимальная интенсивность волн. Будем приближать экран к отверстию (уменьшать l); как видно из соотношения (4.7), радиус m -ой зоны Френеля при этом уменьшается, и отверстие в экране будет “вмещать” все большее число зон. На расстоянии l , при котором в отверстие будет “попадать” ровно пять зон Френеля, в центре экрана будет регистрироваться максимум интенсивности (светлое пятно при дифракции света). При дальнейшем перемещении экрана по направлению к преграде интенсивность волн в точке B пульсирует – максимумы и минимумы интенсивности сменяют друг друга в зависимости от того, открыто нечётное (5, 7, 9 и т.д.) или чётное число зон Френеля (6, 8, 10 и т.д.), соответственно. Размах этих пульсаций, уменьшается по мере увеличения числа открытых зон (см. рис.4.5,в). Если экран удалять от преграды, количество видимых из центра экрана зон

Френеля будет уменьшаться (см. (4.7)). Интенсивность света в точке B также будет пульсировать до тех пор, пока не останется открытой только одна зона ($r = r_1$). При таком положении экрана будет зарегистрирован самый большой максимум интенсивности в центре экрана (примерно $4I_0$). При дальнейшем удалении экрана пульсации интенсивности в его центре уже не будут наблюдаться – интенсивность будет монотонно уменьшаться до нуля. На рис.4.4 показано, как определить амплитуду (а значит и интенсивность) результирующих колебаний в точке B , если открыта только часть первой зоны Френеля, например, половина первой зоны Френеля ($m = 1/2$). Фаза волн, приходящих в точку B от границы*) половины первой зоны Френеля отстает на $\pi/2$ от фазы колебаний, возбуждаемых волной от центра отверстия. Поскольку длина вектора $\vec{E}^{(1/2)}$ в $\sqrt{2}$ больше \vec{E}_0 – интенсивность волн в точке B оказывается равной $2I_0$.

Обсудим теперь “радиальное” распределение интенсивности дифракционной картины. Прежде всего, очевидно, что картина симметрична относительно оси AB . Предположим, что из точки B видна только одна первая зона Френеля – рис.4.6,*a*. Сместимся немного в сторону от центра экрана – в точку B_1 . Из этой точки уже видна значительная часть второй зоны Френеля, и только некоторая доля – первой (рис.4.6,*б*). Если “видимые” площади первой и второй зон близки, амплитуда результирующих колебаний в точке B_1 будет малой. Отсюда следует, что центральное светлое пятно будет окружено тёмным кольцом –

*) Граница между этими частями – окружность, разделяющая зону на две равные по площади части.

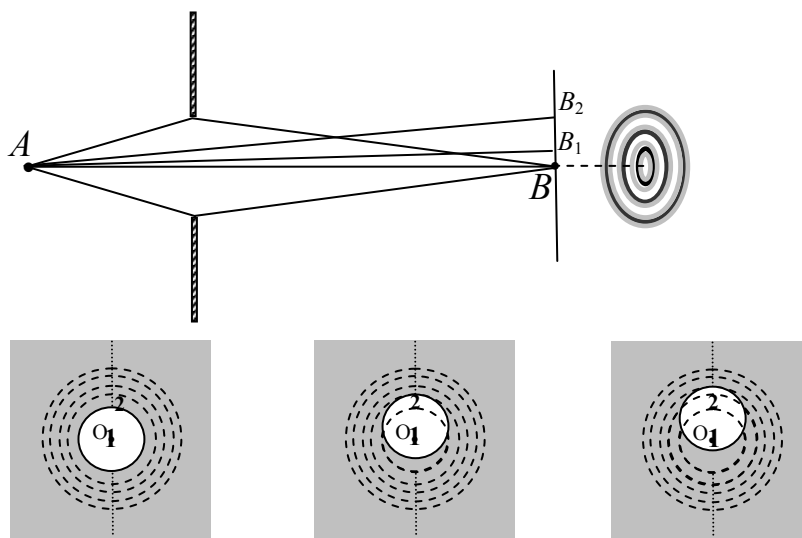


Рис.4.6

первым минимумом. Сместимся еще дальше от центра экрана – в точку B_2 (рис.4.6,в). Из этой точки видна уже значительная часть третьей зоны Френеля, колебания от которой совпадают по фазе с колебаниями от первой зоны, поэтому интенсивность колебаний в точке B_2 будет больше, чем в точке B_1 – т.е. снова будет наблюдаться светлое кольцо. Итак, очевидно, что дифракционная картина в рассматриваемом случае представляет собой систему концентрических колец большей и меньшей интенсивности, в центре картины будет светлое или темное пятно (в зависимости от числа открытых зон Френеля). Чем дальше от отверстия находится экран, тем больше радиусы всех зон Френеля, и тем больше будут радиусы соответствующих темных и светлых колец на экране (т.е. тем шире будет интерференционная картина).

Если на месте преграды (см. рис.4.3) поместить пластинку, на которой “затемнить” кольца, соответствующие всем чётным зонам Френеля, и оставить пропускаемыми для волн области, соответствующие всем нечётным зонам Френеля, то получится так называемая «**амплитудная зонная пластинка**». Векторная диаграмма колебаний в точке B для такой пластинки показана на

рис.4.7. Очевидно, что если пластинка пропускает излучение от N нечетных зон, то амплитуда колебаний в центре экрана возрастает приблизительно в N раз, а интенсивность – в N^2 раз (по сравнению с круглым отверстием, открывающим одну зону Френеля).

Дополнительное увеличение амплитуды колебаний в точке B в два раза (а интенсивности – в четыре раза) можно получить, если чётные зоны Френеля не закрывать, а ввести на соответствующих местах пластинки дополнительную разность хода (обеспечить сдвиг фаз на π). В этом случае излучение от чётных зон будет приходить в точку наблюдения в той же фазе, что и от нечётных. Такая пластинка называется «**фазовой зонной пластинкой**». Амплитудная или фазовая зонная пластинки имитируют действие собирающей линзы с фокусным расстоянием, которое легко получить из соотношения (4.4):

$$F = \frac{r_m^2}{m\lambda}, \quad (4.9)$$

где r_m – радиусы границ между тёмными и светлыми кольцами на пластинке. Из формулы (4.9) следует, что положение фокуса зависит от длины волны, что является серьезным недостатком зонной пластинки как оптического фокусирующего элемента. Отметим, однако, что устройства типа зонных пластинок с успехом используются для фокусирования или направленного излучения радиоволн.

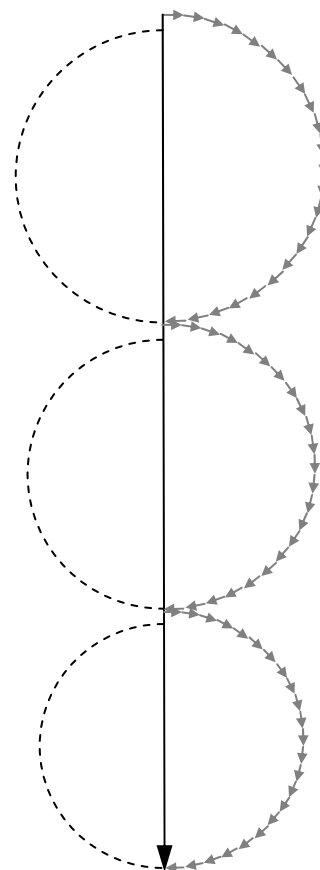


Рис.4.7

Остановимся вкратце на дифракции волн на небольших круглых препятствиях. Воспользуемся для этой цели векторной диаграммой – рис.4.5,в. Если круглое препятствие закрывает две зоны Френеля, то это означает, что из спирали, изображающей векторную диаграмму для всех зон Френеля, нужно “удалить” две первых (“внешних”) полуокружности. Ясно, что результирующая амплитуда колебаний в центре экрана (точке *B*) изменится при этом мало. Это заключение останется справедливым при любом небольшом количестве закрытых зон – см. рис.4.8. Получается довольно неожиданный вывод теории Френеля, на который впервые обратил внимание Пуассон^{*)}, – в центре дифракционной картины от не очень большого диска всегда должно находиться светлое пятно (т.н. “пятно Пуассона”). Несмотря на кажущуюся парадоксальность этого вывода, пятно Пуассона в действительности наблюдается экспериментально.

Очевидно, что вблизи края тени от круглого экрана, как и при дифракции на отверстии, должны наблюдаться светлые и темные кольца.

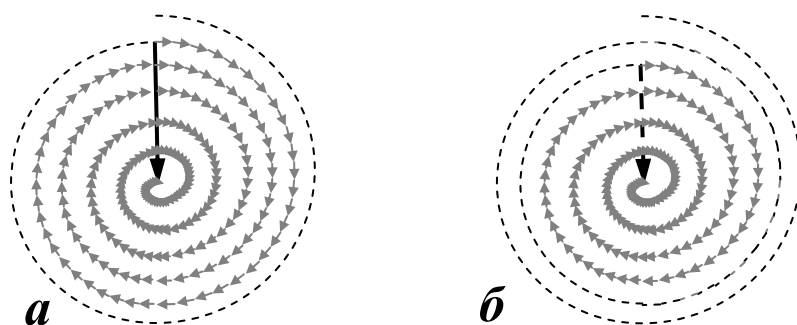


Рис.4.8

^{*)} Пуассон считал этот логический вывод очевидным свидетельством ложности представлений Френеля.

§ 2. Дифракция Френеля на полуплоскости и щели

Метод зон Френеля оказывается весьма полезным и при решении задач о дифракции волн на препятствиях с прямолинейными границами (полуплоскости или щели). Рассмотрим сначала дифракцию *плоской монохроматической волны на прямолинейном краю непрозрачной полуплоскости*. Экран, на котором регистрируется дифракционная картина, находится на расстоянии l за препятствием. При выполнении закона прямолинейного распространения света на экране наблюдалась бы тень с резким прямолинейным краем. В действительности же вблизи проекции края полуплоскости наблюдается типичная интерференционная картина – чередования светлых и темных полос – результат дифракции света (см. рис. 4.9).

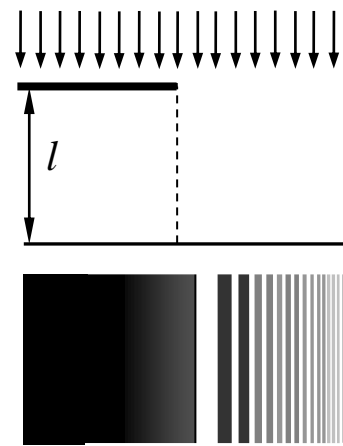


Рис. 4.9

Разобьем плоский волновой фронт, совпадающий с плоскостью преграды, на зоны Френеля. На этот раз они представляют собой полосы, параллельные краю преграды. Определим сначала интенсивность в точке B , расположенной строго напротив края препятствия. Расстояния от границ соседних зон до этой точки, как и ранее, отличаются на $\lambda/2$ (см. рис.4.10). Повторяя выкладки, приведенные на стр.88, получим, что граница зоны с номером m находится на расстоянии h_m от линии OB :

$$h_m = \sqrt{m\lambda l} . \tag{4.10}$$

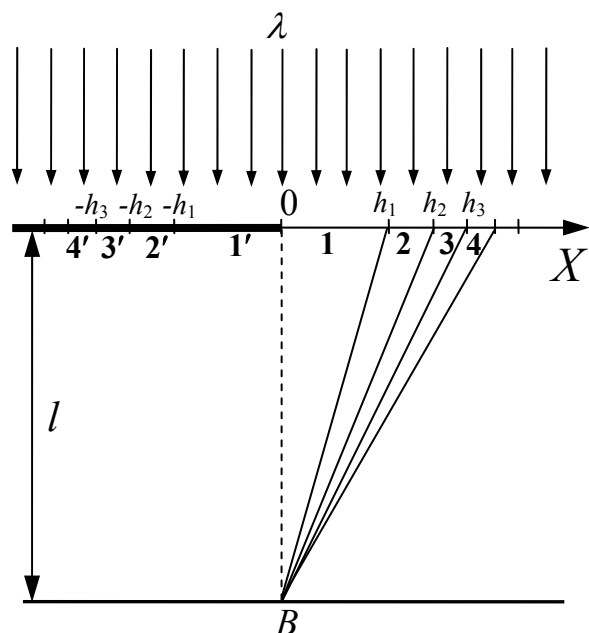


Рис. 4.10

Площадь m -ой зоны пропорциональна ширине соответствующей полоски, т.е.

$$S_m \sim \sqrt{m} - \sqrt{m-1}. \quad (4.11)$$

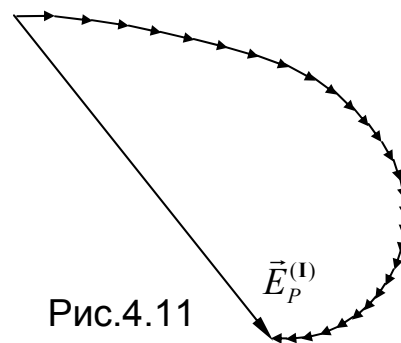
Отсюда следует, что в рассматриваемой ситуации площади разных зон Френеля не равны, а именно:

$$S_1 : S_2 : S_3 : S_4 = 1 : 0,41 : 0,32 : 0,27. \quad (4.12)$$

Другая особенность этой задачи – наличие двух симметричных семейств зон Френеля – “правого” (цифры без штрихов на рис.4.10) и “левого” (цифры со штрихами). В рассматриваемом случае все зоны левого семейства закрыты преградой.

Амплитуду результирующих колебаний в точке B определим, как и ранее, выполняя сложение колебаний графическим способом. Сначала представим на векторной диаграмме результат действия только одной первой (“нештрихованной”) зоны Френеля. Для этого разобьем её дополнительно на большое число (n) равных по ширине параллельных краю препятствия полосок (“нитевидных” вторичных источников), узких настолько, что волны, приходящие в точку B от двух соседних полосок, лишь немного отличаются по фазе. Колебание, возбуждаемое в точке B волнами от первого вторичного источника, находящегося на волновом фронте точно напротив точки B , изобразим вектором $\vec{E}_1^{(1)}$, направленным горизонтально вправо – см. рис.4.11. Колебания от каждого

следующего вторичного источника, располагающегося чуть дальше от края препятствия, приходят в точку B с некоторым запаздыванием по фазе $\Delta\varphi_i$ – соответствующий вектор \vec{E}_i должен быть повернут угол $\Delta\varphi_i$ по часовой стрелке. Как



и в задаче о дифракции на круглом отверстии, будем добавлять к вектору $\vec{E}_1^{(1)}$ векторы $\vec{E}_2^{(1)}, \dots, \vec{E}_n^{(1)}$, изображающие действие следующих полосок. Длина каждого следующего вектора чуть меньше предыдущего из-за увеличения расстояния от источника до точки B . Этот эффект невелик, мы учитывали его и при рассмотрении дифракции на круглом отверстии.

Более существенно другое – сдвиг фаз между колебаниями от соседних полосок сначала изменяется сравнительно медленно (для полосок, близких к точке O), а затем (при возрастании номера полоски) нарастает всё быстрее. Это объясняется тем, что разность хода лучей растёт по квадратичному закону по мере удаления соответствующего вторичного источника от точки O (т.е. в зависимости от координаты x вторичного источника). В отличие от этого, при дифракции на круглом отверстии отставание по фазе нарастало равномерно, поскольку постепенно уменьшалась ширина кольцевых вторичных источников. В итоге “выстраивания” векторов $\vec{E}_1^{(1)}, \vec{E}_2^{(1)}, \dots, \vec{E}_n^{(1)}$ от всех полосок первой зоны Френеля получаем векторную диаграмму, показанную на рис.4.11.

Общим для кривых, показанных на рис.4.4 и 4.11, является сдвиг фаз между крайними векторами, равный в обоих случаях π – соответствующие колебания приходят в точку B в противофазе.

Справа от точки O волновой фронт неограничен – число открытых зон Френеля бесконечно велико. Выстраивая аналогичным образом векторы, изображающие действие всех последующих “правых” вторичных источников, получим кривую, показанную на рис.4.12. Отметим, что по мере возрастания

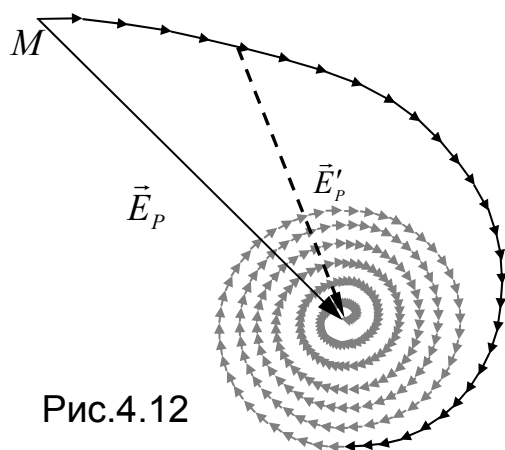


Рис.4.12

номера зоны различие в ширине соседних зон становится все меньше (см. (4.12)), поэтому, чем больше номер зоны, тем ближе соответствующий участок спирали на рис.4.12 к полуокружности. Амплитуда колебания напряженности электрического поля в точке B пропорциональна

квадрату длины результирующего вектора \vec{E}_p на рис.4.12.

Какова интенсивность света в точке B ? Чтобы ответить на этот вопрос, мысленно уберём препятствие на пути световых волн. Тогда и вторичные источники, принадлежащие левым “штрихованным” (на рис.4.10) зонам Френеля будут давать вклад в освещенность экрана в точке B . Для них, очевидно, может быть построена точно такая же векторная диаграмма, только векторы \vec{E}'_i придется выстраивать симметрично относительно начала координат влево. Полную векторную диаграмму для открытого волнового фронта получим, “сшивая” две векторные диаграммы, для “правых” и “левых” вторичных источников. При этом нужно учесть, что два начальных вектора $\vec{E}_1^{(1)}$ и $\vec{E}_1^{(2)}$ (от двух центральных полосок справа и слева от линии OB) практически параллельны

(фазы колебаний почти одинаковы); по мере удаления от центральной полоски к периферийным соответствующие векторы $\vec{E}_2^{(1)}$, $\vec{E}_3^{(1)}$, ..., $\vec{E}_n^{(1)}$ все больше поворачиваются относительно $\vec{E}_1^{(1)}$ по часовой стрелке (отставание по фазе). В результате получим полную векторную диаграмму колебаний в точке B в виде т.н. “спирали Корню” – см. рис.4.13.

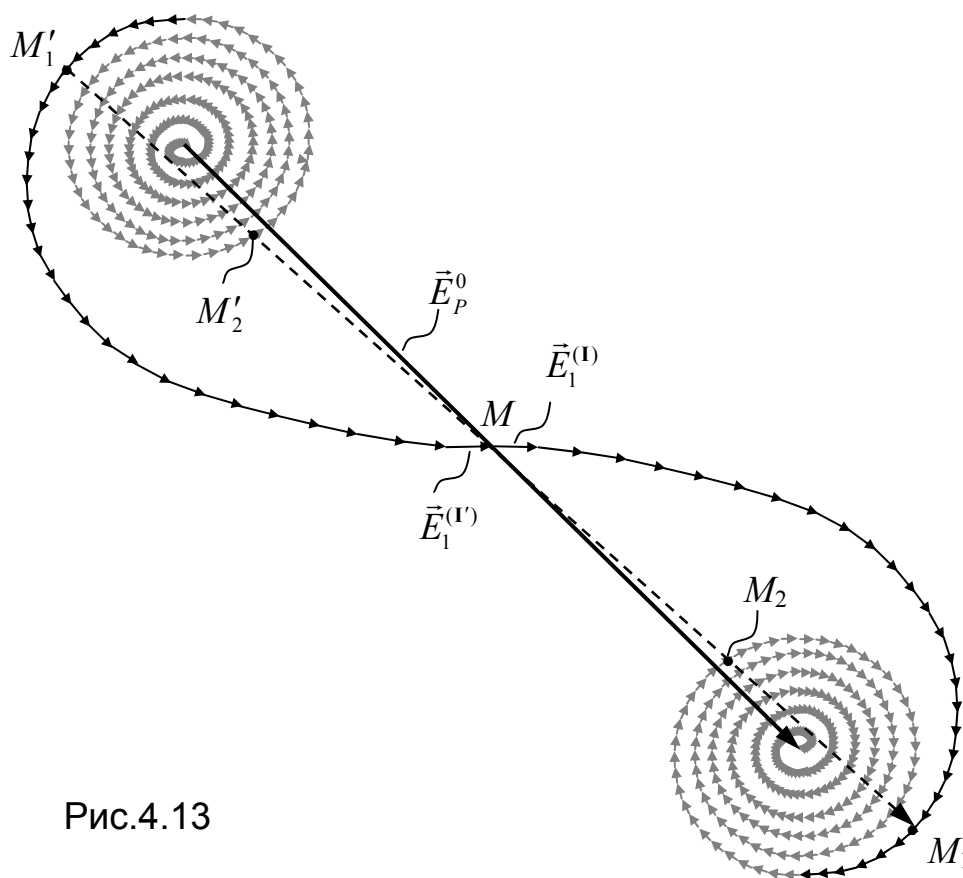


Рис.4.13

Интенсивность света в отсутствии преграды I_0 пропорциональна квадрату длины результирующего вектора \vec{E}_P^0 на рис.4.13. Нетрудно видеть, что длина этого вектора вдвое больше, чем вектора \vec{E}_P на рис.4.12. Таким образом, на месте края геометрической тени (проекция края препятствия на экран)

интенсивность света в четыре раза меньше, чем в отсутствии преграды ($I = 0,25 I_0$).

Посмотрим теперь, как меняется освещенность экрана при перемещении точки наблюдения влево от края геометрической тени – точки B на рис.4.10. (Это эквивалентно постепенному перемещению препятствия на рис.4.10 вправо относительно неподвижной точки B). При этом постепенно закрываются “нестрихованные” зоны Френеля и из спирали, представленной на рис.4.12, последовательно исключаются векторы $\vec{E}_1^{(1)}$, $\vec{E}_2^{(1)}$, ... Конец результирующего вектора остается на прежнем месте, а вот его начало “скользит” вдоль спирали вправо от точки M (см. вектор \vec{E}'_p на рис.4.12). Длина результирующего вектора монотонно убывает по мере удаления точки наблюдения от края препятствия “вглубь” (рис.4.10). Соответственно ведёт себя и освещённость экрана в области геометрической тени.

При смещении от точки B вправо, т.е. в область, где при выполнении законов геометрической оптики наблюдалась бы равномерная освещённость всего экрана, растёт число открытых вторичных источников “штрихованных” зон – начало результирующего вектора “скользит” вдоль спирали Корню (рис. 4.13) влево от точки M . Длина его достигает максимального и минимального значений, когда начало вектора оказывается в точках M'_1 и M'_2 спирали (*вблизи* краев первой и второй “штрихованных” зон Френеля, соответственно). Конец же результирующего вектора всегда находится в центре “правой” спирали.

Дальнейшее смещение от границы геометрической тени приводит к чередованию локальных минимумов и максимумов освещённости, поскольку длина результирующего вектора при

“скольжении” его начала по “левой” спирали осциллирует. При удалении от края геометрической тени максимумы и минимумы располагаются всё ближе друг к другу и становятся менее резко выраженными – см. рис.4.14. Это и объясняет представленную в начале параграфа на рис.4.9 дифракционную картину.

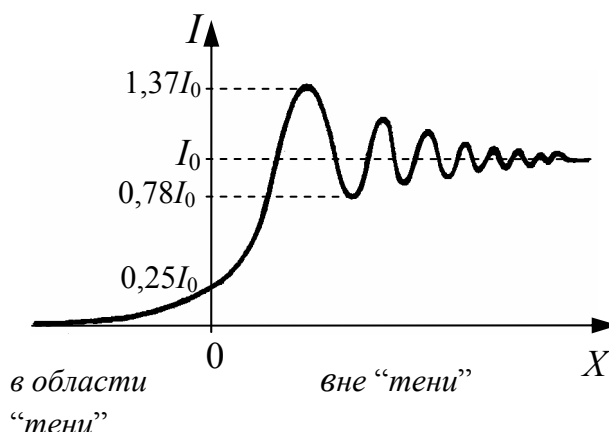


Рис. 4.14

Пользуясь спиралью Корню (рис.4.13), можно качественно провести построение дифракционной картины от щели.

Рассмотрим сначала интенсивность интерференционной картины в центре экрана, расположенного за щелью. Пусть ширина щели такова, что она оставляет открытыми чуть меньше двух первых зон Френеля (по одной “штрихованной” и “нештрихованной”), так что результирующее колебание в центре экрана на векторной диаграмме (рис.4.13) изображается вектором, соединяющим точки M_1' и M_1^*). Его амплитуда максимальна (больше амплитуды вектора \vec{E}_p^0), освещённость в центре экрана заметно превышает освещённость экрана в отсутствии преграды. При приближении экрана к щели ширина всех зон Френеля уменьшается (см. формулу (4.10)), щель начинает “вмещать” больше зон Френеля и, соответственно, амплитуда вектора результирующих колебаний в центре экрана уменьшается. В частности, когда вектор результирующих

*) Ширина щели при этом $b \approx 2h_1 = 2\sqrt{l\lambda}$. Или, иначе говоря, расстояние до экрана $l = b^2/4\lambda$.

колебаний соединяет точки M'_2 и M_2^{**} (рис.4.13), длина этого вектора минимальна и меньше, чем в отсутствии преграды. Дальнейшее приближение экрана ведёт к затухающим осцилляциям освещённости в центре дифракционной картины. Очевидно, что качественно все происходит так же, как и при дифракции Френеля на круглом отверстии (см. §1), только теперь симметрия дифракционной картины иная.

Характер пространственного распределения интенсивности по всему экрану (справа и слева от центральной полосы) качественно такой же, как и от круглого отверстия. На экране наблюдается система светлых и темных областей, симметрия которых соответствует симметрии препятствия. В случае дифракции на щели дифракционная картина представляет собой семейство светлых и темных полос, параллельных щели. Точные положения максимумов и минимумов интерференции при дифракции света на щели зависят от длины световой волны, ширины щели и расстояния от щели до экрана. Соответствующие соотношения для одного наиболее важного частного случая дифракции на щели будут получены в следующем параграфе.

§ 3. Дифракция Фраунгофера на щели

Термин «дифракция Фраунгофера» принято использовать, когда источник света и экран, на котором наблюдается дифракционная картина, находятся на большом расстоянии от препятствия. В этом случае на препятствие падают параллельные лучи света, а освещённость в каждой точке

***) При этом щель «вмещает» приблизительно по две «правых» и две «левых» зоны Френеля–Шустера, $b \approx 2h_2 = 2\sqrt{2l\lambda}$; расстояние до экрана $l = b^2/8\lambda$.

дифракционной картины есть результат сложения волн, распространяющихся *в одном направлении*. В этом смысле говорят, что дифракция наблюдается “*в параллельных лучах*”. На практике для наблюдения дифракции Фраунгофера за препятствием обычно ставят собирающую линзу, а экран располагают в её фокальной плоскости – см. рис. 4.15.

Рассмотрим сначала дифракцию Фраунгофера на щели шириной b , на которую перпендикулярно к ней падает плоская волна, длина которой λ . Из соображений симметрии очевидно, что интерференционная картина при дифракции монохроматического света на щели будет представлять собой семейство тёмных и светлых полос, параллельных щели. Для того чтобы определить точный вид дифракционной картины, воспользуемся методом векторных диаграмм. Разобьём волновой фронт, совпадающий с плоскостью щели, на много (n) одинаковых узких полосок, параллельных краям щели. В соответствии с принципом Гюйгенса-Френеля, каждая такая полоска может рассматриваться как самостоятельный источник “вторичных” волн (в данном случае вторичные волны не сферические, как для точечных источников, а цилиндрические).

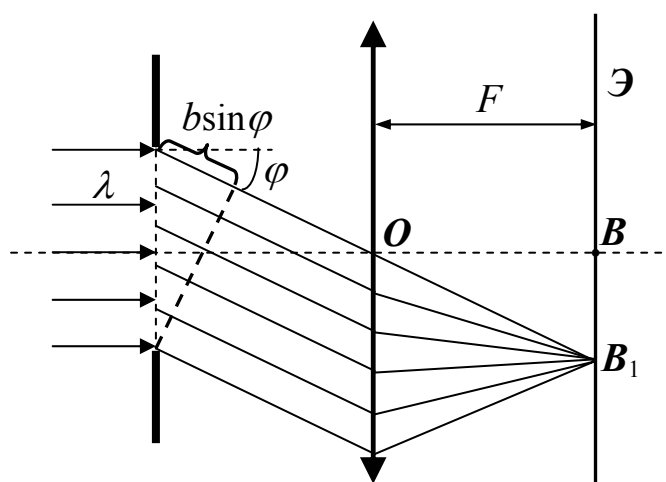


Рис. 4.15

Рассмотрим семейство лучей, соответствующих волнам, распространяющимся от всех вторичных источников в одном направлении, составляющем угол φ с нормалью к плоскости щели

(и с направлением падающего на щель света). Поскольку все полосы, на которые разбит волновой фронт в области щели, имеют одинаковую площадь, интенсивность вторичных волн, испускаемых каждой полоской, одинакова. В центральную точку экрана B ($\varphi = 0$) все n волн приходят, пройдя одинаковый путь, поэтому их амплитуды и фазы в точке B одинаковы. Соответственно, *одинакова длина векторов* амплитуд напряженности электрического поля \vec{E}_i от каждой полоски в центре экрана и все векторы \vec{E}_i “выстраиваются” вдоль одной прямой – рис.4.16,а. Результирующее колебание имеет амплитуду, равную длине суммарного вектора $\vec{E}_0 = \sum_{i=1}^n \vec{E}_i$.

Будем постепенно удаляться от центра дифракционной картины, т.е. рассматривать лучи, распространяющиеся от вторичных источников под всё большими углами дифракции φ . Теперь между колебаниями, приходящими от разных вторичных источников (полосок) в данную точку экрана, будет “набегать” определённая разность фаз. В частности, на рис.4.16,б показана векторная диаграмма для достаточно малого угла дифракции φ , когда разность фаз колебаний от первой и последней полосок (угол между первым и последним векторами – \vec{E}_1 и \vec{E}_n) равна приблизительно $\pi/4$. Длина результирующего вектора при этом меньше величины E_0 , задающей длину дуги. Рис.4.16,в помогает понять, каким образом можно определить длину результирующего вектора колебаний \vec{E}_φ и, следовательно, освещённость, при произвольном значении угла дифракции φ в пределах центрального максимума (чуть позже мы определим его границы). Длину вектора \vec{E}_φ можно найти, например, по теореме

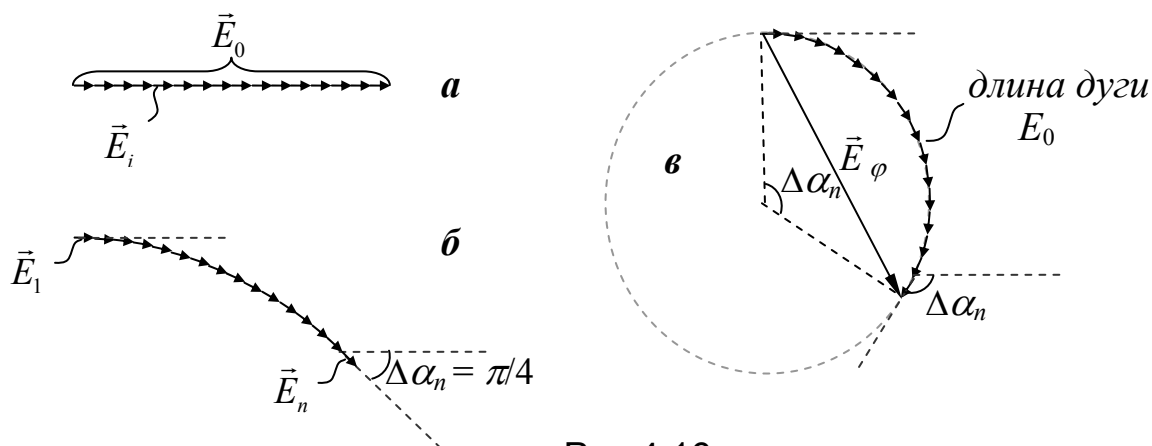


Рис.4.16

косинусов из треугольника, показанного на рисунке. Две другие стороны этого треугольника (радиусы окружности) легко выразить через E_0 и угол $\Delta\alpha_n$. В свою очередь $\Delta\alpha_n$ – это фазовое запаздывание колебаний, приходящих от n -го источника относительно первого. На рис.4.15 показана разность хода между волнами, испускаемыми “крайними” вторичными источниками $\Delta = b \sin \varphi$. При этом нужно иметь в виду важное свойство линзы, называемое *таутохронизмом* – линза не вносит дополнительной разности хода между отдельными лучами проходящего сквозь неё параллельного пучка света. Значит, искомый сдвиг фаз между крайними лучами, идущими от щели под углом φ к нормали, равен

$$\Delta\alpha_n = 2\pi \frac{b \sin \varphi}{\lambda}.$$

Например, при выполнении условия $b \sin \varphi = \lambda/2$ разность фаз между колебаниями \vec{E}_1 и \vec{E}_n равна π – на векторной диаграмме дуга имеет вид полуокружности. Амплитуда результирующего вектора $\vec{E}^{(\pi)}$ при этом вычисляется особенно просто

$$E^{(\pi)} = \frac{2E_0}{\pi} \approx 0,64E_0.$$

Интенсивность света пропорциональна квадрату амплитуды напряжённости, поэтому $I^{(n)} \approx 0,4 I_B$, т.е. освещённость в данном случае (на “плече” центрального максимума) составляет примерно 40% от освещённости в самом центре дифракционной



Рис.4.17

интенсивность монотонно уменьшается, пока не становится минимальной при выполнении условия $b \sin \varphi = \lambda$. Разность фаз между колебаниями \vec{E}_1 и \vec{E}_n достигает при этом 2π – векторная диаграмма имеет вид, представленный на рис. 4.17.

При ещё больших углах дифракции наблюдается чередование всё более слабых максимумов и минимумов освещённости – векторная диаграмма будет “свиваться” в спираль, длина результирующего вектора то возрастает до размеров диагонали, то убывает почти до нуля – см. табл.4.1.

Таблица 4.1.

$b \sin \varphi$	0	$\pm \lambda/2$	$\pm \lambda$	$\pm 3\lambda/2$	$\pm 2\lambda$	$\pm 5\lambda/2$
классификация	нулевой максимум	плечо нул. максимум	первый минимум	первый максимум	второй минимум	второй максимум
векторные диаграммы						
Амплитуда	E_0	$E'_0 = \frac{2E_0}{\pi}$	0	$E'_0 = \frac{2E_0}{3\pi}$	0	$E'_0 = \frac{2E_0}{5\pi}$
Интенс.	$I_0 \sim E_0^2$	$\approx 0,4 I_0$	0	$0,045 I_0$	0	$0,016 I_0$

Над каждой векторной диаграммой приведена величина разности хода для крайних лучей; под каждой диаграммой – длина результирующего вектора и интенсивность света. Надо помнить, что *неизменной остаётся полная длина спирали* – E_0 , следовательно постепенно уменьшается её “диаметр”.

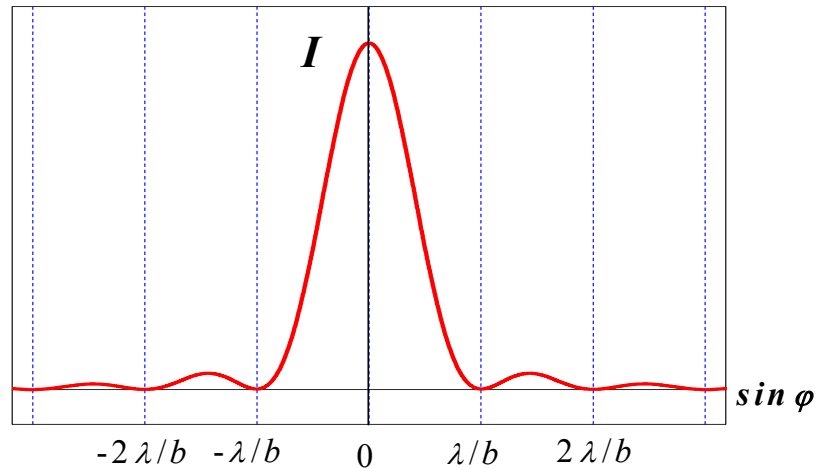


Рис.4.18

Соответствующая зависимость изменения освещённости экрана от синуса угла дифракции представлена на рис. 4.18. Точное аналитическое описание зависимости интенсивности от угла дифракции мы приводим в разделе «Дополнительные главы» – см. соотношение (6.9,*a*).

Минимумы освещённости на экране наблюдаются при выполнении условия:

$$b \sin \varphi = \pm m \lambda, \quad m = 1, 2, \dots \quad (4.13)$$

Как мы увидим в дальнейшем, угловое положение первого дифракционного минимума $\sin \varphi_1 = \lambda/b$ является наиболее характерным параметром дифракционной картины от щели. Именно этот параметр определяет протяжённость центральной, наиболее освещённой, области экрана.

Запишем условия наблюдения всех максимумов дифракционной картины от щели:

$$b \sin \varphi = 0, \pm (m + \frac{1}{2}) \lambda, \quad m = 1, 2, \dots \quad (4.14)$$

Число m в условиях (4.13) и (4.14) называется *порядком* соответствующего *минимума* или *максимума* в дифракционной картине. Используя метод векторных диаграмм, можно показать, что интенсивность “боковых” максимумов I_m связана с интенсивностью в центре дифракционной картины I_0 ($\varphi=0$) соотношением:

$$I_m = I_0 \cdot [(m + \frac{1}{2})\pi]^2. \quad (4.15)$$

Отметим, что центральный максимум в два раза шире, чем все остальные, а его максимальная интенсивность приблизительно в 25 раз больше, чем двух соседних. Поэтому почти вся энергия светового потока, проходящего через щель, сосредоточена в области центрального (“нулевого”) максимума.

В заключение этого параграфа подчеркнём два обстоятельства:

1) положения минимумов и максимумов (кроме центрального) зависят от длины волны, т.е. щель является простейшим спектральным аппаратом;

2) для наблюдения дифракции Фраунгофера использование линзы необязательно, необходимо лишь, чтобы экран находился достаточно далеко от щели (более строгое количественное определение условий наблюдения дифракции Фраунгофера обсуждается в следующем параграфе).

§4. Классификация дифракционных явлений

При рассмотрении дифракции света в предыдущих параграфах (1–3) мы использовали исторически сложившуюся терминологию – «дифракция Френеля» и «дифракция Фраунгофера». Чем *качественно* отличается дифракционная картина в этих случаях? При *дифракции Френеля* на отверстиях различной формы в центре дифракционной картины может наблюдаться *как максимум, так и минимум* интерференции – светлая или тёмная область (точка, полоса) в окружении чередующихся тёмных и светлых областей с затухающим контрастом. Такую картину можно наблюдать, если экран

установлен не слишком далеко за препятствием, в т.н. “ближней зоне”. На достаточно большом расстоянии, в т.н. “дальней зоне”, наблюдается *дифракционная картина Фраунгофера* – в центре всегда максимум освещённости, в окружении чередующихся тёмных и светлых областей с быстро уменьшающейся интенсивностью максимумов. Остальные отличия – количественные.

Как видим, пока (§1–3) мы всё ещё используем весьма нестрогие критерии разграничения видов дифракции. Кроме того, совершенно не обсуждался пока вопрос о том, когда дифракционные явления приводят к существенным для практических задач отклонениям от геометрической оптики. Для того чтобы выработать количественные критерии, вернёмся к задаче о падении плоской волны на длинную щель в бесконечно большой преграде – см. рис.4.19.

Как мы помним, интенсивность в любой точке экрана (координата которой x_0) определяется результатом сложения волн от вторичных источников, расположенных в открытой части препятствия (узкие полоски, параллельные краям щели). Лучи от крайних вторичных источников (первого и n -ого), обозначены на

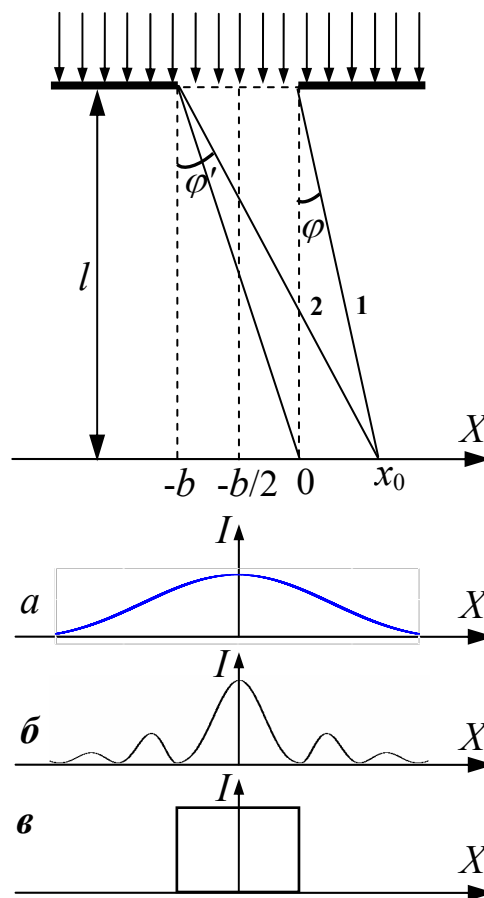


Рис. 4.19

рисунке цифрами 1 и 2; углы дифракции этих лучей – φ и φ' .

Сохраняя принятые ранее обозначения, запишем:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{x_0}{l}; \quad \operatorname{tg} \varphi' = \frac{x_0 + b}{l}. \quad (4.16)$$

При «дифракции Фраунгофера» экран находится настолько далеко за препятствием, что все волны, интерферирующие в точке экрана x_0 , распространяются от вторичных источников в почти параллельных направлениях, а это означает, что $\varphi \approx \varphi'$. Это возможно при условии:

$$x_0 \gg b. \quad (4.17)$$

Ближайшая к центру особенность дифракционной картины – первый минимум, координата которого x_{01} . Будем считать, что мы имеем дело с дифракцией Фраунгофера, если условию (4.17) подчиняются координаты всех точек дифракционной картины в пределах центрального максимума, т.е. если $x_{01} \gg b$. Поскольку для первого минимума $b \sin \varphi_1 = \lambda$,

$$\sin \varphi_1 = \frac{\lambda}{b} \approx \frac{x_{01}}{l}, \text{ т.е. } x_{01} \approx \frac{l\lambda}{b} \quad (4.18)$$

и с учётом условия (4.18) $x_{01} \gg b$ получаем:

$$\frac{b^2}{l\lambda} \ll 1. \quad (4.19)$$

Это и есть *количественный критерий* наблюдения дифракции Фраунгофера. Заметим, что в этом случае для точек, расположенных вблизи центра дифракционной картины, *оказывается открытой только небольшая часть первой зоны Френеля** (разность хода между лучами 1 и 2 гораздо меньше

*) Величина в левой части неравенства (4.18) как раз и определяет порядок числа открытых зон Френеля для рассматриваемой «геометрии» дифракционной задачи.

длины волны). Это можно считать вторым, полуколичественным способом определения дифракции Фраунгофера.

Если неравенство (4.19) не выполняется, интерферирующие лучи 1 и 2 нельзя считать параллельными, величина x_{01} соизмерима с b , т.е. $x_{01} \sim b$.

Вместо неравенства (4.19) получаем условие наблюдения дифракции Френеля в виде:

$$\frac{b^2}{l\lambda} \sim 1. \quad (4.20)$$

Это означает, что *из центра дифракционной картины "видно", что щель оставляет открытыми лишь несколько* ("порядка одной") *зон Френеля.*

Наконец, *явление дифракции проявляется слабо*, когда координата первого дифракционного минимума находится вблизи проекции на экран края щели, т.е. $x_{01} \ll b$. Отсюда, используя соотношение (4.20) получаем условие того, что можно с достаточной степенью точности пользоваться представлениями *геометрической оптики:*

$$\frac{b^2}{l\lambda} \gg 1. \quad (4.21)$$

В этом случае *открыто очень много зон Френеля.*

Качественный вид дифракционных картин для случаев дифракции Фраунгофера, Френеля и малой роли дифракции (геометрическая оптика) показан на рис.4.19 (*a, б, в* – соответственно).

Несмотря на то, что в последнем из рассмотренных случаев дифракция относительно незначительна, полностью пренебрегать

ею нельзя – именно дифракционные эффекты ограничивают *разрешающую способность оптической аппаратуры*.

Действительно, предположим, что источник волн, который мы хотим зарегистрировать с помощью какого-то оптического прибора (глаза или фотообъектива), находится достаточно далеко от нас (источник можно считать точечным). Если бы законы геометрической оптики выполнялись совершенно точно, то отверстие объектива просто ограничивало бы размеры светового пучка; направление световых лучей не изменялось бы. Для иллюстрации на рис.4.20 показаны крайние лучи этого пучка – 1 и 2 (из-за того, что расстояние до источника волн много больше размера отверстия объектива, лучи 1 и 2 почти параллельны). После прохождения отверстия все лучи пучка остаются параллельными, затем собирающей линзой эти лучи фокусируются в одной точке фокальной плоскости B (чувствительный элемент оптической аппаратуры, например, фотоплёнка, находится в фокальной плоскости линзы; сама же линза может смещаться по вертикали как угодно и, в частности, располагаться непосредственно в отверстии). Таким образом, при

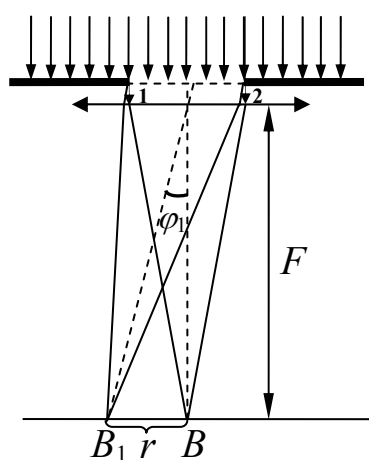


Рис. 4.20

идеальном выполнении законов геометрической оптики линза отобразила бы точечный источник волн в виде точки на фотоплёнке.

На самом деле всегда будет присутствовать некоторое “уширение” пучка за отверстием из-за дифракции. Угловое отклонение крайних лучей пучка

определяется положением первого дифракционного минимума. В случае дифракции Фраунгофера на круглом отверстии с диаметром d угол, под которым наблюдается первый минимум, определяется условием $d \sin \varphi_1 \approx \lambda$ ^{*)}. Т.е. крайние лучи пучка волн в результате дифракции отклоняются на угол φ_1 :

$$\varphi_1 \approx \frac{\lambda}{d}. \quad (4.22)$$

Лучи, идущие под углом φ_1 к направлению падающего пучка, сфокусируются на экране в точке B_1 (рис.4.20) – т.е. дифракция приведёт к “расплыванию” изображения источника на экране. В рассматриваемом случае вместо точки на фотоплёнке будет пятно радиусом $r \approx F\lambda d$. Поэтому, чем меньше размер отверстия, тем больше полученное изображение будет отличаться от точечного.

Из сказанного выше ясно, что дифракция будет ограничивать возможности *пространственного разрешения* наблюдаемых объектов оптической аппаратурой. Два отдельных точечных объекта могут быть разрешены оптическим прибором, находящимся на расстоянии L , только в том случае, когда угловое расстояние β между ними больше, чем угловой размер изображения от одного точечного источника φ_1 (см. рис.4.21), т.е. $\beta > \varphi_1$. Если входное отверстие объектива прибора d , а расстояние между объектами h , то из оценочных соотношений

$\beta \approx \frac{h}{L}$, $\varphi_1 \approx \frac{\lambda}{d}$, получаем условие различимости удалённых объектов:

^{*)} Точный расчет дифракционной картины Фраунгофера для круглого отверстия приводит к условию первого минимума в виде: $d \sin \varphi_1 = 1,22\lambda$. В дальнейшем коэффициентом 1,22 мы будем пренебрегать.

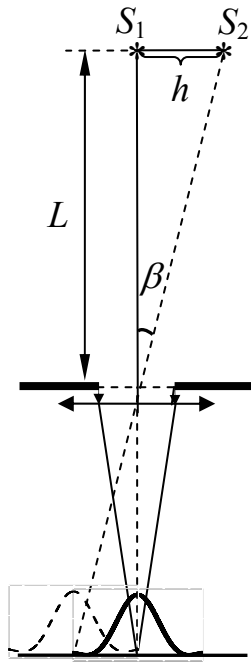


Рис. 4.21

$$d > \frac{L\lambda}{h}. \quad (4.23)$$

Заметим, что неравенство (4.23) означает потерю когерентности волн, распространяющихся от каждого из источников S_1 и S_2 , в пределах входного отверстия регистрирующего прибора,

$$\frac{l\lambda}{h} = r_k \Rightarrow d > r_k. \quad (4.24)$$

Если бы выполнялось неравенство, обратное (4.24), излучение от рассматриваемых источников было бы когерентным, а значит, неотличимым от излучения одного точечного источника.

§ 5. Дифракция Фраунгофера от системы щелей. Дифракционная решетка

Рассмотрим дифракционную картину от нескольких (N) параллельных щелей шириной b , расположенных на одинаковых расстояниях d друг от друга. Такую систему щелей называют дифракционной решёткой, расстояние d – периодом решётки (см. рис.4.22). Пока будем считать, что падающий на решетку параллельный пучок света перпендикулярен плоскости решетки.

Для наблюдения дифракционной картины Фраунгофера за решёткой поставим собирающую линзу. Все лучи, дифрагирующие под определенным углом φ (угол φ , как и ранее, отсчитываем от направления падения падающего на решетку света) будут сфокусированы линзой в одной точке в фокальной плоскости линзы – рис.4.22. Падающий на дифракционную решётку световой поток будем считать когерентным.

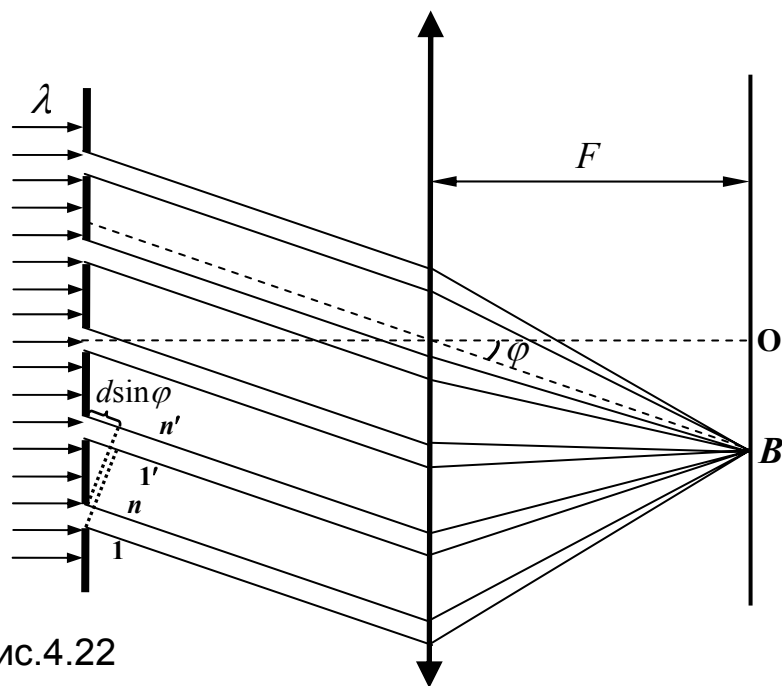


Рис.4.22

Наша задача – определить положения максимумов и минимумов дифракционной картины, найти интенсивность и угловую протяжённость максимумов.

Дифракционная картина в рассматриваемом случае качественно иная, чем в случае одной щели – максимумов (и, соответственно, минимумов) больше, они уже и имеют более сложное распределение интенсивностей – см. рис.4.23.

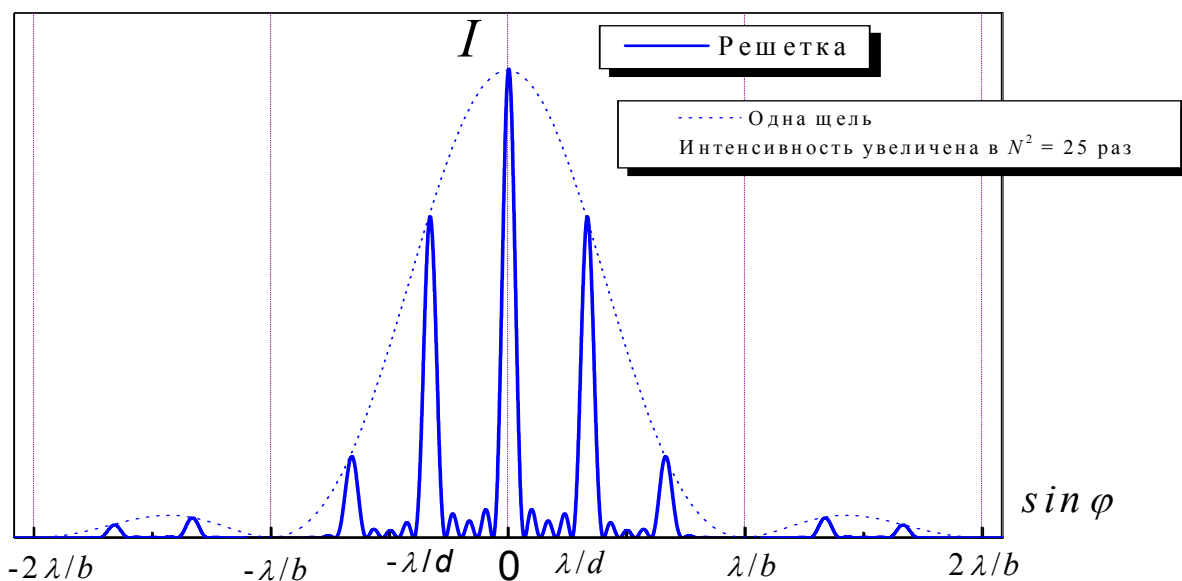


Рис.4.23. Решётка содержит $N = 5$ щелей; $d = 3b$.

Проще всего определить угловое положение так называемых “главных минимумов” – они будут там же, где расположены минимумы в случае дифракции на одной щели:

$$b \sin \varphi = \pm m' \lambda, \quad m' = 1, 2, \dots \quad (4.25)$$

Действительно, интенсивность светового потока, испускаемого каждой щелью по этим направлениям (задаваемым углом φ) равна нулю, значит, будет наблюдаться минимум и от всей решётки. Здесь по причинам, которые станут понятными несколько позже, для обозначения порядка дифракции вместо m используется обозначение m' . Обратим внимание, что в центре дифракционной картины, как и в случае одной щели, наблюдается максимум интенсивности, поэтому $m' \neq 0$.

Чтобы определить другие особенности дифракционной картины, разобьём, как обычно, волновой фронт в каждой щели на много вторичных источников ($i = 1, 2, \dots, n$). Для того чтобы найти интенсивность колебаний в произвольной точке экрана, необходимо провести сложение колебаний в данной точке, возбуждённых волнами, пришедшими от всех вторичных источников, расположенных во всех щелях.

Сложим сначала колебания от вторичных источников каждой щели по отдельности и результат сложения изобразим в виде векторов $\vec{E}_1, \vec{E}_2, \dots, \vec{E}_N$. В тех точках экрана, для которых разность хода между любыми “эквивалентными” лучами, идущими от разных щелей (см. лучи 1 и 1', n и n' на рис.4.22), кратна длине волны λ , изображаемые векторами $\vec{E}_1, \vec{E}_2, \dots, \vec{E}_N$ колебания происходят в одной фазе. На векторной диаграмме

все эти векторы выстраиваются вдоль одной прямой, амплитуда результирующего колебания равна сумме длин этих векторов:

$$\vec{E}_0 = N\vec{E}_1 = N\vec{E}_2 = \dots = N\vec{E}_N.$$

Это – так называемые «*главные максимумы*». Их интенсивность значительно (\sim в N^2 раз) превышает интенсивность максимумов при дифракции на одной щели. Запишем условие, определяющее угловое положение главных максимумов:

$$d \sin \varphi = \pm m \lambda, \quad m = 0, 1, 2, \dots \quad (4.26)$$

Число m – порядок главного максимума. Поскольку угол дифракции, очевидно, не может превышать 90° , число m не может превышать d/λ .

Наибольшая интенсивность будет наблюдаться для центрального максимума ($m = 0$), так как по мере удаления от центра дифракционной картины амплитуды векторов $\vec{E}_1, \vec{E}_2, \dots, \vec{E}_N$ будут уменьшаться (см. рис.4.16,в – длина вектора \vec{E}_φ уменьшается с ростом φ). Соответственно, интенсивность “боковых” максимумов будет тем меньше, чем дальше они расположены от центра.

Так как полная энергия света, проходящего через решетку, пропорциональна числу щелей N , а интенсивность главных максимумов пропорциональна N^2 , ясно, что ширина главных максимумов должна быть обратно пропорциональной числу щелей (несколько позже это будет доказано более строго).

Между любыми соседними главными максимумами регистрируются *дополнительные максимумы и минимумы*. Интенсивность дополнительных максимумов очень мала, однако именно положение дополнительных минимумов, ближайших к

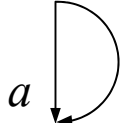
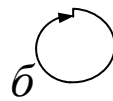
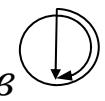
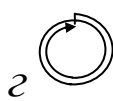
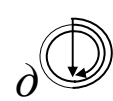
главному максимуму, определяет ширину последних. Дополнительные минимумы возникают тогда, когда разность хода между “эквивалентными” лучами, идущими от “первой” и “последней” щелей, кратна длине волны λ :

$$Nd \sin \varphi = \pm m_1 \lambda, \quad m_1 = 1, 2, \dots, N-1, N+1, \dots^*) \quad (4.26)$$

В этих местах изображаемые векторами \vec{E}_1 и \vec{E}_N колебания происходят в одной фазе – на векторной диаграмме векторы $\vec{E}_1, \vec{E}_2, \dots, \vec{E}_N$ от всех щелей выстраиваются в замкнутую ломаную линию (“почти окружность” или “спираль”) – амплитуда результирующего колебания почти нулевая.

В таблице 4.2 представлены векторные диаграммы для нескольких дополнительных минимумов и максимумов в центральной части дифракционной картины.

Таблица 4.2.

$\sin \varphi$	$\lambda/2Nd$	λ/Nd	$3\lambda/2Nd$	$2\lambda/Nd$	$5\lambda/2Nd$
классификация	плечо нулевого максимума	первый доп. минимум	первый доп. максимум	второй доп. минимум	второй доп. максимум
векторные диаграммы					

Оценить ширину главных максимумов проще всего на примере центрального (максимума “нулевого порядка”). Его ширина ограничивается положениями первых дополнительных минимумов ($m_1 = 1$) – из соотношения (4.26) следует, что она пропорциональна $1/N$:

$$\sin \varphi_1 = \pm \lambda/Nd, \quad (4.27)$$

*) Там где $m_1 = N, 2N, 3N, \dots$ наблюдаются главные максимумы!

Обратим внимание, что между любыми двумя главными максимумами расположено $N - 1$ дополнительных минимумов. На представленной на рис.4.23 дифракционной картине между соседними главными максимумами располагаются по четыре дополнительных минимума. Это характерно для решётки, состоящей из пяти одинаковых щелей. Поскольку период решётки d может быть кратен ширине щели b (в данном случае $d = 3b$) на месте некоторых главных максимумов наблюдаются минимумы:

$$\sin\varphi = \pm 3\lambda/d, \pm 6\lambda/d, \dots$$

Между дополнительными минимумами располагаются дополнительные максимумы. Общее условие наблюдения дополнительных максимумов:

$$Nd\sin\varphi = \pm (m'_1 + 1/2)\lambda, \quad m'_1 = 1, 2, \dots, N-2, N+2, \dots \quad (4.28)$$

Таким образом, между соседними главными максимумами располагается также $N - 2$ дополнительных максимумов. Для дифракционной решётки, состоящей из пяти щелей, число дополнительных максимумов между двумя главными равно трём – см. рис.4.23. Как мы уже отмечали, интенсивность дополнительных максимумов для дифракционной решётки с большим числом щелей чрезвычайно мала, поэтому соотношение (4.28) представляет скорее “академический” интерес.

В заключение этого параграфа сделаем несколько замечаний.

1. Почти вся энергия света, проходящего через решётку, сосредоточена в области центрального максимума дифракционной картины от одной щели – см. рис.4.23 (т.е. наиболее важная часть дифракционной картины ограничена углами $\pm \arcsin \frac{\lambda}{b}$).

2. С увеличением числа щелей интенсивность главных максимумов растёт пропорционально N^2 , ширина максимумов уменьшается обратно пропорционально N .

3. Положение главных максимумов (кроме центрального) зависит от длины волны света λ , поэтому максимумы для разных длин волн будут расположены в разных местах экрана. Следовательно, дифракционная решётка является спектральным аппаратом.

4. Проведённое выше рассмотрение легко может быть распространено на случай наклонного падения лучей света на решётку. Из рис.4.24 видно, что в этом случае дифракционная

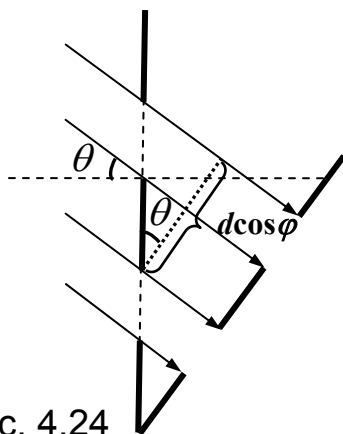


Рис. 4.24

картина будет приблизительно такой же, как при нормальном падении на решётку с периодом $d_1 = d \cos \theta$, где θ – угол падения лучей света на дифракционную решётку с периодом d . Дифракционные картины от решёток I и II на рис.4.24 будут практически идентичными при выполнении условия $d \gg \lambda$.

§ 6. Характеристики дифракционной решётки как спектрального аппарата

1. Свободная спектральная область

Если на дифракционную решётку падает немонахроматический свет, то разным длинам волн будут соответствовать различные положения главных дифракционных максимумов. Если при этом спектральный состав падающего излучения достаточно широкий, возможно частичное перекрытие спектров

соседних порядков ($m-1$ и m , m и $m+1$).

Свободной спектральной областью спектра m -го порядка называется та область спектра, которая не накладывается на спектры соседних порядков. Оценим протяженность

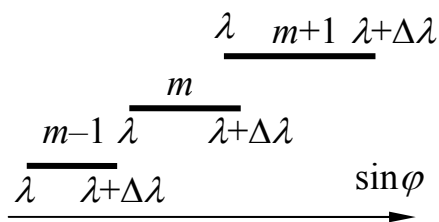


Рис. 4.25

свободной спектральной области $\Delta \lambda_c$. Для излучения с длиной волны λ положение максимума m -го порядка определяется условием (4.24). На рис.4.25 условно показаны области спектров соседних порядков на оси $\sin \varphi$. Очевидно, условия отсутствия наложения спектров $m-1$ и $m+1$ порядков на интересующий нас спектр m -го порядка таковы:

$$(m-1)(\lambda + \Delta \lambda) < m\lambda, \text{ т.е. } \Delta \lambda < \frac{\lambda}{m-1}. \quad (4.29)$$

$$m(\lambda + \Delta \lambda) < (m+1)\lambda, \text{ т.е. } \Delta \lambda < \frac{\lambda}{m}. \quad (4.30)$$

Условие (4.30) является более жёстким, чем (4.29); это естественно, так как чем выше порядок спектра, тем больше спектр “растянут”. В итоге получаем из условия (4.30) искомую протяженность свободной спектральной области для спектра m -го порядка:

$$\Delta \lambda_c = \frac{\lambda}{m}. \quad (4.31)$$

Итак, чем выше порядок спектра, тем уже свободная спектральная область.

2. Угловая дисперсия D_φ спектрального аппарата характеризует угловое расстояние между спектральными линиями. По определению она равна

$$D_\varphi = \frac{d\varphi}{d\lambda}, \quad (4.32)$$

т.е. отношению изменения направления ($d\varphi$) на главный максимум дифракции при малом изменении длины волны падающего света к величине этого изменения $d\lambda$.

Чтобы найти угловую дисперсию для дифракционной решётки, продифференцируем условие главного максимума (4.24):

$$d \cos \varphi \, d\varphi = m \, d\lambda. \quad (4.33)$$

Из (4.33) следует, что угловая дисперсия в спектре m -го порядка:

$$D_\varphi = \frac{m}{d \cos \varphi}. \quad (4.34)$$

При небольших углах дифракции $\cos \varphi \approx 1$ и можно использовать упрощённое соотношение:

$$D_\varphi \cong \frac{m}{d}. \quad (4.34, a)$$

Угловая дисперсия тем больше, чем больше порядок спектра и меньше период дифракционной решётки.

3. Линейная дисперсия D_x характеризует линейное расстояние между спектральными линиями (например, на фотоплёнке).

При малых углах дифракции можно пользоваться упрощённым соотношением $dx \approx F \, d\varphi$, откуда следует, что

$$D_x \approx F \cdot D_\varphi. \quad (4.35)$$

4. Разрешающая способность (разрешающая сила)

Способность спектрального аппарата к разложению света на монохроматические компоненты определяется не только дисперсией, но также шириной и формой дифракционных максимумов. Соответствующая характеристика спектрального аппарата называется *разрешающей способностью* спектрального аппарата. Она равна отношению длины волны λ , на которой проводятся измерения, к минимальной разрешаемой данным аппаратом разнице в длинах волн $\delta\lambda_{min}$:

$$R = \frac{\lambda}{\delta\lambda_{min}}. \quad (4.36)$$

На рис.4.26 показано угловое распределение интенсивности для двух спектрально близких линий 1 и 2. Линии воспринимаются отдельно, если на кривой результирующей интенсивности (сплошная линия на рис.4.26,а) между максимумами наблюдается “провал” интенсивности. Согласно критерию Рэля, две близкие спектральные линии λ и $\lambda + \delta\lambda$ ещё можно разрешить, если минимум одной из них совпадает с максимумом другой – см. рис.4.26,а. Конечно, разрешение будет улучшаться по мере

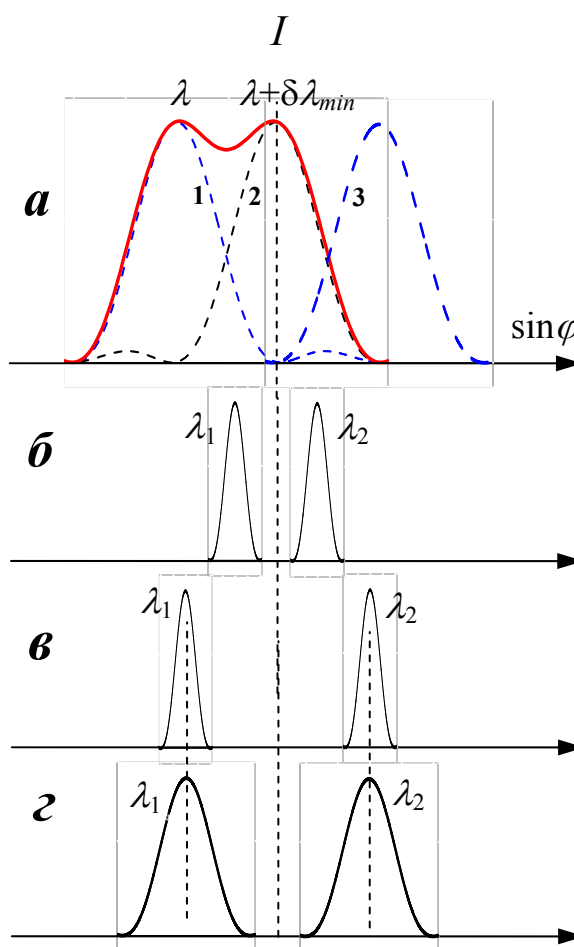


Рис.4.26

удаления максимумов друг от друга (линии 1 и 3 на рисунке). Если линии расположены ближе друг к другу, чем линии 1 и 2 на рис.4.26,*a*, то они, в соответствии с критерием Рэлея, разрешены не будут.

С учётом соотношений (4.24, 4.25) условие совпадения границы максимума (первого побочного минимума) для длины волны λ с максимумом для длины волны $\lambda + \delta\lambda$ в спектре m -порядка можно записать так:

$$d \sin \varphi = (m + 1/N)\lambda . \quad (4.37)$$

$$d \sin \varphi = m(\lambda + \delta\lambda_{\min}) . \quad (4.38)$$

Отсюда получаем, что

$$\delta\lambda_{\min} = \frac{\lambda}{mN} , \quad (4.39)$$

а разрешающая способность равна:

$$R = mN . \quad (4.40)$$

Таким образом, разрешающая способность дифракционной решётки пропорциональна числу щелей и порядку интерференции m .

Необходимо, однако, иметь в виду, что бесконечно увеличивать число щелей (и, следовательно, общую ширину решётки) нельзя, так как при больших размерах решётки может нарушиться одно из условий когерентности волн от удалённых друг от друга щелей (см. гл. 3, §3).

На рис.4.26,*б-г* представлены положения максимумов близких спектральных линий при дифракции на решётках, отличающихся по величине дисперсии D и разрешающей способности R . Решётки *б* и *в* обладают одинаковой разрешающей способностью, но различной дисперсией. Решетки *в* и *г*, напротив, характеризуются одинаковой дисперсией, но различной разрешающей способностью.

Заметим в заключение, что дифракционные решётки рассмотренного выше типа редко используются в реальных современных спектрофотометрах. Для таких решёток, как мы видели, наибольшая интенсивность света приходится на центральный ахроматический (“белый”) максимум нулевого порядка, а спектры более высоких порядков малоинтенсивны. Для исправления этого недостатка обычно используются т.н. «фазовые» дифракционные решётки, позволяющие перераспределить энергию дифрагировавшего светового потока в пользу спектров более высоких порядков, за счёт ослабления остальных. Чаще всего используется решётка типа «эшелетт» – отражательная решётка со “штрихами” треугольного асимметричного профиля – см. рис.4.27. Такие решётки позволяют концентрировать в одном спектре (обычно только “правого” или “левого” 1-го порядка) до 70% падающего света – светосила этих приборов резко возрастает.

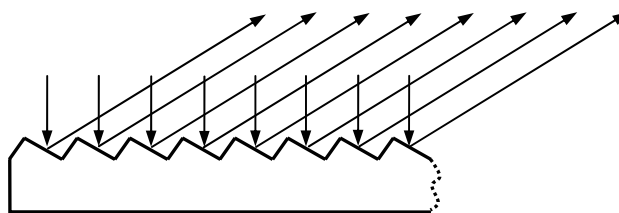


Рис.4.27

В главе 6 мы обсудим также принципиальные основы другого современного способа анализа спектрального состава света без использования таких дисперирующих элементов как решётка и призма. Речь пойдет о принципах Фурье-спектроскопии.

ГЛАВА V. ПОЛЯРИЗАЦИЯ ВОЛН

§ 1. Типы поляризации волн

В общем случае поляризация волн состоит в нарушении симметрии распределения возмущений относительно направления распространения волны. Для продольных волн такое нарушение симметрии невозможно, поэтому *продольные волны не бывают поляризованными*. Любые поперечные волны (как упругие – в твёрдом теле, так и электромагнитные) могут быть поляризованными. В дальнейшем мы ограничимся обсуждением явлений, связанных с поляризацией световых волн, ввиду их большой практической важности.

До сих пор при рассмотрении явлений интерференции и дифракции света мы не акцентировали внимание на том, что электромагнитные волны – поперечные. Теперь мы будем рассматривать ситуации, когда это имеет принципиальное значение.

Свет называется поляризованным, если направление колебаний вектора напряжённости электрического поля (“световой вектор”) сохраняется неизменным или меняется закономерным образом.

Различают несколько типов поляризации световых волн.

1. Свет называют *плоско (или линейно) поляризованным*, если колебания вектора напряжённости электрического поля происходят в одной плоскости. Пусть свет распространяется вдоль оси Z прямоугольной декартовой системой координат XYZ . На рисунке 5.1 представлена “мгновенная фотография” плоско поляризованной волны. Плоскость, в которой *колеблется вектор напряжённости электрического поля* \vec{E} , принято называть

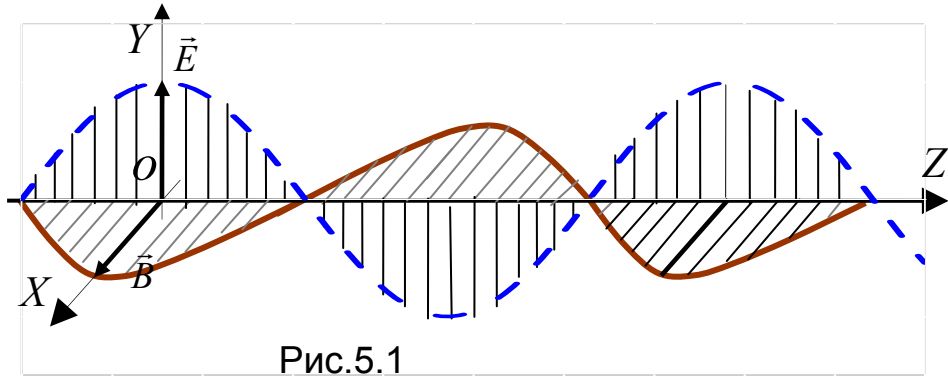


Рис.5.1

наблюдать за вектором \vec{E} в некоторой точке пространства O , то в любой момент времени он окажется ориентированным вдоль одной и той же прямой линии – на рис.5.1 и рис.5.2,*а* это ось OY (отсюда название «*линейная поляризация*»).

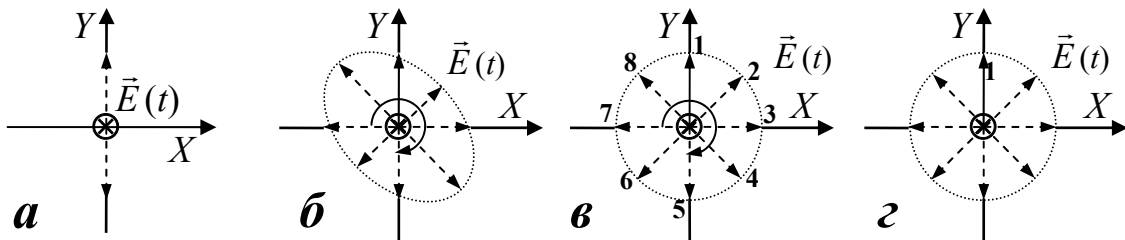


Рис.5.2

2. Свет называется *эллиптически поляризованным*, если конец вектора \vec{E} в последовательные моменты времени описывает эллипс в плоскости XOY – см. рис.5.2,*б*. Поворот вектора происходит с угловой скоростью $\omega = 2\pi c/\lambda$ (c – скорость света). Пространственная “мгновенная фотография” эллиптически поляризованной волны представляет собой “винтовую лестницу” с эллиптическим сечением – рис.5.3. С

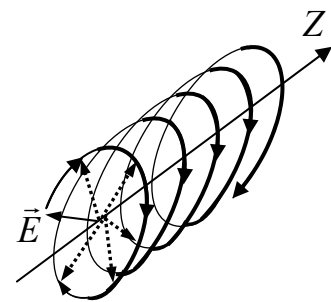


Рис.5.3

*) Исторически сложилось называть «*плоскостью поляризации*» – плоскость колебаний вектора \vec{B} .

течением времени “эллиптический винт” смещается вдоль оси Z со скоростью c . Различают «правую» и «левую» эллиптические поляризации. Исторически сложилось называть свет «правополяризованным», если для наблюдателя, смотрящего навстречу лучу, вектор \vec{E} вращается по часовой стрелке.

3. Свет называется *циркулярно поляризованным* (или *поляризованным по кругу*), если конец вектора \vec{E} в последовательные моменты времени описывает в плоскости XOY окружность – см. рис.5.2,в. Важно понимать, что в случае эллиптической и циркулярной поляризации вектор меняет свое положение с течением времени очень быстро, но *закономерно*. Для примера на рис.5.2,в показаны 8 последовательных положений вектора \vec{E} в моменты времени, отличающиеся на равные интервалы Δt .

Поэтому можно сказать, что тип поляризации определяется формой траектории, которую описывает конец вектора напряжённости в неподвижной плоскости, перпендикулярной направлению распространения света.

4. Световые волны, испускаемые обычными источниками света, не имеют какого-либо выделенного направления колебаний вектора напряжённости электрического поля; такой свет принято называть *естественным*. Вектор \vec{E} очень быстро и *беспорядочно* меняет свое направление в плоскости XOY (волна поперечна!) – рис.5.2,г. Если в некоторый момент времени t вектор \vec{E} занимает положение 1, указанное на рисунке, то в следующий момент времени $t+\Delta t$ он с *равной вероятностью* может оказаться в одном из положений показанных на рисунке пунктиром. Такой свет можно считать совокупностью огромного

количества плоскополяризованных электромагнитных волн со всеми возможными ориентациями плоскостей колебаний.

Обсудим теперь способы получения поляризованного света. Некоторые вещества сразу излучают поляризованный свет при люминесценции (например, сернистый цинк, некоторые молекулярные кристаллы). Однако в большинстве случаев источники света испускают неполяризованные волны («естественный» свет). В следующем параграфе мы рассмотрим явления, позволяющие создавать специальные устройства для получения поляризованного света из естественного – «поляризаторы».

§ 2. Поляризация волн при избирательном поглощении

Один из способов получения поляризованных волн – пропускание неполяризованных волн через среду, характеризующуюся анизотропными свойствами, в частности, *зависимостью поглощения волн от плоскости колебаний в проходящей волне*. Наглядный пример такой анизотропии для распространяющейся по натянутому шнуру поперечной упругой волны показан на

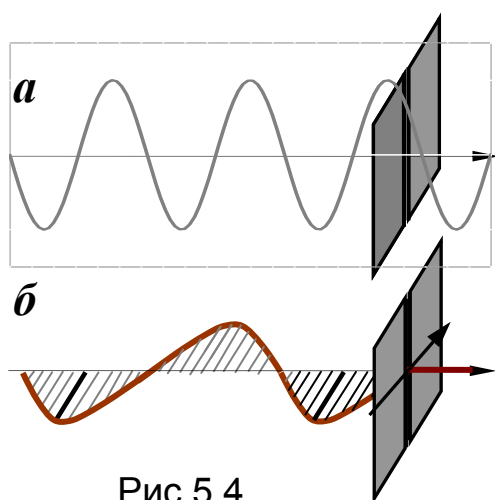


Рис.5.4

рис.5.4 – волна без помех проходит через щель в преграде, ориентированную параллельно плоскости колебаний шнура (а), но полностью поглощается “средой”, если плоскость колебаний перпендикулярна щели (б).

В общем случае при распространении волны через

поглощающую среду амплитуда колебаний убывает с расстоянием по экспоненциальному закону (см. для плоской волны с затуханием равенство (2.13)). Следовательно, интенсивность волны также экспоненциально падает при прохождении волны через поглощающую среду:

$$I(x) = I_0 e^{-\alpha x}. \quad (5.1)$$

Постоянная α называется показателем поглощения. Величина α зависит от длины волны, и эта зависимость $\alpha(\lambda)$ называется спектром поглощения вещества.

Соотношение (5.1) в применении к световым волнам называется *законом Бугера–Ламберта*. Этот закон был экспериментально установлен Бугером и теоретически выведен Ламбертом в XVIII в. Для вывода соотношения (5.1) Ламбертом было сделано вполне естественное допущение о том, что относительное изменение интенсивности волны на малом участке пути dx в поглощающей среде не зависит от интенсивности и пропорционально длине этого участка:

$$\frac{dI}{I(x)} = -\alpha dx. \quad (5.2)$$

Легко убедиться, что отсюда следует соотношение (5.1).

Если свет поглощается атомами или молекулами некоторого “активного” вещества в растворе, причём сам растворитель не поглощает в исследуемой спектральной области, то показатель поглощения раствора, как правило, оказывается пропорциональным концентрации “активного” вещества $\alpha = \alpha_0 C$ (здесь C – концентрация, α_0 – коэффициент, не зависящий от концентрации). Последнее утверждение по существу означает, что *поглощающая способность молекулы “активного” вещества не зависит от присутствия рядом других молекул и называется законом Бера*.

Комбинация закона (5.1) с законом Бера носит название закона *Бугера–Ламберта–Бера*. Использование этого закона позволяет в ряде случаев оперативно измерять и регулировать концентрацию исследуемого вещества в растворе путем измерения поглощения в определенной спектральной области.

Вернёмся к вопросу о получении поляризованного света. Если вещество, через которое проходит свет, анизотропно, то показатель поглощения может зависеть от ориентации вектора напряжённости электрического поля \vec{E} . Вещества, обладающие такой анизотропией, называются поляризующими^{*)}. В частности, таким свойством обладают природные и синтетические кристаллы турмалина – алюмосиликата, содержащего бор. Однако значительно более широкое применение в оптике в качестве поляризующих сред нашли органические пленки полимеров, длинные молекулы которых ориентированы преимущественно в одном направлении (это достигается специальными технологическими приёмами – например, растяжением плёнки в процессе её формирования). Поляризующие плёнки (т.н. «поляроиды»), изготовленные на основе поливинилового спирта или поливинилена, при типичной толщине в доли миллиметра пропускают только световые волны, *плоскость колебаний* которых перпендикулярна полимерным цепям.

Идеальным поляризатором принято называть устройство, которое пропускает 100% энергии световых волн, если плоскость колебаний вектора \vec{E} параллельна так называемой «главной

^{*)} А само это свойство называется «дихроизмом» вещества.

плоскости поляризатора», и совсем не пропускает те волны, в которых колебания \vec{E} перпендикулярны этой плоскости.

Пусть на идеальный поляризатор падает световая волна с плоскостью колебаний, составляющей угол φ с главной плоскостью поляризатора – рис.5.5. На этом рисунке символом \otimes

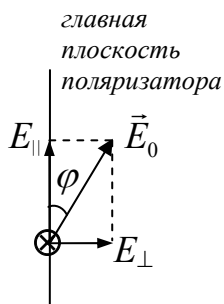


Рис. 5.5

показано направление распространения света – перпендикулярно плоскости рисунка (и поверхности поляроида) “от нас”. Векторы напряжённости электрического поля можно разложить на две составляющие – параллельную главной плоскости поляризатора и перпендикулярную к ней с амплитудами $E_{||} =$

$E_0 \cos \varphi$ и $E_{\perp} = E_0 \sin \varphi$. Через поляризатор пройдёт

только первая составляющая. Отсюда следует, что интенсивность прошедшего через поляризатор света связана с интенсивностью падающего света I_0 простым соотношением, которое носит название *закона Малюса*^{*)}:

$$I = I_0 \cos^2 \varphi. \quad (5.3)$$

После прохождения идеального поляризатора световая волна становится *плоскополяризованной*.

Для реальных поляризаторов коэффициенты пропускания (отношения интенсивностей прошедшего через поляризатор и падающего на него света) для составляющих, параллельных и перпендикулярных главной плоскости поляризатора, отличаются от единицы и от нуля, соответственно ($\alpha_1 < 1$, $\alpha_2 > 0$). Конечно, для хорошего поляризатора всегда $\alpha_1 \gg \alpha_2$. Свет, прошедший через реальный поляризатор, является частично поляризованным.

^{*)} Закон установлен в 1810 г. французским физиком Малю’.

Световой поток можно считать состоящим из плоскополяризованного и естественного (неполяризованного). Такой свет принято количественно характеризовать степенью поляризации P :

$$P = \frac{I_{\max} - I_{\min}}{I_{\max} + I_{\min}}. \quad (5.4)$$

В соотношении (5.4) I_{\max} и I_{\min} – максимальная и минимальная интенсивности света, которые регистрируются (см. рис.5.5) при вращении идеального поляризатора $ИП$ вокруг луча 1 частично поляризованного света, вышедшего из реального поляроида $П$. (Подчеркнём, что этот эксперимент с идеальным поляроидом часто можно провести “мысленно”).

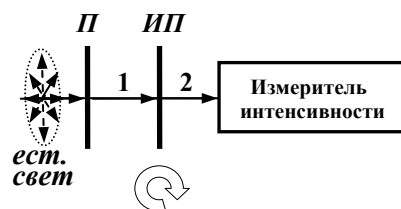


Рис. 5.5

Если луч 1 является *полностью* плоско поляризованным, то при вращении $ИП$ («анализатора») мы получим $I_{\max} = I_0$, а $I_{\min} = 0$ и, следовательно, степень поляризации $P = 1$ (см. формулу (5.4)). При анализе *естественного* (неполяризованного) света (если вместо поляроида $П$ по ошибке поставили обычное стекло) получим $P = 0$.

§ 3. Поляризация волн при отражении и рассеянии света

В рассмотренном выше случае поляризация света достигалась при прохождении света через анизотропную среду. Однако возникновение поляризованных волн возможно также в результате отражения и преломления на границе раздела двух изотропных прозрачных диэлектриков, а также и при рассеянии света. Отражённая, преломленная и рассеянная волны –

результат излучения атомов и молекул той среды, от которой происходит отражение или рассеяние. Излучающим элементом возбуждённой падающей волной среды является колеблющийся с частотой возбуждающего воздействия диполь – в первом приближении таким диполем можно считать систему электрон + атомный остов (наиболее подвижен в таком диполе электрон). Поэтому для понимания основных особенностей поляризации волн при их отражении, преломлении и рассеянии рассмотрим сначала некоторые закономерности излучения диполя.

1. Излучение диполя

Движущийся относительно положительно заряженного атомного остова электрон можно рассматривать как элемент тока. Согласно закону Био–Савара–Лапласа, магнитное поле такого элемента тока равно:

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I[d\vec{l}, \vec{r}]}{r^3}, \quad (5.5)$$

(здесь $d\vec{l}$ – длина элемента тока, \vec{r} – радиус-вектор, проведённый от элемента тока до точки A , в которой определяется индукция магнитного поля $d\vec{B}$) – см. рис.5.6.

Для нашего качественного анализа существенно, что создаваемое диполем в некоторой точке магнитное поле пропорционально величине силы тока и синусу угла между

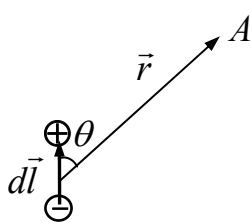


Рис.5.6

векторами $d\vec{l}$ и \vec{r} (θ на рис.5.6). Обозначая смещение электрона относительно положения равновесия через ξ и, учитывая, что ток пропорционален скорости движения заряженной

частицы $\dot{\xi}$, имеем:

$$dB \sim \dot{\xi} \cdot \sin \theta. \quad (5.6)$$

Поскольку при колебательном движении скорость электрона зависит от времени, индукция магнитного поля в рассматриваемой точке также изменяется со временем. Из закона электромагнитной индукции (см. (2.46)) следует, что изменяющееся магнитное поле вызовет появление электрического поля, причём напряжённость этого “индуцированного” поля пропорциональна скорости изменения магнитного поля:

$$E \sim \frac{\partial B}{\partial t} \sim \ddot{\xi} \cdot \sin \theta. \quad (5.7)$$

Очевидно, что изменение электрического поля приведёт, в соответствии с соотношением (2.47), к возникновению магнитного поля и т.д. Таким образом, *колеблющийся диполь будет источником электромагнитных волн*, интенсивность которых в данной точке пространства пропорциональна квадрату напряжённости электрического поля (5.7):

$$I \sim E^2 \sim \ddot{\xi}^2 \cdot \sin^2 \theta \sim \omega^4 \cdot \sin^2 \theta. \quad (5.8)$$

В соотношении (5.8) учтено, что ускорение колеблющегося по гармоническому закону электрона пропорционально квадрату частоты колебаний ω (см. (1.48)).

На рис.5.7 изображена «*диаграмма направленности*» излучения диполя (зависимость интенсивности волн от направления излучения θ) в плоскости рисунка. Как следует из соотношения (5.8), интенсивность волн, испускаемых в произвольном направлении, пропорциональна $\sin^2 \theta$. Трёхмерная

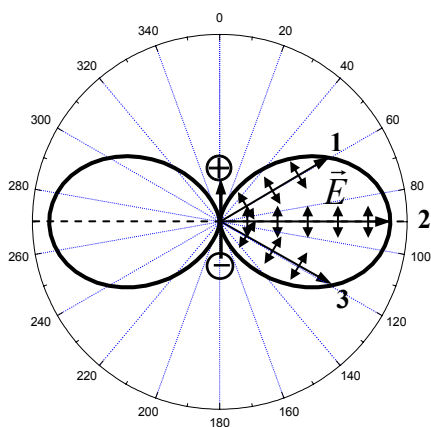


Рис.5.7

диаграмма направленности излучения диполя может быть получена вращением рис.5.7 относительно оси диполя – она имеет вид деформированного тороида. Как видим, диполь вообще не излучает в направлении своей оси, максимальная интенсивность регистрируется для волн, испускаемых по нормали к оси диполя.

Из приведённых рассуждений следует, что вектор индукции магнитного поля волны, распространяющейся от диполя, в точке A на рис.5.6 направлен перпендикулярно чертежу – см. соотношение (5.5). Так как в электромагнитной волне вектор \vec{E} всегда перпендикулярен вектору \vec{B} , мы приходим к выводу: излучение диполя является плоскополяризованным, причём плоскость колебаний испускаемых диполем волн совпадает с плоскостью, в которой лежат ось диполя и направление распространения излучаемых им волн. Можно сказать, что в испускаемой диполем электромагнитной волне вектор напряжённости электрического поля колеблется в той же плоскости, что и электрические заряды самого диполя (см., например, лучи 1, 2 и 3 на рис.5.7).

2. Поляризация при рассеянии

При прохождении света через вещество возбуждаются вынужденные колебания электронов в атомах или молекулах, из которых это вещество состоит. Каждый возбуждённый атом (или молекула) становится элементарным излучателем – диполем, испускающим “вторичные” электромагнитные волны в

соответствии с диаграммой направленности, показанной на рис.5.7. Из-за того, что диаграмма направленности каждого элементарного излучателя широкая, направление распространения вторичных волн может сильно отличаться от направления распространения исходной (возбуждающей) волны. Поэтому в результате взаимодействия пучка света со средой может происходить уход части энергии волн в стороны – то есть *свет может рассеиваться средой*.

Прежде всего, обсудим состояние поляризации рассеянного света. Предположим, что пучок параллельных лучей *естественного* (неполяризованного) света распространяется в рассеивающей среде по оси OX – см. рис.5.8. В плоскости, перпендикулярной направлению распространения (YOZ) “световой вектор” \vec{E} , как мы помним, может быть ориентирован произвольным образом (см. рис.). Однако его всегда можно представить как совокупность составляющих \vec{E}_y и \vec{E}_z . Также ориентированы и дипольные излучатели вторичных волн. Будем регистрировать вторичные волны, распространяющиеся перпендикулярно к направлению распространения исходного пучка. Свет, рассеянный под прямым углом к исходному пучку, оказывается плоско поляризованным. Например, для вторичных волн, распространяющихся по оси OY , вклад в излучение дают лишь диполи, ориентированные по оси Z . Нетрудно понять, что при рассеянии *естественного*

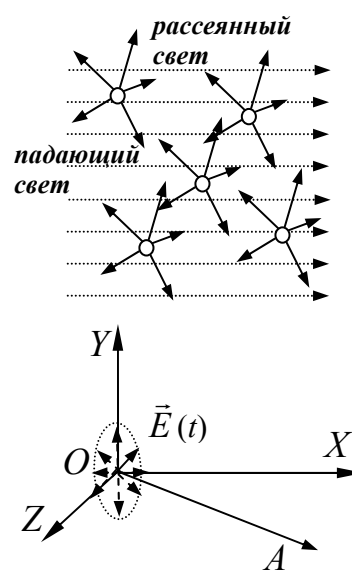


Рис.5.8

света интенсивность рассеянного по нормали к исходному пучку ¹падающего света не будет зависеть от ориентации этой нормали в пространстве (например, будет одинакова для осей OY и OZ).

Если ^{рассеянный свет}первичный пучок света *плоско поляризован*, то дипольные моменты всех элементарных вторичных излучателей ориентированы одинаково (по направлению \vec{E} в исходном пучке) и, следовательно, излучение вторичных волн происходит несимметрично относительно направления OX . Например, если плоскость колебаний падающего света YOX , то по оси OY ни один вторичный элементарный излучатель вообще не испускает электромагнитных волн, тогда как интенсивность излучения по оси OZ максимальна (см. диаграмму направленности на рис.5.7).

Вторичные волны, распространяющиеся в произвольном направлении (например, по оси OA на рис.5.8), плоско поляризованы частично, если исходный световой пучок не имеет преимущественной плоскости поляризации, и, конечно, полностью плоско поляризованы, если падающий на вещество свет плоско поляризован.

- Обсудим теперь *зависимость интенсивности рассеянного света от частоты ω* (или длины волны λ).

Если среда, в которой распространяется свет, однородна, и расстояние между соседними элементарными излучателями (атомами или молекулами) много меньше длины волны света, то любому элементарному излучателю (например, 1 на рис.5.9) будет соответствовать другой такой же излучатель 2, отличающийся от первого только тем, что расположен ближе к наблюдателю на расстоянии $\lambda/2$. Вторичные волны, приходящие от двух излучателей к наблюдателю, возбуждают противофазные

колебания и поэтому взаимно компенсируются (в этом случае говорят о «*деструктивной интерференции*»). В результате интерференции волн от всех подобных вторичных источников (т.е. от огромного числа пар элементарных источников) интенсивность рассеянной волны оказывается близкой к нулю.

Если же вещество, через которое проходит свет, неоднородно, различные элементарные рассеиватели не идентичны и в результате интерференции вторичных волн возникает рассеянная волна конечной интенсивности.

В частности, если рассеивающая среда состоит из мелких частиц, размеры которых D много меньше длины световой волны $D \ll 0,5 \text{ мкм}$, а расстояние между частицами $r > \lambda$, то каждая такая частица из-за малого размера излучает вторичные волны почти так же, как элементарный дипольный излучатель. С другой стороны, из-за большого среднего расстояния между частицами деструктивная интерференция вторичных волн отсутствует. В этом случае зависимость интенсивности рассеянного света от частоты ω или длины волны λ определяется закономерностями излучения вторичных волн элементарного диполя (см. соотношение (5.8)):

$$I_{\text{расс.}} \sim \omega^4 \sim 1/\lambda^4. \quad (5.9)$$

Зависимость (5.9) называется *законом Рэлея*, а соответствующее рассеяние – «рэлеевским». Имеется два характерных типа сред, в которых наблюдается рэлеевское рассеяние. Во-первых, это так называемые *мутные среды*: дымы (частицы твёрдого вещества в газе), туманы (мелкие капельки жидкости в газе),

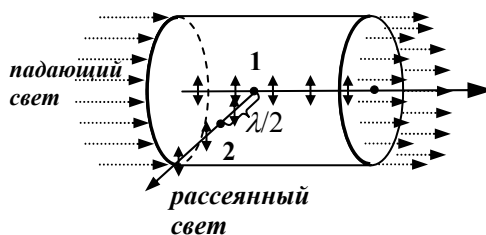


Рис.5.9

суспензии и взвеси (частицы твёрдого вещества в жидкости), эмульсии (капельки одной жидкости в другой). Во-вторых, неоднородность среды (жидкости или газа) может возникать из-за случайных флуктуаций плотности вещества в результате хаотического теплового движения атомов или молекул. Рассеяние в средах второго типа принято называть *молекулярным*. Именно молекулярным рассеянием объясняется голубой цвет неба и красный цвет зорь. Молекулярное рассеяние в основном происходит в верхних, разреженных слоях атмосферы, где среднее расстояние между молекулами воздуха больше или порядка $\lambda/2$.

Примечания

1. Соотношение (5.9) очень хорошо описывает закономерности рассеяния, если размер рассеивающих частиц меньше $\sim 1/15$ длины световой волны. С увеличением размеров частиц зависимость интенсивности рассеянного света от длины волны становится всё более слабой. Физическая причина этого понятна – с ростом D всё более заметную роль играет деструктивная интерференция, причём, прежде всего она начинает проявляться в рассеянии коротких волн. При рассеянии света на больших частицах ($D \sim \lambda$) интенсивность рассеянного света очень слабо зависит от длины волны. Именно поэтому облака имеют белый цвет (на фоне голубого неба, где рассеяние «рэлеевское»).

Рассеяние света на частицах, размер которых $D \geq \lambda$, теоретически рассмотрено немецким физиком Г.А. Ми, поэтому рассеяние на больших частицах иногда называют *рассеянием Ми*.

2. В тех случаях, когда рассеяние света играет существенную роль, интенсивность “первичного” пучка света убывает, поскольку энергия волн, “уходит” в стороны. Этот эффект отличается от обычного поглощения, и его учитывают введением в соотношение (5.1) дополнительного параметра:

$$I(x) = I_0 e^{-(\alpha - \alpha')x}. \quad (5.10)$$

Постоянная α' , описывающая снижение интенсивности пучка света из-за рассеяния, называется *коэффициентом экстинкции* (от латинского *extinctio* – гашение).

3. При рассеянии света молекулами, наряду с обычным рассеянием без изменения частоты (такое рассеяние называют упругим), в рассеянном свете присутствуют волны, частота которых несколько смещена относительно частоты падающего света ω . Это смещение частоты $\omega \pm \Omega$ обусловлено модуляцией амплитуды рассеянной волны за счет колебательного движения атомов в молекуле (с частотой Ω). Такое рассеяние называется *«комбинационным»* (“неупругим”). Несмотря на весьма небольшую интенсивность неупруго рассеянных волн (часто на много порядков меньше интенсивности рассеянных волн с частотой ω), метод *спектроскопии комбинационного рассеяния света*^{*)} широко применяется в химии для изучения строения молекул и их взаимодействия с окружающей средой. Существенно, что спектры комбинационного рассеяния и поглощения света в инфракрасной области (*ИК-спектроскопия*) взаимно дополняют друг друга, поскольку в поглощении и комбинационном рассеянии проявляются различные колебательные движения молекул.

^{*)} В иностранной научной литературе чаще используется термин «рамановское рассеяние».

3. Поляризация света при отражении

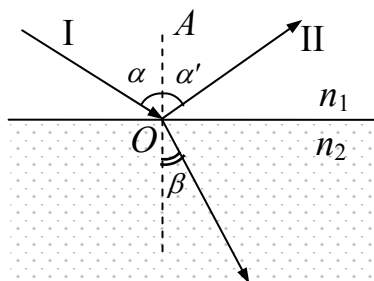


Рис.5.10

Пусть пучок световых волн падает на плоскую границу двух прозрачных диэлектриков, показатели преломления которых n_1 и n_2 – см. рис.5.10. Обе диэлектрические среды будем считать однородными, так что рассеяние света в объёме диэлектриков отсутствует. Однако граница раздела двух сред сама по себе – неоднородность; излучение элементарных диполей второй среды, расположенных вблизи поверхности раздела обуславливает возникновение отраженной волны II. Напомним, что, в соответствии с законами геометрической оптики, отражённый луч лежит в плоскости падения (т.е. в плоскости, содержащей падающий луч I и нормаль к границе раздела диэлектриков OA); угол падения α равен углу отражения α' .

Пусть падающие световые волны плоско поляризованы, причём плоскость колебаний вектора \vec{E} совпадает с плоскостью падения. Такие волны вызывают колебания электронов в атомах обоих диэлектриков, совпадающие по направлению с \vec{E} . Поэтому ориентация элементарных излучателей–диполей строго фиксирована – все они также лежат в плоскости падения и перпендикулярны соответствующим лучам – см. рис.5.11,*a*.

Отражённая от границы раздела диэлектриков волна II есть результат интерференции волн, испускаемых элементарными излучателями второй среды (вблизи её поверхности). При изменении угла падения α меняется также угол преломления β и,

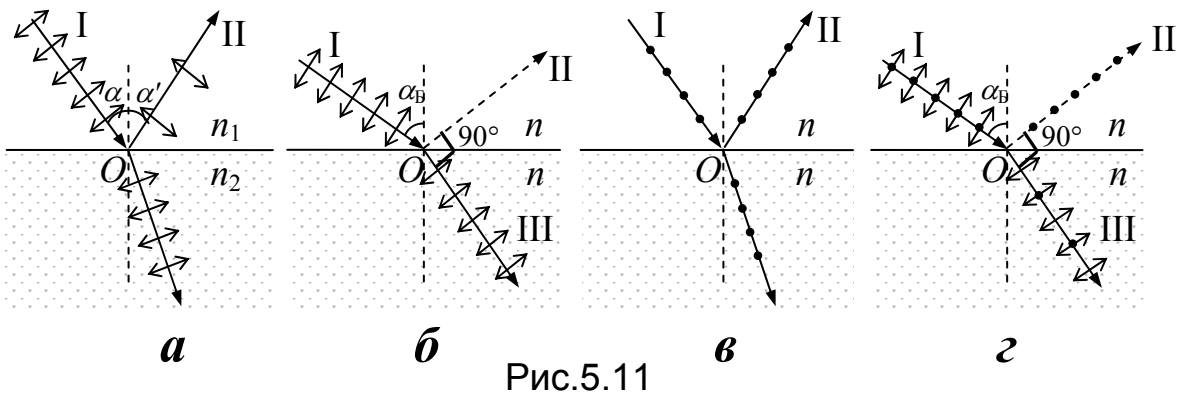


Рис.5.11

соответственно, ориентация возбужденных диполей второго диэлектрика относительно направления отражённого луча II. В частности, при некотором значении угла падения $\alpha = \alpha_B$ (этот угол принято называть «*углом Брюстера*») элементарные излучатели второго диэлектрика будут направлены точно вдоль луча II – рис.5.11,б. При этом излучение вторичных волн по направлению луча II невозможно (см. диаграмму направленности дипольного излучателя – рис.5.7). Отсюда следует, что световая волна, плоскость колебаний которой совпадает с плоскостью падения и, угол падения которой на границу раздела диэлектриков равен углу α_B , вообще не отражается этой границей (интенсивность отраженного луча равна нулю, имеется только преломленный луч III).

Значение угла Брюстера α_B легко найти, используя закон преломления:

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{n_2}{n_1}. \quad (5.11)$$

Учитывая, что $\alpha_B + \beta_B = \pi/2$ (рис.5.11,б), имеем $\sin \beta_B = \sin(\pi/2 - \alpha_B) = \cos \alpha_B$ и из (5.11) получаем:

$$\operatorname{tg} \alpha_B = \frac{n_2}{n_1}. \quad (5.12)$$

Если плоскость колебаний падающего луча I перпендикулярна плоскости падения (рис.5.11,б), то, независимо от величины угла падения α , элементарные излучатели диэлектрика с показателем преломления n_2 , перпендикулярны плоскости падения и отраженному лучу II. Следовательно, интенсивность отражённого луча II для таких волн при любых значениях α отлична от нуля.

Если на границу раздела диэлектриков падает неполяризованный свет, причём угол падения равен углу Брюстера, то в отражённом луче будут присутствовать только волны, плоскость колебаний которых перпендикулярна плоскости падения (т.е. отраженный луч II плоско поляризован). Соответственно, преломленный луч будет частично плоско поляризован (обогащён волнами, плоскость колебаний которых совпадает с плоскостью падения). При произвольной величине угла падения пучка естественного света оба пучка – отражённый, и преломленный – частично плоско поляризованы (в отражённом свете всегда больше волн, плоскость колебаний которых перпендикулярна плоскости падения; в преломленном свете этих волн, соответственно, меньше).

Примечания

1. «Окна Брюстера» в лазерах. В газовых лазерах активное вещество (аргон, смесь гелия и неона, двуокись углерода – в зависимости от типа лазера) помещается в стеклянную трубку с плоскопараллельными торцевыми окнами. Трубка находится между зеркалами, так что выходящий из лазера луч света многократно (~ 100 раз) проходит через окна трубки с активным

веществом. Если окна трубки сделать перпендикулярными к проходящему пучку света (см. рис.5.12,*а*), то при каждом прохождении окна будет теряться на отражение $\sim 8\%$ интенсивности падающего света, а после 100 прохождений исходный пучок ослабится приблизительно в 3000 раз, что совершенно недопустимо для нормального функционирования лазера.

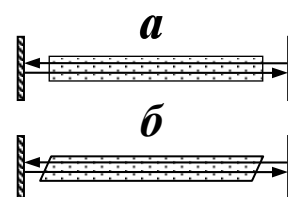


Рис.5.12

Выход из этой, на первый взгляд, тупиковой ситуации состоит в использовании окон, наклонённых по отношению к пучку проходящего света на угол Брюстера (см. рис.5.12,*б*). В результате многократного прохождения через трубку с такими окнами волны, плоскость колебаний которых перпендикулярна плоскости падения (плоскости рисунка), практически полностью потеряются из-за отражений, тогда как волны, с векторами \vec{E} , лежащими в плоскости падения, пройдут через оптическую систему сколько угодно раз почти без потерь на отражение. В итоге интенсивность исходного пучка света уменьшится не в тысячи раз, а всего 2 раза, что вполне приемлемо. Именно из-за такого устройства оптической системы луч света, выходящий из газового лазера, полностью плоско поляризован.

2. Об отражении от поверхности проводника. При отражении света от поверхности проводящего вещества (металла, полупроводника) из-за сильного поглощения в приповерхностном слое этого вещества состояние поляризации отражённого луча изменяется иначе, нежели при отражении от поверхности диэлектрика. В частности, ни при каком значении

угла падения естественного света отраженный свет не будет полностью плоско поляризован (*нет* угла Брюстера). Если свет, падающий на поверхность проводника, плоско поляризован, то отраженный свет в общем случае оказывается поляризованным эллиптически. Характер эллиптической поляризации отраженного пучка чрезвычайно чувствителен к состоянию отражающей поверхности – присутствию на ней тонких диэлектрических плёнок или даже отдельных молекул (до десятых и сотых долей монослоя). На изучении состояния эллиптической поляризации отраженного от поверхности проводников света основан экспериментальный метод, называемый *«эллипсометрией»*, который широко используется для измерения параметров (толщины, показателя преломления) тонких диэлектрических (в частности, окисных) плёнок, нанесённых на поверхности металлов или полупроводников. Метод применяется также и для исследования адсорбционных процессов или химических реакций, происходящих на этих поверхностях.

§ 4. Поляризация при двойном лучепреломлении света

1. Прохождение света через анизотропную среду.

Явление двойного лучепреломления^{*)} состоит в раздвоении светового луча при прохождении через анизотропное вещество (кристалл, анизотропный полимер и т.п.).

Один из лучей подчиняется обычным законам преломления – он называется «обыкновенным лучом». Для второго луча отношение синуса угла падения к синусу угла преломления не остаётся постоянным при изменении угла падения. Даже при

^{*)} Впервые описано Э. Бартоломинусом в 1670 г. для кристалла исландского шпата (CaCO_3).

нормальном падении необыкновенный луч может отклоняться от первоначального направления – см. рис.5.13. Кроме того – необыкновенный луч не лежит, как правило, в одной плоскости с падающим и перпендикуляром к границе раздела сред. **Оба луча**

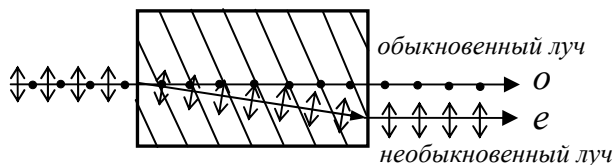


Рис. 5.13

поляризованы во взаимно перпендикулярных плоскостях.

Существует, однако, такое направление внутри кристалла, вдоль которого свет распространяется, не расщепляясь на два луча, – это направление называется *оптической осью*^{**}). Плоскость, содержащая оптическую ось и данный луч, называется *главной плоскостью кристалла* или его *главным сечением*.

Экспериментально обнаружено, что *плоскость колебаний* (\vec{E}) для обыкновенного луча перпендикулярна плоскости соответствующего ему главного сечения, а для необыкновенного она лежит в плоскости главного сечения.

Ранее мы уже отмечали, что в некоторых веществах один из лучей поглощается сильнее другого. Такое свойство называется *дихроизмом*. Это свойство используется для получения поляризованного света.

Двойное лучепреломление наблюдается как при падении на кристалл естественного, так и поляризованного света. Для естественного света, в отсутствие дихроизма, яркость (интенсивность) обыкновенного и необыкновенного лучей одинакова. А вот в случае плоско поляризованного света интенсивности лучей существенно зависят от угла φ между вектором \vec{E} в падающей волне и главной плоскостью кристалла.

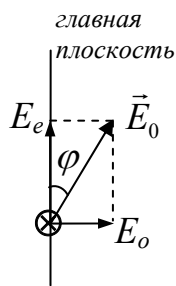


Рис. 5.14

Амплитуды волн для обыкновенного и необыкновенного лучей равны соответственно $E_o = E_0 \sin \varphi$ и $E_e = E_0 \cos \varphi$ (см. рис.5.14) их интенсивности $I_o = I_0 \sin^2 \varphi$ и $I_e = I_0 \cos^2 \varphi$.

2. Природа явления двулучепреломления.

Покажем теперь, как двойное лучепреломление объясняется оптической анизотропией кристалла^{*)}. Эта анизотропия проявляется в том что, *скорость электромагнитных волн с различной ориентацией плоскости колебаний неодинакова для разных направлений их распространения в кристалле.*

Чтобы понять причину этого, рассмотрим в качестве примера кристалл, в котором среднее расстояние между атомами вдоль одной оси (Z на рис.5.15,*a*) больше, чем в перпендикулярных направлениях. Очевидно, что поляризация этого диэлектрического кристалла под действием электрического поля

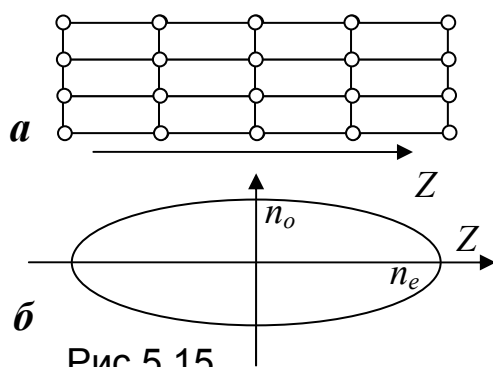


Рис.5.15

будет происходить по разным направлениям неодинаково. В частности, если смещение электронных оболочек атомов при приложении электрического поля вдоль оси Z больше, чем в поперечном направлении, то диэлектрическая проницаемость

максимальны ($n_z \equiv n_e$) – см. рис.5.15. Будем считать, что свойства кристалла в любом перпендикулярном к оси Z направлении

^{*)} Впервые дано Гюйгенсом в «Трактате о свете» в 1690 г.

одинаковы (в этом случае кристалл называется одноосным); соответствующие значения ε_o и n_o минимальны. Смещения электронных оболочек атомов в любом другом направлении можно представить как результат смещения вдоль оси Z и перпендикулярно к этой оси. Следовательно, показатель преломления принимает некое промежуточное между n_o и n_e значение. Можно показать, что в пространстве зависимость показателя преломления от направления электрического поля изображается *эллипсоидом вращения*, вытянутым (в рассматриваемом случае) вдоль оси Z , которая и является *оптической осью* – см. рис.5.15. Необходимо подчеркнуть, что на рис.5.15 представлены зависимости показателя преломления *от направления электрического поля* (а не от направления светового луча!).

В дальнейшем анализе мы будем использовать построения Гюйгенса, поэтому нам необходимо определить теперь вид волновых поверхностей для вторичных волн от точечного источника естественного света O в одноосном кристалле. На рис. 5.16 представлено главное сечение кристалла, в котором находится источник O . Как и ранее, OZ – оптическая ось кристалла. Рассмотрим лучи, распространяющиеся от источника в различных направлениях в этой плоскости.

Пусть волны поляризованы так, что *вектор \vec{E} колеблется перпендикулярно к рассматриваемому главному сечению кристалла*. На рис.5.16,*a* направления, параллельные оптической оси, изображены пунктирными линиями, а направления колебаний вектора \vec{E} отмечены точками. Как видно, эти колебания перпендикулярны к оптической оси для любого из лучей 1, 2, 3 и т.д. Такие волны вызывают поляризацию лишь в

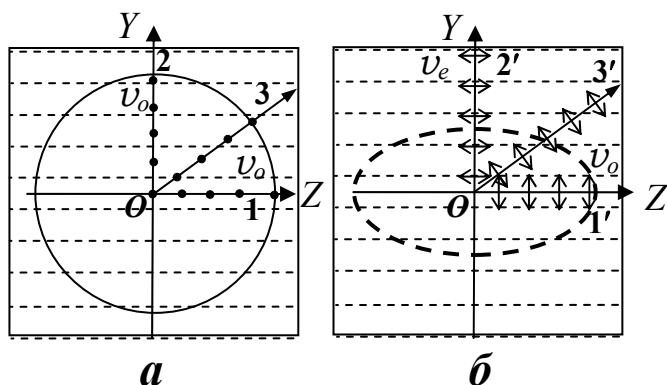


Рис.5.16

перпендикулярных к оптической оси направлениях, которым соответствует одинаковые значения ε_0 и n_0 . Следовательно, они распространяются с одинаковой скоростью v_0 .

Достаточно вспомнить, что по теории Максвелла (см. §5 главы 2), скорость распространения света связана с диэлектрической и магнитной проницаемостью вещества соотношением:

$$v = \frac{c}{n} = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}}.$$

Отсюда мы приходим к выводу: для волн, в которых колебания вектора \vec{E} перпендикулярны к оптической оси кристалла, волновые поверхности – сферические (как в изотропной среде). Эти волны подчиняются обыкновенному закону преломления.

Иная ситуация наблюдается для волн, в которых колебания электрического вектора совершаются в плоскости главного сечения. Как видно из рисунка рис.5.16,б, для различных лучей 1', 2', 3' колебания теперь направлены под разными углами к оптической оси. Например, для направления 1' колебания перпендикулярны оптической оси, а для направления 2' параллельны оптической оси. В первом случае свет распространяется со скоростью v_0 , во втором – эта скорость v_e меньше. В каком-либо ином направлении, скорость распространения будет промежуточной между v_e и v_0 . Таким образом, для волн, в которых колебания электрического

вектора совершаются в плоскости главного сечения, волновая поверхность имеет иную форму, чем в изотропном веществе. Эта форма – эллипсоид вращения, ось которого совпадает с оптической осью кристалла. Сечение такого эллипсоида одной из главных плоскостей изображено пунктирной линией на рис.5.16,б. Лучи, соответствующие такой волновой поверхности, не подчиняются обычному закону преломления – это лучи «необыкновенные».

Для некоторых кристаллов $v_e < v_o$, они называются «положительными» (например, кварц); для других $v_e > v_o$, они называются «отрицательными» (исландский шпат). Общий вид волновых поверхностей для обыкновенных и необыкновенных волн показан на рис.5.17 (а – положительный кристалл, б –

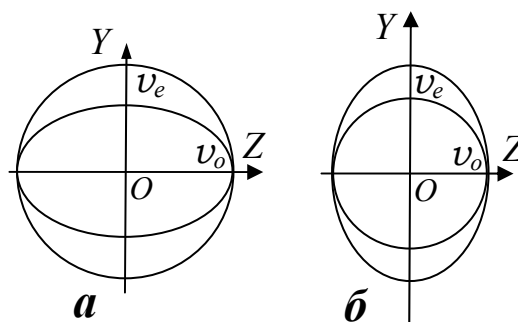


Рис.5.17

3. Распространение обыкновенных и необыкновенных лучей в одноосных кристаллах.

Пусть из воздуха на плоскую границу раздела с анизотропной средой падает по нормали плоская световая волна. Пусть оптическая ось кристалла OZ составляет с этой границей некоторый угол и лежит в плоскости падения светового луча – см. рис.5.18. Для построения хода лучей в кристалле воспользуемся принципом Гюйгенса, считая, что падающая волна возбуждает колебания вторичных точечных излучателей на поверхности кристалла. При этом надо иметь в виду, что *вторичные излучатели могут испускать волны с различной поляризацией.*

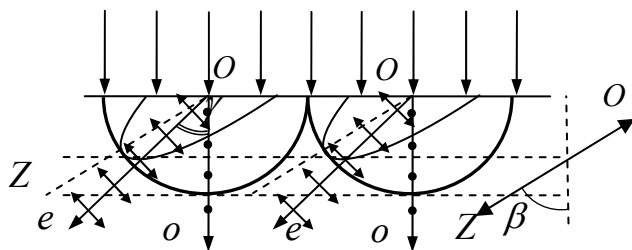


Рис.5.18

Огибающая волновых поверхностей (волновой фронт) для *обыкновенных* волн – плоскость, параллельная поверхности кристалла. Перпендикуляр к

волновому фронту совпадает в данном случае с направлением луча света в кристалле. Видно, что, в соответствии с законом преломления, этот луч распространяется по нормали к поверхности. Напомним, что для обыкновенного луча направление колебаний вектора \vec{E} (это направление на рис.5.18 обозначено точками) перпендикулярно главному сечению кристалла.

Для *необыкновенных* вторичных волн вектор \vec{E} колеблется в плоскости главного сечения (по стрелкам на рис.5.18); волновые поверхности для этих волн – эллипсоиды вращения, ось которых совпадает с оптической осью кристалла. Поскольку в направлении оптической оси скорости распространения обыкновенных и необыкновенных волн одинаковы, сферы и эллипсоиды касаются друг друга в точках пересечения с оптической осью. В каком же направлении распространяется необыкновенный луч?

Необходимо, иметь в виду, что *направление луча – это направление распространения энергии*; найти его можно, соединяя элементарный излучатель (например, O на рис.5.18) с точкой касания волнового фронта и волновой поверхности этого излучателя. Для необыкновенного луча следует различать направление распространения фронта волны (вдоль нормали к фронту) и направление распространения энергии (а это и есть направление распространения луча) – рис.5.19,*г*. Необыкновенный луч, в

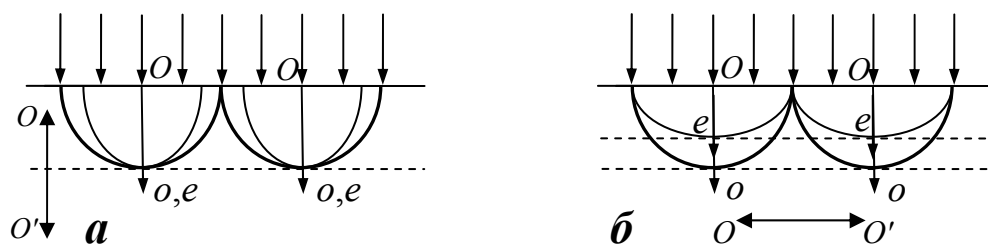
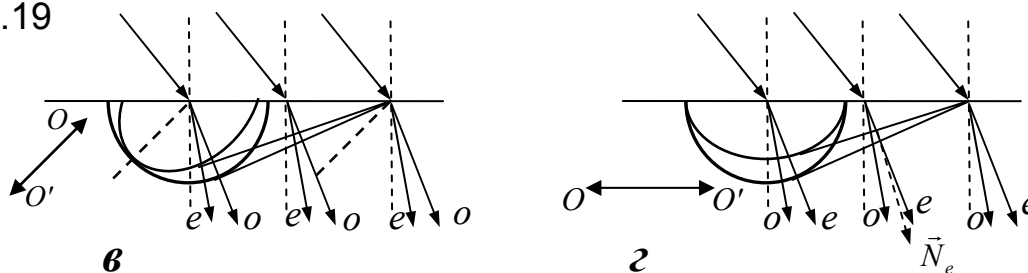


Рис.5.19



соответствии с названием, не подчиняется классическому закону преломления и отклоняется от нормали на угол γ . Для обыкновенного луча направление распространения энергии совпадает с нормалью к волновому фронту – см. рис.5.18.

Таким образом, обыкновенный и необыкновенный лучи в рассматриваемом случае разделяются пространственно – из кристалла выйдут два луча, поляризованные во взаимно перпендикулярных плоскостях.

Из дополнительных построений, представленных на рис. 5.19, видно, что аномальное преломление имеет место во всех случаях, кроме двух, когда свет в кристалле распространяется вдоль оптической оси (а) или перпендикулярно к ней (б). Во втором случае *обыкновенный и необыкновенный лучи идут в кристалле по одному направлению, но с разными скоростями.*

При наклонном падении света на поверхность кристалла угол преломления необыкновенного луча может оказаться как меньше, так и больше угла преломления луча обыкновенного, в зависимости от ориентации оптической оси OZ кристалла – см. рис.5.19,в и з.

§ 5. Эллиптически поляризованный свет

5.1. Получение эллиптически поляризованного света

Пусть луч плоско поляризованного света падает по нормали на плоскопараллельную пластинку толщиной h , вырезанную из одноосного положительного кристалла так, что его оптическая ось параллельна поверхности пластинки. Из построения Гюйгенса следует, что в этом случае обыкновенная и необыкновенная волны *распространяются в пластинке по одному и тому же направлению* – по нормали к поверхности (см. рис.5.19,б), но *с разными скоростями*. Из-за того, что скорости обыкновенной и необыкновенной волн отличаются ($v_e < v_o$), в результате прохождения пластинки между ними возникнет оптическая разность хода $\Delta = h(n_e - n_o)$. Соответственно, после прохождения пластинки между колебаниями векторов \vec{E} обыкновенного и необыкновенного лучей “набежит” разность фаз

$$\Delta\varphi = 2\pi \frac{\Delta}{\lambda_0}. \quad (5.14)$$

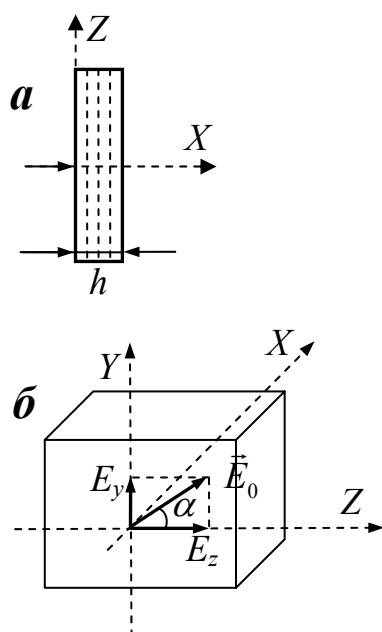


Рис.5.20

На рис.5.20,а показана схема опыта: луч распространяется по оси X , оптическая ось кристалла Z ; на рис 5.20,б тот же опыт иллюстрируется трехмерным представлением, на котором указано также направление колебаний вектора напряжённости электрического поля в падающем луче (вектор \vec{E}_0), которое составляет угол α с оптической осью. Как следует из рисунка, падающий на пластинку луч света будет возбуждать в ней обыкновенную волну (в которой вектор \vec{E} колеблется вдоль оси Y) и необыкновенную (в которой вектор \vec{E}

колеблется по оси Z). На передней поверхности кристаллической пластинки ($x = 0$):

$$\begin{aligned} E_y(0) &= E_{y0} \cos \omega t; & E_{y0} &= E_0 \sin \alpha; \\ E_z(0) &= E_{z0} \cos \omega t; & E_{z0} &= E_0 \cos \alpha. \end{aligned} \quad (5.15)$$

Для задней грани пластинки, учитывая (5.14), можно записать:

$$E_y(h) = E_{y0} \cos \omega t', \quad (5.16, a)$$

$$E_z(h) = E_{z0} (\cos \omega t' - \Delta \varphi). \quad (5.16, б)$$

где $t' = t - h/v_0$.

Уравнения (5.16,а) и (5.16,б) описывают колебания вектора напряжённости электрического поля обыкновенной и необыкновенной волн, соответственно. Поскольку для положительного кристалла скорость для обыкновенной волны больше, чем необыкновенной ($v_o > v_e$, $\lambda_o > \lambda_e$), необыкновенному лучу соответствует бóльший оптический путь, и колебания в необыкновенной волне отстают по фазе от колебаний в обыкновенной.

После прохождения пластинки результирующее колебание получится сложением двух колебаний, происходящих во взаимно перпендикулярных направлениях (Y и Z). Поскольку уравнения (5.16,а) и (5.16,б) – не что иное, как параметрическое описание эллипса, из пластинки выйдет *эллиптически поляризованная световая волна* (конец вектора \vec{E} описывает эллипс в плоскости YOZ). В предельных случаях эллипс вырождается в прямую (плоско поляризованный свет) или окружность (*круговая, или циркулярная поляризация*). Очевидно, в частности, что плоско поляризованный свет на выходе из пластинки получится, если разность фаз (5.14) составляет целое число π ; циркулярно поляризованный свет может получиться только при условии $E_{y0} = E_{z0}$ и, кроме того, если разность фаз (5.14) составляет нечётное число $\pi/2$.

В таблице 5.1 показан характер поляризации света после прохождения кристаллической пластинки в зависимости от величины оптической разности хода Δ , а также угла между плоскостью колебаний падающего света и главной оптической плоскостью (α). Соответствующие различным величинам Δ фигуры можно получить, задавая в соотношениях (5.16,*a*) и (5.16,*б*) несколько последовательных значений $\omega t'$ (например, 0, $\pi/2$, π , $3\pi/2$, 2π). При этом окажется, что, в зависимости от оптической разности хода Δ для обыкновенных и необыкновенных волн, направление обхода по эллипсу может быть разным.

Исторически сложилась такая терминология: эллиптическая

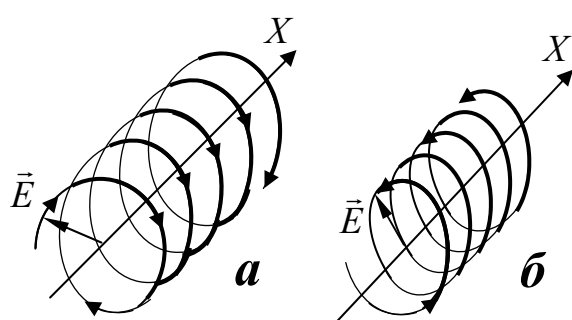


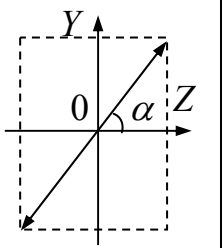
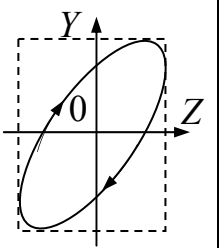
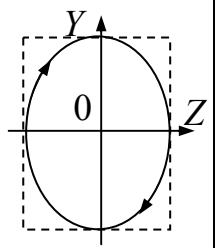
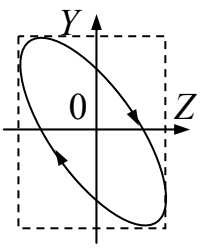
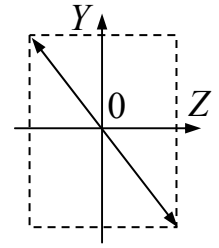
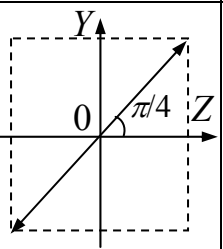
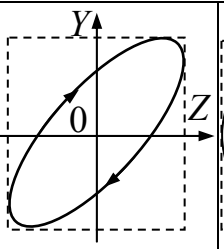
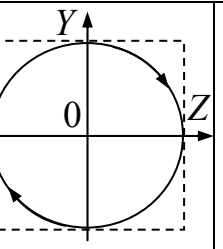
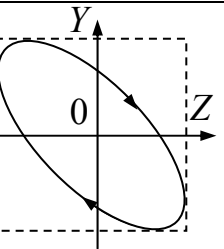
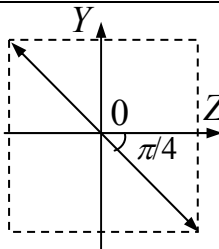
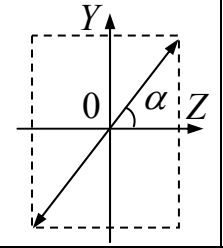
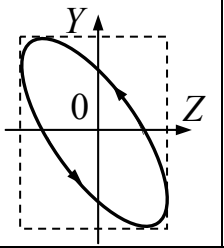
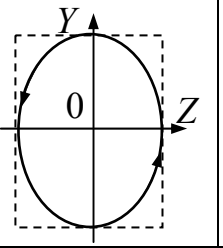
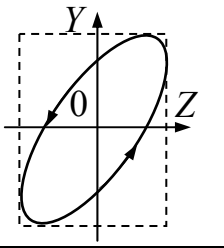
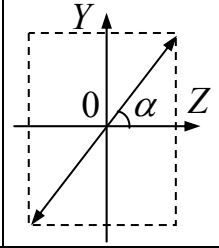
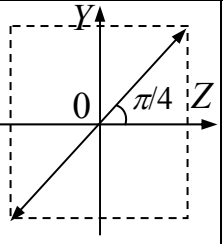
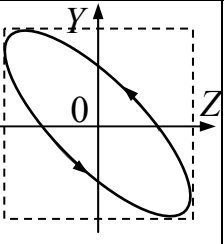
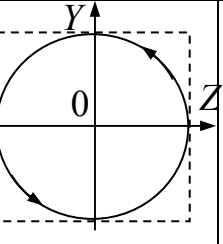
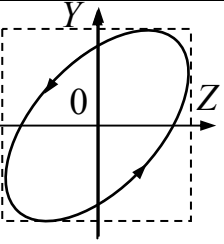
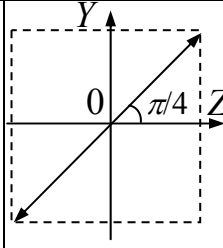
Рис.5.21

поляризация называется «*левой*», если направление распространения луча света и направление вращения вектора \vec{E} связаны правилом правого буравчика (рис.5.21,*a*), в противном случае поляризация

называется «*правой*» (рис.5.21,*б*). На иллюстрациях, показанных в табл.5.1, луч света распространяется за чертеж. Поэтому величинам $\Delta = \lambda_0/8, \lambda_0/4, 3\lambda_0/8$ будет соответствовать состояние левой эллиптической (или круговой) поляризации выходящего из кристаллической пластинки света. Величинам $\Delta = 5\lambda_0/8, 3\lambda_0/4, 7\lambda_0/8$ соответствует состояние правой поляризации.

Кристаллические пластинки, создающие оптическую разность хода между обыкновенным и необыкновенным лучом $\Delta = (m + 1/2)\lambda_0$ называются «*пластинками в полволны*» (здесь $m = 0, 1, 2, \dots$). Такие

Таблица 5.1. Поляризация света после прохождения двойкопреломляющей пластинки, вырезанной параллельно оптической оси (ось Z). Луч света распространяется по оси X (за чертеж). Оптическая разность хода между обыкновенным и необыкновенным лучами на выходе из пластинки – Δ , соответствующая разность фаз $\Delta\varphi$; λ_0 – длина световой волны в вакууме.

Δ	$\frac{\lambda_0}{8}$	$\frac{\lambda_0}{4}$	$\frac{3\lambda_0}{8}$	$\lambda_0/2$
$\Delta\varphi$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π
				
Л Е В А Я П О Л Я Р И З А Ц И Я				
				
Δ	$\frac{5\lambda_0}{8}$	$\frac{3\lambda_0}{4}$	$\frac{7\lambda_0}{8}$	λ_0
$\Delta\varphi$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{7\pi}{4}$	2π
				
П Р А В А Я П О Л Я Р И З А Ц И Я				
				

пластинки *поворачивают плоскость поляризации света* на угол 2α (симметрично относительно главной оптической плоскости). Если плоскость поляризации падающего луча составляет угол $\alpha = \pi/4$ с главной оптической плоскостью, пластинка « $\lambda_0/2$ » осуществляет поворот плоскости поляризации на $\pi/2$ (плоскость поляризации выходящего из пластинки луча света перпендикулярна плоскости поляризации падающего луча).

Кристаллические пластинки, толщина которых соответствует оптической разности хода между обыкновенным и необыкновенным лучом $\Delta = (m \pm 1/4)\lambda_0$ (где $m = 1, 2, \dots$), называются «*пластинками в четверть волны*». Такие пластинки *преобразуют плоско поляризованный свет в эллиптически поляризованный*. Причём ориентация эллипса заранее известна – одна из его осей направлена вдоль оптической оси пластинки, а другая – перпендикулярна к ней (см. табл. 5.1).

5.2. О предельной толщине кристаллических пластинок

Для формирования на выходе из пластинки эллиптически поляризованного света необходимо, чтобы колебания вектора напряженности электрического поля по осям Y и Z (см. рис.5.21) были коррелированными по фазе (т.е. когерентными).

Пусть в падающем на кристаллическую пластинку свете присутствуют волны разных частот в диапазоне от ω до $\omega + \Delta\omega$ (соответствующие длины волн в вакууме – от λ_0 до $\lambda_0 + \Delta\lambda$). Очевидно, что когерентность света для обыкновенного и необыкновенного лучей сохранится при выполнении условия:

$$\Delta/\lambda_0 < N_k, \quad \Delta < l_k = N_k \cdot \lambda_0, \quad (5.17)$$

где $\Delta = h(n_e - n_o)$ – оптическая разность хода обыкновенного и необыкновенного лучей; $N_k = \omega/\Delta\omega = \lambda_0/\Delta\lambda$ – число когерентных колебаний (см. стр. 71); l_k – длина когерентности. Из соотношения (5.17) следует, что толщина кристаллической пластинки, вырезанной параллельно оптической оси, должна удовлетворять неравенству

$$h < \frac{l_k}{n_e - n_o}. \quad (5.17,a)$$

Необходимо, подчеркнуть, что условие формирования эллиптически поляризованного света (5.17,a) значительно мягче, чем условие сохранения когерентности лучей, отраженных от двух поверхностей той же кристаллической пластинки ($2hn < l_k$), поскольку обычно $|n_e - n_o| \ll n_{o,e}$. Рассмотрим в качестве примера прохождение красного света ($\lambda_0 = 0,687$ мкм; $\Delta\lambda \cong 0,069$ мкм) через кварцевую пластинку ($n_o = 1,54$; $n_e = 1,55$) толщиной h . Учитывая, что в данном случае $N_k = \lambda_0/\Delta\lambda \cong 10$, можно сделать вывод, что интерференцию волн, отраженных от двух поверхностей кварцевой пластинки, можно наблюдать, если толщина пластинки не более $2,2$ мкм. В то же время эллиптически поляризованный свет можно получать с помощью кварцевой пластины толщиной $h < 690$ мкм = $0,69$ мм.

5.3. Анализ состояния поляризации света

Каким же образом определить состояние поляризации света? Как отличить эллиптически поляризованный свет от смеси естественного и плоско поляризованного? Если использовать для анализа состояния поляризации только поляроид Π и регистрирующее устройство P (в простейшем случае – экран) – см. рис.5.22,a, то различить эллиптически поляризованный и

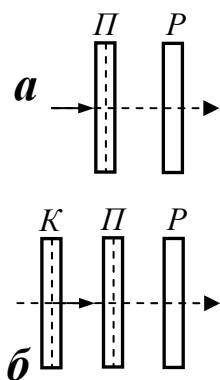


Рис.5.22

частично плоско поляризованный свет невозможно. В обоих случаях при вращении главной плоскости поляроида регистрирующее устройство зафиксирует плавное изменение интенсивности света от некоторого максимального до минимального (отличного от нуля) значения. Расположим теперь перед поляроидом *П* «четвертьволновую» пластинку (*К*) так, чтобы её оптическая ось была ориентирована вдоль главного направления поляроида, соответствующего максимуму (или минимуму) интенсивности света в предыдущем опыте (рис.5.22,б). Если на пластинку падает эллиптически поляризованный свет, то после прохождения пластинки « $\lambda_0/4$ » он преобразуется в плоско поляризованный и при вращении главной плоскости поляроида *П* регистрирующий прибор будет отмечать минимальную интенсивность света, равную нулю. Этого никогда не произойдет, если падающий на пластинку *К* свет частично плоско поляризован.

Аналогичным образом можно отличить с помощью «четвертьволновой» пластинки свет, поляризованный по кругу, и естественный свет. В этом случае в эксперименте, показанном на рис.5.22,б, оптическую ось кристаллической пластинки можно ориентировать произвольно – при любом положении оси циркулярно поляризованный свет будет преобразован пластинкой « $\lambda_0/4$ » в плоско поляризованный. Изменяя ориентацию главной плоскости поляроида, будем регистрировать прибором *Р* изменение интенсивности света от максимального значения до нуля. При пропускании через пластинку « $\lambda_0/4$ » естественного света луч не станет плоско поляризованным, поэтому

регистрирующий прибор ни при каком положении главной плоскости поляроида Π не зарегистрирует нулевую интенсивность.

В заключение этого раздела обсудим характер поляризации естественного света после его прохождения через кристаллическую пластинку. Так как естественный свет можно рассматривать как совокупность поляризованных в различных плоскостях волн, каждая такая волна при выполнении условия (5.17,*a*) превратится в эллиптически поляризованную. Однако форма и ориентация эллипсов для световых волн различных длин будет разной (см. рис. 5.23). В итоге из кристаллической пластинки выйдет также естественный свет, но иной “внутренней поляризационной структуры” (вместо совокупности плоско поляризованных – набор эллиптически поляризованных волн).

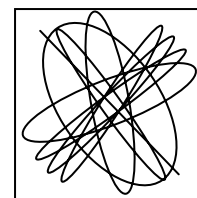


Рис.5.23

§ 6. Интерференция поляризованного света

Как показано выше, эллиптически поляризованный свет возникает в результате сложения когерентных волн, поляризованных во взаимно перпендикулярных плоскостях. Однако при таком сложении когерентных колебаний не происходит интерференция света. Для доказательства этого сравним интенсивности световых волн, падающих на кристаллическую пластинку и выходящих из неё. На входе пластинки:

$$I_0 \sim \langle E^2 \rangle = \langle E_y^2 \rangle + \langle E_z^2 \rangle = E_{y0}^2 \langle \cos^2 \omega t \rangle + E_{z0}^2 \langle \cos^2 \omega t \rangle = \frac{E_{y0}^2}{2} + \frac{E_{z0}^2}{2},$$

а на выходе:

$$I_1 \sim \langle E^2 \rangle = E_{y0}^2 \langle \cos^2 \omega t' \rangle + E_{z0}^2 \langle \cos^2 \omega t' \rangle = \frac{E_{y0}^2}{2} + \frac{E_{z0}^2}{2}.$$

Итак, интенсивность света до прохождения пластинки точно равна интенсивности после неё, независимо от взаимной ориентации плоскости поляризации падающего на пластинку света и оптической оси кристаллической пластинки. Отсутствие основного признака интерференции – перераспределения энергии волн в пространстве – как раз и означает, что *интерференции света в рассматриваемом случае нет*.

Для того чтобы интерференция выходящих из кристалла обыкновенного и необыкновенного лучей стала возможной, несколько усложним эксперимент – см. рис.5.24. После кристаллической пластинки поместим ещё один поляроид Π_2 , который позволит нам выделить составляющие с одинаковым направлением колебаний – а такие волны уже могут интерферировать. Необходимо иметь в виду, что интерференционные эффекты могут наблюдаться только в тех случаях, когда в луче света, прошедшем показанную на рис.5.24 систему, присутствуют компоненты обыкновенных и необыкновенных волн^{*)}. В частности, интерференционные

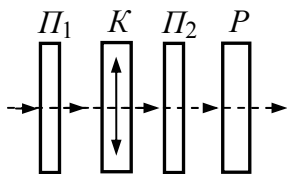


Рис.5.24

поляроидов Π_1 или Π_2 либо совпадают с главной оптической плоскостью кристалла, либо перпендикулярны к ней (после поляроида Π_2 луч света будет состоять только из необыкновенных, либо только из

^{*)} Строго говоря, термин «обыкновенный» и «необыкновенный» применимы, только для лучей распространяющихся в кристалле.

обыкновенных волн). При всех других взаимных ориентациях главных плоскостей поляризаторов Π_1 , Π_2 и главной оптической плоскости кристалла в луче света, падающем на регистрирующее устройство P , будет происходить усиление или ослабление колебаний светового вектора в плоскости Π_2 – т.е. будет регистрироваться интерференция поляризованных волн. Наиболее типичны два эффекта такого рода.

1. Окрашивание кристаллических пластинок

Пусть на прозрачную двоякопреломляющую пластинку, вырезанную параллельно оптической оси Z , падает по нормали параллельный пучок белого света (см. рис.5.24). Для того чтобы интерференция поляризованных волн была выражена наиболее отчётливо, целесообразно установить поляризатор Π_1 таким образом, чтобы амплитуды обыкновенного и необыкновенного лучей в кристалле были бы одинаковыми (угол между главной плоскостью поляризатора Π_1 и главной оптической плоскостью кристалла должен быть равным $\pi/4$). После выхода из пластинки пучок света будет состоять из эллиптически поляризованных лучей, причем для разных длин волн λ_0 разности фаз между обыкновенными и необыкновенными волнами $\Delta\varphi = 2\pi \frac{\Delta}{\lambda_0}$ будут

отличаться (см. табл. 5.1). Следовательно, ориентация и форма эллипсов, соответствующих волнам разных длин, будут различаться также (для иллюстрации на рис.5.25 показаны два таких эллипса, соответствующих волнам $\lambda_0^{(1)}$ и $\lambda_0^{(2)}$; луч света распространяется в перпендикулярном к чертежу направлении).

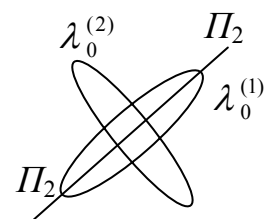


Рис.5.25

Очевидно, что после прохождения поляроида Π_2 , главная плоскость которого также показана на рис.5.25, относительное содержание волн с длиной $\lambda_0^{(1)}$ в пучке света будет больше, чем волн с длиной $\lambda_0^{(2)}$ (по сравнению с падающим на кристаллическую пластинку световым пучком). Это означает, что в результате интерференции поляризованных лучей произошло усиление волн с длиной $\lambda_0^{(1)}$ и ослабление – $\lambda_0^{(2)}$. Если толщина кристаллической пластинки всюду одинакова, то при наблюдении через поляроид Π_2 пластинка будет казаться окрашенной в цвет, соответствующий $\lambda_0^{(1)}$. При повороте главной плоскости поляроида Π_2 на $\pi/2$ вместо усиления волн с длиной $\lambda_0^{(1)}$ произойдет их ослабление и кристаллическая пластинка окрасится в дополнительный цвет (например, из синей превратится в оранжевую).

Если пластина неоднородна по толщине, то все области одинаковых толщин окрасятся в один цвет. По распределению цветных полос или пятен по поверхности пластины можно судить о степени и характере этой неоднородности толщины пластины. Например, если кристаллическая пластинка имеет форму клина, то в опыте, показанном на рис.5.26, она окажется испещрённой

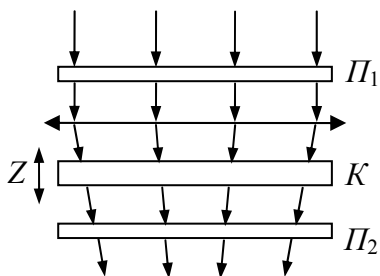


Рис.5.26

цветными полосами, параллельными ребру клина. Чередующиеся полосы одинаковой окраски соответствуют изменению оптической разности хода между обыкновенным и необыкновенным лучами на целое число длин волн (т.е. изменению разности фаз колебаний в этих волнах на $2m\pi$, где $m = 1, 2, 3, \dots$).

2. Полосы равного наклона

Пусть на плоскопараллельную кристаллическую пластинку, вырезанную *перпендикулярно оптической оси Z* , падает сходящийся пучок белого света (см. рис.5.26). В этом случае оптическая разность хода между обыкновенными и необыкновенными волнами зависит только от угла падения соответствующего луча на пластинку (γ). Условия интерференции волн, падающих на пластинку под одинаковыми углами γ , идентичны. Для какого-то определенного значения γ условие максимума интерференции будет выполняться для световых волн, соответствующих вполне определенному цвету. Поэтому в опыте, показанном на рис.5.26, однородная по толщине кристаллическая пластина будет казаться покрытой концентрическими окружностями разных цветов. В центре цветной картины будет светлое или темное пятно (центральный световой луч распространяется вдоль оптической оси, поэтому необыкновенные волны в нем отсутствуют); интенсивность пятна в центре зависит от взаимного расположения главных плоскостей поляроидов P_1 и P_2 .

Так как лучи, лежащие в главной плоскости поляроида P_1 (или в перпендикулярной к ней плоскости), будут возбуждать в кристалле только необыкновенные (или только обыкновенные) волны, вся цветная интерференционная картина будет пересечена бесцветным «крестом», интенсивность которого такая же, как пятна, находящегося в центре креста. Обычно наиболее яркая интерференционная картина получается при скрещенных поляроидах P_1 и P_2 ; в этом случае крест и центральное пятно – абсолютно тёмные.

Если в качестве источника света использовать лазер, то интерференционная картина, естественно, получается одноцветной, но зато очень чёткой. Небольшое отклонение оптической оси кристалла от нормали к поверхности пластинки сразу проявляется в искажении центральной симметрии интерференционной картины. Поэтому поляризационно–оптический метод наблюдения кристаллов в сходящемся лазерном пучке света (т.н. «метод лазерной коноскопии») широко используется для точного определения ориентации оптической оси кристаллов. Кроме того, метод позволяет легко отличать одноосные двоякопреломляющие кристаллы от двуосных.

§7. Искусственная оптическая анизотропия

Все физические воздействия, способные ориентировать структурные элементы первоначально изотропного вещества, могут вызывать возникновение *искусственной оптической анизотропии*. Остановимся кратко на основных способах формирования искусственной оптической анизотропии.

1. Пьезооптический эффект («фотоупругость»)

Пьезооптический эффект состоит в появлении оптической анизотропии при приложении к первоначально изотропному твёрдому телу (в частности, полимеру) механического напряжения. Физический механизм этого эффекта ясен из рис.5.15,*a* – при растяжении или сжатии твёрдого тела вдоль какой-либо оси происходит увеличение или уменьшение расстояния между атомами вдоль этой оси со всеми вытекающими отсюда последствиями. Очевидно, знак $n_e - n_o$

зависит от характера воздействия (растяжение или сжатие); эффект является линейным по напряжению:

$$n_e - n_o = K_1 \cdot \sigma. \quad (5.17)$$

Здесь $\sigma = F/S$ – механическое напряжение, K_1 – *упругооптическая постоянная* (иногда её называют *постоянной Брюстера*). Типичные величины упругооптической постоянной для стёкол лежат в пределах $K_1 = 10^{-12} - 10^{-11} \text{ м}^2/\text{Н}$.

Линейная зависимость между σ и $(n_e - n_o)$ выполняется только при не очень больших механических напряжениях.

Метод фотоупругости используется для изучения распределения механических напряжений в сложных деталях, для которых расчётные методы неэффективны. Для этого изготавливается модель детали из прозрачного вещества и подвергается требуемым воздействиям; в некоторых случаях удобнее нанести на поверхность детали полимерное покрытие, которое затем под нагрузкой исследуется в отражённом поляризованном свете.

2. Электрооптические эффекты

Электрооптический эффект – это появление оптической анизотропии первоначально изотропного вещества при помещении его в электрическое поле. Наблюдаются электрооптические эффекты двух типов: линейный и квадратичный.

а. Эффект Поккельса – *линейный электрооптический эффект*, который удаётся наблюдать только в пьезоэлектрических кристаллах. Пьезоэлектриками называются вещества, сжатие или растяжение которых по определённым направлениям сопровождается появлением электрической поляризации (т.н.

«*прямой пьезоэффект*») и наоборот, приложение электрического поля вызывает растяжение или сжатие кристалла по направлению поля («*обратный пьезоэффект*»). Поскольку связь между деформацией и напряжённостью электрического поля для пьезоэлектриков линейна, по аналогии с упругооптическим эффектом имеем:

$$n_e - n_o = K_2 E, \quad (5.18)$$

где E – величина напряжённости электрического поля, K_2 – *постоянная Погкельса*. Для типичного пьезоэлектрика – ниобата лития $LiNbO_3$ – величина постоянной Погкельса $K_2 = 3,7 \cdot 10^{-10}$ м/В.

Кроме того, для изготовления «оптических затворов» на основе эффекта Погкельса используют такие пьезоэлектрики, как дигидрофосфат калия (КДР) – KH_2PO_4 и дигидрофосфат аммония (АДР) – $NH_4H_2PO_4$.

Для того, чтобы пластинка ниобата лития толщиной порядка миллиметра выполняла роль «полуволновой» пластинки, необходимо приложить к ней электрическое поле с напряжённостью $E \approx 5 \cdot 10^5$ В/м.

б. Эффект Керра – квадратичный электрооптический эффект.

Эффект Керра наблюдается в жидкостях, стёклах, а также кристаллических веществах (не в пьезоэлектриках!). В результате приложения к этим веществам электрического поля появляется оптическая анизотропия (оптическая ось направлена вдоль поля), причём различие между показателями преломления обыкновенного и необыкновенного лучей, квадратично зависит от величины поля:

$$n_e - n_o = K_3 E^2, \quad (5.19)$$

Величина постоянной Керра для нитробензола, например, равна $K_3 = 10^{-18} \text{ м}^2/\text{В}^2$. В электрическом поле $E = 10^6 \text{ В/м}$ разность фаз между обыкновенным и необыкновенным лучами достигает π («пластинка $\lambda/2$ »), если толщина слоя нитробензола $h = 20 \text{ см}$.

Физическая причина эффекта Керра состоит в ориентации структурных элементов вещества (например, молекул нитробензола) в электрическом поле, либо в искажении электронных оболочек молекул или атомов в электрическом поле. В первом случае эффект Керра называется ориентационным, он может наблюдаться только в веществах, состоящих из дипольных молекул. Эффект Керра второго типа («поляризационный») характерен для веществ, молекулы или атомы которых первоначально не обладают дипольными моментами, но достаточно сильно поляризуются в электрическом поле.

Благодаря квадратичности эффекта Керра, переменное электрическое поле достаточно мощного лазерного излучения будет вызывать в этом веществе появление оптической анизотропии. Её легко обнаружить, пропуская луч света через вещество, находящееся под воздействием мощного лазерного облучения. Такой эффект Керра называют «оптическим». Оптический эффект Керра – типичный пример нарушения принципа суперпозиции электрических полей. В этом случае *волна лазерного излучения изменяет свойства среды* и таким образом влияет на распространение в этой среде другой световой волны.

На базе эффектов Погкельса и Керра создают быстродействующие «оптические затворы», которые находят широкое применение в науке и технике. Принцип устройства

такого затвора иллюстрируется рис.5.27. Между поляроидами Π_1 и Π_2 , главные плоскости которых взаимно перпендикулярны, помещается ячейка Поккельса или Керра. Направление электрического поля в ячейке составляет угол $\pi/4$ с главными плоскостями Π_1 и Π_2 (рис.5.27,б). Величина напряжённости электрического поля подбирается такой, чтобы на длине ячейки

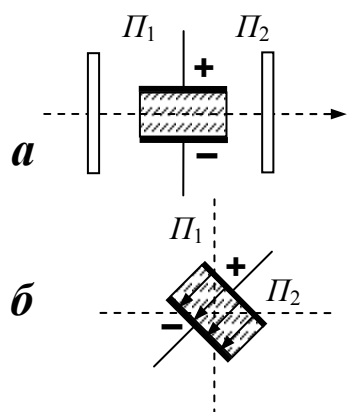


Рис.5.27

набиралась оптическая разность хода между обыкновенным и необыкновенным лучами, равная $\lambda/2$. Тогда при приложении к ячейке электрического поля плоскость колебаний падающего на неё луча света повернётся на $\pi/2$ и вышедший из ячейки луч пройдет через поляризатор Π_2 . В отсутствие электрического поля затвор “закрит” – свет через него не проходит.

Очевидно, что затворы на базе эффекта Поккельса можно использовать для модуляции светового потока – т.е. для передачи информации оптическим способом (ячейки Керра для этого менее пригодны из-за нелинейной связи между $n_e - n_o$ и напряжённостью поля, что является причиной искажения сигнала). Максимальная частота модуляции сигнала при помощи ячейки Поккельса порядка 10^{13} Гц, что позволяет реализовать огромную плотность передачи информации. Быстродействие затворов Керра, основанных на поляризационном эффекте, такого же порядка, для ориентационного эффекта Керра “время срабатывания” на 4–5 порядков больше (ориентация молекул – достаточно инерционный процесс).

3. Магнитооптический эффект (эффект Коттона-Мутона)

Эффект Коттона-Мутона – это “магнитный аналог” эффекта Керра. Объяснение этого эффекта аналогично изложенному выше объяснению эффекта Керра. Величина возникающей в магнитном поле оптической анизотропии вещества квадратично зависит от индукции магнитного поля:

$$n_e - n_o = K_4 B^2. \quad (5.20)$$

Постоянная Коттона-Мутона K_4 обычно очень мала (для жидкостей $K_4 = 10^{-10} - 10^{-9} \text{ Тл}^{-2}$). Наибольшие величины $K_4 = 10^{-7} - 10^{-6} \text{ Тл}^{-2}$ зарегистрированы для некоторых коллоидных растворов и жидких кристаллов, однако, даже для этих веществ в достаточно сильных магнитных полях $\sim 1 \text{ Тл}$ на пути $h = 1 \text{ см}$ достигается разность фаз между обыкновенными и необыкновенными волнами всего в несколько градусов. Поэтому практических применений эффект Коттона-Мутона пока не нашел. Тем не менее, его можно использовать в чисто научных целях для изучения магнитных свойств и структуры молекул, а также их комплексов.

В заключение отметим, что все постоянные $K_1 - K_4$ в соотношениях (5.17)–(5.20) могут быть, в зависимости от типа вещества, как положительными, так и отрицательными. Кроме того, для явления искусственной анизотропии характерна дисперсия – т.е. зависимость величин постоянных $K_1 - K_4$ от длины волны света.

§ 8. Оптическая активность

При прохождении плоско поляризованного света через некоторые вещества происходит постепенный *поворот плоскости колебаний* световой волны. Это явление получило название *оптической активности*, а сами вещества – оптически-активными.

Ряд веществ проявляют оптическую активность в любом агрегатном состоянии – твердом, жидком и газообразном. Обнаружено, что эти вещества состоят из молекул, не имеющих ни центра, ни плоскости симметрии. Особенно это характерно для органических молекул, содержащих атом углерода, связанный с четырьмя разными заместителями. Типичным представителем этого класса веществ является молочная кислота, молекула которой $C_3H_6O_3$ не имеет ни одного элемента симметрии. Для молекул такого типа характерно существование двух форм («изомеров»), пространственно несовместимых друг с другом любыми мыслимыми поворотами и перемещениями. Отличаются они друг от друга, как правая и левая рука, или как предмет неправильной формы от своего изображения в зеркале. Такие изомеры называются «зеркальными» или, что более принято, «оптическими», поскольку соответствующие вещества вращают плоскость поляризации света в разные стороны. Два оптических изомера молекулы молочной кислоты показаны на рис.5.28,*а*. В химии их принято изображать при помощи «проекционных формул Фишера» (см. рис.5.28,*б*), в которых верхний и нижний заместители ($COOH$, CH_3) следует представлять себе расположенными за плоскостью рисунка, боковые её заместители (H , OH) – перед ней. Считается, что в

центре проекционной формулы находится атом углерода, который лежит в плоскости рисунка.

Правовращающие оптические изомеры принято называть положительными (они обозначаются знаком “плюс” перед формулой), лево-вращающие – отрицательными (перед химической формулой в этом случае ставится знак “минус”).

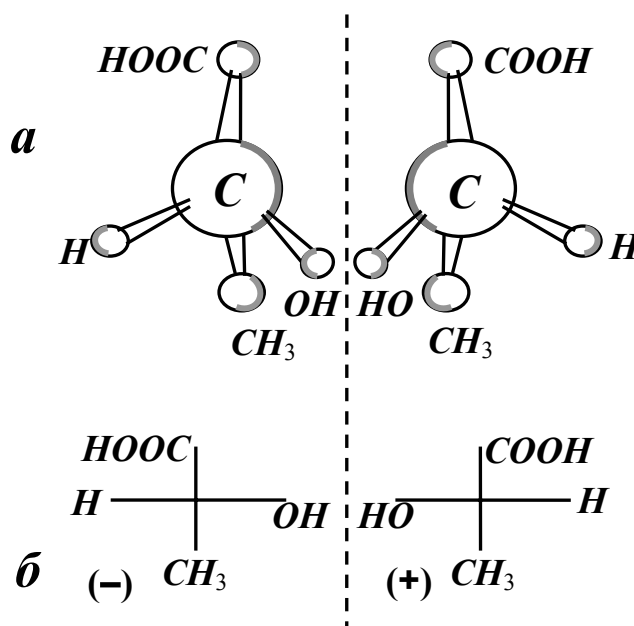


Рис.5.28

Смесь оптических изомеров в равных количествах (т.н. «рацемат») не проявляет оптической активности. Выделить оптические изомеры из рацемата можно химическим путем – в реакции с каким-либо оптически-активным реагентом; либо биохимическим способом – используя то обстоятельство, что микроорганизмы (например, бактерии) перерабатывают только один изомер, оставляя другой нетронутым.

Поскольку оптическая активность изомеров определяется структурой молекулы, растворы оптически-активных веществ этого типа в оптически-неактивных растворителях также проявляют оптическую активность. Угол поворота плоскости поляризации света в растворе оказывается пропорциональным концентрации раствора C и длине пути, пройденного лучом света в растворе l :

$$\varphi = [\alpha]Cl. \tag{5.21}$$

Соотношение (5.21) называется *законом Био*; величина $[\alpha]$ –

удельной оптической активностью. Обычно в справочниках величина $[\alpha]$ дается в градусах, если l измеряется в дециметрах, а концентрация – в граммах оптически-активного вещества на объем раствора в $см^3$. Например, для молочной кислоты величина $[\alpha] = 3,82^\circ$ (положительна для правовращающей и отрицательна для левовращающей формы). Для тростникового сахара (сахарозы $C_{12}H_{22}O_{11}$) $[\alpha] = +66,4^\circ$; для виноградного сахара (глюкозы $C_6H_{12}O_6$) $[\alpha] = +52,6^\circ$; для фруктового сахара (фруктозы) $[\alpha] = -91,9^\circ$ (лево-вращающий).

Удельная оптическая активность (иногда для краткости называемая удельным вращением) зависит от длины волны света. Обычно величина удельного вращения определяется для желтой линии натрия, тогда она обозначается $[\alpha]^D$ (выше приведены значения именно $[\alpha]^D$).

Методы исследования оптически-активных веществ, основанные на изучении вращения плоскости поляризации (т.н. «поляриметрия») широко используются для точного определения концентрации этих веществ в растворах (см. соотношение (5.21)). Измерение «вращательной дисперсии» (зависимости угла вращения плоскости поляризации света от длины волны) позволяет изучать строение веществ. Наконец, оптическая активность крайне чувствительна к небольшим вариациям в строении молекул и к межмолекулярным взаимодействиям, поэтому её исследование может предоставлять ценную информацию о природе заместителей в молекулах как органических, так и комплексных неорганических соединений. Для того, чтобы проиллюстрировать огромные возможности

поляриметрии в стереохимии, на рис.5.29 приведены структурные формулы двух форм глюкозы – α -глюкозы и β -глюкозы. Обе эти формы правовращающие, отличие

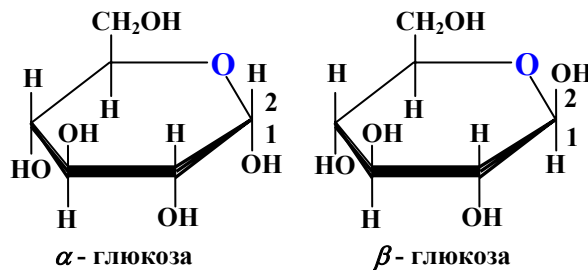


Рис.5.29

между ними состоит лишь в изменении пространственной ориентации двух связей, обозначенных на рис.5.29 цифрами 1 и 2. Несмотря на столь незначительную, на первый взгляд, разницу, удельная оптическая активность двух форм глюкозы отличается в шесть раз. Приведенная выше величина $[\alpha]^D = 52,5^\circ$ для глюкозы на самом деле получается в результате суммирования эффектов от двух существующих в равновесии форм – α -глюкозы с удельным вращением $[\alpha]^D = 112^\circ$ и β -глюкозы с удельной оптической активностью $[\alpha]^D = 18,7^\circ$.

Помимо веществ, оптически активных “на молекулярном уровне”, имеется достаточно обширный класс веществ, проявляющих оптическую активность только в кристаллической форме. Например, стеклообразный кварц обычно оптически неактивен, тогда как кристаллический характеризуется значительной оптической активностью. Оптическая активность таких веществ – свойство кристалла как целого. Общее свойство оптически-активных кристаллов – отсутствие зеркальной симметрии их структурных элементов. В случае кварца, например, структурные элементы кристаллической решетки – тетраэдры SiO_4 , соединяясь между собой вершинами (атомами кислорода), образуют спиральные цепи. Подобно оптическим

изомерам, существуют право- и лево-вращающие кристаллы, которые отличаются друг от друга как предмет и его зеркальное отображение. Такие кристаллы, абсолютно идентичные по физическим свойствам, отличающиеся только направлением вращения плоскости поляризации света, принято называть *оптическими антиподами*. Обычно максимальная оптическая активность в кристаллах наблюдается при распространении света вдоль оптической оси.

Для кристаллических оптически-активных веществ закон Био (5.21) принимает форму:

$$\alpha = [\alpha] \cdot l, \quad (5.23)$$

Удельное вращение для кристаллов обычно существенно больше, чем для жидких оптически-активных веществ. Например, для кварца удельное вращение изменяется в спектральном диапазоне $\lambda = 0,76 \text{ мкм} - 0,4 \text{ мкм}$ от $12,7 \text{ град/мм}$ до 51 град/мм (обращаем внимание, что для кристаллов удельное вращение принято рассчитывать на 1 мм пути луча, а не на 10 см , как для жидкостей).

Удельная оптическая активность, как кристаллов, так и жидкостей, зависит от таких внешних факторов, как температура, давление, состав растворителя.

Объяснение физического механизма оптической активности было предложено Френелем в 20-х годах XIX века. Основная идея Френеля состоит в том, что в оптически-активных веществах циркулярно поляризованный *в разных направлениях* (т.е. левый и правый) свет распространяется *с разными скоростями*. Если учесть определенную “спиральность” кристаллов и молекул оптически активных веществ, такое различие скоростей

распространения лево- и право-поляризованного света кажется вполне естественным, поскольку условия поляризации вещества зависят от того, совпадает ли направление вращения вектора \vec{E} световой волны с направлением “спиральности” этого вещества.

Далее, Френель предложил рассматривать плоско поляризованную световую волну частоты ω , падающую на поверхность оптически активного вещества, как совокупность двух циркулярно поляризованных в разных направлениях волн одной и той же частоты и с одинаковыми амплитудами (амплитуда каждой поляризованной по кругу волны равна половине амплитуды исходной, плоско поляризованной волны) –

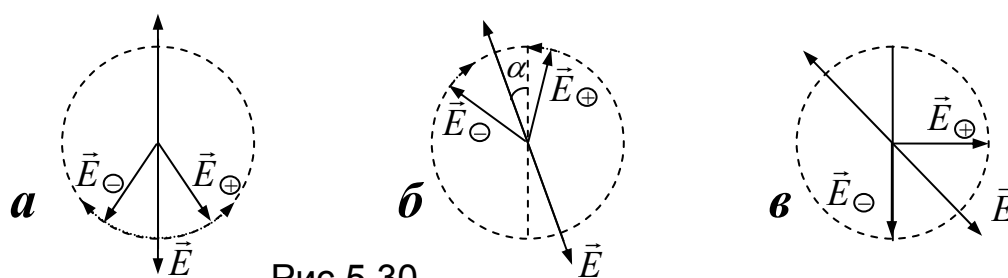


Рис.5.30

см. рис.5.30,*а*. Поскольку показатели преломления право поляризованной (n_+) и лево поляризованной (n_-) волн отличаются по величине, между право поляризованной и лево поляризованной волнами после прохождения слоя оптически активного вещества толщиной l возникает оптическая разность хода $\Delta = l(n_+ - n_-)$. Если, например, $n_+ > n_-$, то скорость распространения левого циркулярно поляризованного света (v_-) больше, чем правого (v_+); лево-поляризованный свет пройдет слой l за меньшее время, чем правый. Соответственно, вектор $\vec{E}_{(-)}$ за это время повернется на меньший угол – см. рис. 5.30,*б*. Из рисунка видно, что в итоге плоскость колебаний выходящего из оптически-активного вещества света повернётся на угол α

против часовой стрелки (луч света распространяется от нас за чертеж). Такое направление вращения плоскости поляризации световых волн соответствует правовращающему (положительному) оптически-активному веществу. Для левовращающего (отрицательного) вещества $n_+ < n_-$, $v_+ > v_-$.

Если оптическая разность хода право- и лево-поляризованной волн Δ равна четверти длины волны света в вакууме, то, как это видно из рис.5.30,в, плоскость поляризации световой волны после прохождения слоя вещества толщиной l поворачивается на угол $\pi/4$ (не $\pi/2$!). Следовательно, угол поворота плоскости колебаний светового вектора при произвольном значении величины Δ может быть определен по формуле:

$$\alpha = \frac{\Delta}{\lambda} \cdot \pi, \quad \Delta = l(n_+ - n_-). \quad (5.23)$$

Положительные значения угла α соответствуют правовращающему (положительному) оптически-активному веществу.

Как и оптическую анизотропию, оптическую активность первоначально неактивного вещества можно вызвать искусственно. Для этого нужно это вещество поместить в достаточно сильное магнитное поле, а луч света направить по направлению *вдоль* магнитного поля (не путать с эффектом Коттона-Мутона – там световой луч должен быть перпендикулярен магнитному полю). *Возникновение искусственной оптической активности в магнитном поле называется эффектом Фарадея*, поскольку именно Фарадей в середине XIX века впервые наблюдал этот эффект. Как и в случае естественной оптической активности, угол поворота плоскости колебаний световой волны определяется длиной пройденного в магнитном поле пути l и разницей показателей преломления n_+ и n_- – см. соотношение (5.23).

Как правило, если величина магнитной индукции не слишком велика, разность показателей преломления право- и левополяризованного света линейно зависит от индукции магнитного поля:

$$n_+ - n_- = K_5 \cdot Bl. \quad (5.24)$$

Постоянная K_5 называется *удельным магнитным вращением*, или *постоянной Верде* – по имени ученого, наиболее полно исследовавшего закономерности магнитного вращения. Знак постоянной Верде для большинства веществ положителен (правовращение в магнитном поле). Лишь некоторые вещества в магнитном поле являются левовращающими ($K_5 < 0$). Величина постоянной Верде зависит от длины волны света и температуры.

Магнитное вращение, по-видимому, в той или иной степени проявляют все вещества, хотя обычно оно весьма мало. Даже для тех веществ, в которых оно считается большим (например, некоторых сортов стекол) удельное вращение не превышает 10–15°, если l измерять в *см*, а индукцию магнитного поля – в *Тл*. Большая величина угла магнитного вращения α регистрируется в тонких ($l = 0,1$ *мкм*) полупрозрачных для световых волн пленках ферромагнетиков (железа, кобальта, никеля). Угол поворота плоскости колебаний света в таких пленках может достигать несколько градусов и более при помещении пленки во “внешнее” магнитное поле порядка 1 *Тл*. Необходимо, однако, иметь в виду, что “внутреннее” магнитное поле в ферромагнитных материалах, превышает “внешнее” в $10^3 - 10^5$ раз (магнитная проницаемость ферромагнетиков достигает $\mu = 10^3 - 10^5$).

Подчеркнем, что знак угла поворота плоскости поляризации света зависят *только* от направления магнитного поля и не зависят от направления распространения луча света. Поэтому

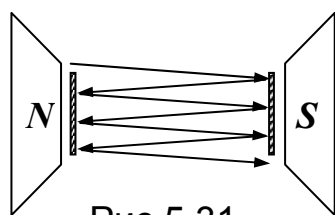


Рис.5.31

при многократном отражении светового луча от зеркал и прохождении между полюсами магнита (рис.5.31) угол поворота плоскости колебаний увеличивается пропорционально числу проходов.

В случае же естественного вращения плоскости колебаний световых волн в оптически активном веществе при обратном прохождении луча, отраженного от зеркала, плоскость колебаний возвращается в исходное положение.

Иногда для анализа структуры вещества вводят величину молекулярного вращения $\Omega = K_s/\rho$, где ρ – концентрация вещества, выраженная в единицах *моль/м³* (или *моль/см³*). Оказывается, что при изменениях концентрации и даже агрегатного состояния вещества молекулярная постоянная магнитного вращения $M = 9n\Omega/(n^2 + 2)$ сохраняется практически неизменной, где n – показатель преломления вещества.

Магнитное вращение плоскости поляризации света обусловлено возникновением индуцированного кругового движения электронов в магнитном поле. В результате условия распространения волн, поляризованных по кругу, становятся зависящими от направления вращения вектора напряженности электрического поля. Поскольку направление кругового движения электронов определяется только направлением магнитного поля, знак угла вращения плоскости поляризации света не зависит от того, в какую сторону распространяется световой луч – по магнитному полю или против него.

Дополнительные главы

ГЛАВА VI. ВОЛНОВЫЕ ПАКЕТЫ И ИМПУЛЬСЫ

§ 1. Модулированные волны

Обсудим теперь вопрос об использовании волновых процессов для передачи информации на расстояние. В гармонической волне колебание в каждый последующий период в точности повторяет предыдущее, поэтому с помощью таких волн осуществлять передачу информации нельзя. Для этой цели нужно в процессе испускания волн изменять один из параметров, характеризующих волну – амплитуду, частоту или начальную фазу. Соответственно, существует *три вида модуляции волн – амплитудная, частотная и фазовая.*

При *амплитудной* модуляции исходная гармоническая волна (рис.6.1,*а*), называемая иногда «несущей», видоизменяется с помощью т.н. «модулирующего» сигнала (рис.6.1,*б*) таким образом, что амплитуда результирующей волны изменяется во времени, повторяя форму этого модулирующего сигнала – рис.6.1,*в*. Частный случай амплитудной модуляции – испускание достаточно коротких импульсов волн на несущей частоте – т.н. «радиоимпульсов» – см. рис.6.1,*г*.

В случае *частотной* модуляции во время подачи модулирующего сигнала изменяется частота «несущей», амплитуда волны остается неизменной – рис.6.1,*д*.

Наконец, при *фазовой* модуляции в определенные моменты времени, задаваемые модулирующим сигналом, «сбивается» начальная фаза колебаний – см. рис.6.1,*е* (амплитуда и частота при этом не меняются).

Подчеркнём, что при всех способах модуляции испускаются ограниченные во времени и в пространстве «цуги» гармонических колебаний, которые не являются монохроматическими волнами (монохроматическая волна – бесконечная синусоида). Поэтому очевидно, что любой способ передачи информации с помощью волн требует использования набора монохроматических волн разных частот. В том случае, когда используется суперпозиция плоских монохроматических волн с близкими значениями частот и волновых векторов \vec{k} , принято называть такое волновое образование «*волновым пакетом*».

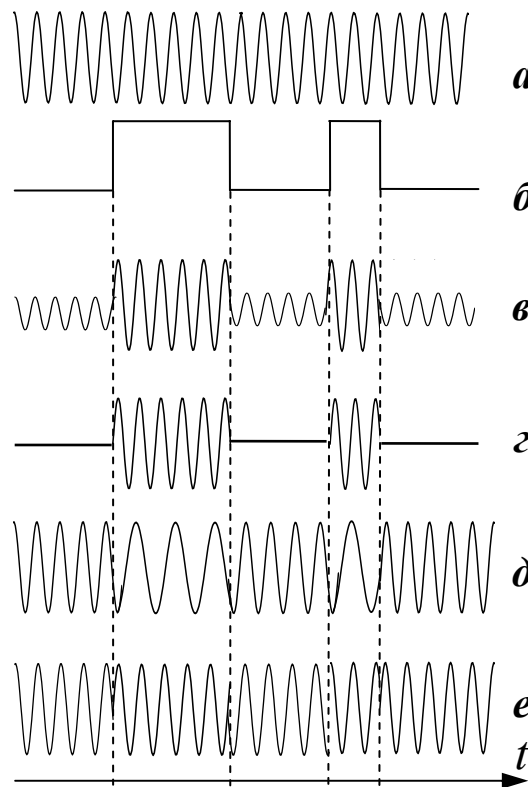


Рис.6.1

§2. Характеристики волнового пакета

Рассмотрим *прямоугольный волновой пакет* – дискретный набор плоских монохроматических волн одинаковых амплитуд, частоты которых равномерно распределены в интервале от ω_1 до $\omega_1 + \Delta\omega$; соответствующие волновые числа – $k_1 \div k_1 + \Delta k$ (волне с частотой ω_1 соответствует волновое число k_1). Будем полагать, что всего имеется N волн, так что разница частот и волновых чисел “соседних” волн $\delta\omega = \Delta\omega/(N - 1)$ и $\delta k = \Delta k/(N - 1)$, соответственно – см. рис.6.2. Волна с «номером» n – описывается соотношением:

$$\xi_n = a \cos(\omega_n t - k_n x). \quad (6.1)$$

Здесь a – амплитуда волны (в прямоугольном пакете одна и та же для всех волн),

$$\omega_n = \omega_1 + (n - 1)\delta\omega; \quad (6.1,a)$$

$$k_n = k_1 + (n - 1)\delta k.$$

Наша задача – выяснить, что получится в

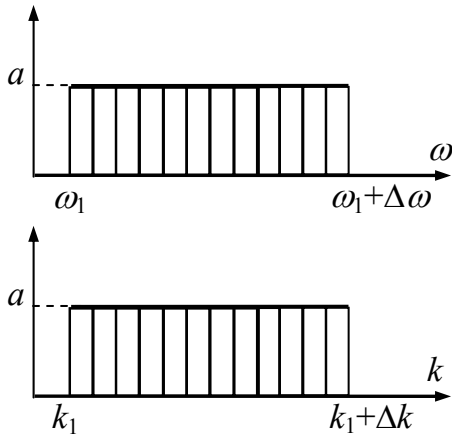


Рис. 6.2

$$\xi = a \sum_{n=1}^N \cos \varphi_n, \quad \varphi_n = \omega_n t - k_n x. \quad (6.2)$$

Вспользуемся для этого методом векторных диаграмм. Пусть в некоторый момент времени вектор длиной a , соответствующий колебанию в первой волне для какой-то точки пространства, расположен горизонтально (см. вектор AB на рис.6.3). Этот вектор должен вращаться в плоскости рисунка против часовой стрелки с угловой скоростью ω_1 . Вектор, соответствующий колебаниям в той же точке, возбуждаемым второй волной ($\omega_2 = \omega_1 + \delta\omega$, $k_2 = k_1 + \delta k$), на рисунке нужно повернуть относительно первого на величину сдвига фаз между ξ_1 и ξ_2 : $\delta\varphi = \delta\omega \cdot t - \delta k \cdot x$. Направление этого сдвига (опережение или отставание по фазе) зависит от величин $\delta\omega \cdot t$ и $\delta k \cdot x$. Для определенности мы будем считать, что $\delta\varphi < 0$ (колебания ξ_2 отстают по фазе от колебаний ξ_1), соответственно, вектор BC повернут относительно AB по часовой стрелке на угол $\delta\varphi$. Суммируя аналогичным

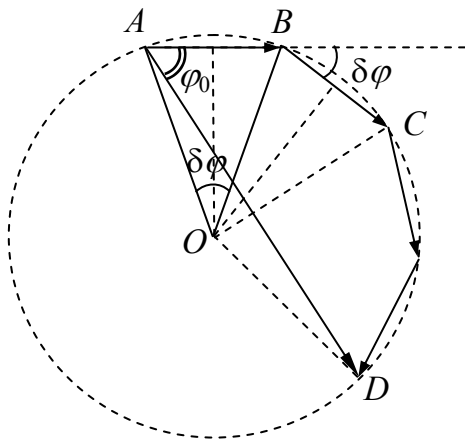


Рис.6.3

образом колебания от всех волн, получим равносторонний многоугольник (число сторон равно N , стороны равны благодаря тому, что равны амплитуды колебаний разных частот). Опуская перпендикуляры из середин отрезков AB, BC, \dots находим центр окружности (точка O), в которую вписан многоугольник. Радиус этой окружности, как легко видеть – рис. 6.3, равен

$$R = \frac{a}{2 \sin(\delta\varphi / 2)}. \quad (6.3)$$

Здесь угол $\delta\varphi$ между радиусами OA и OB точно равен углу между векторами AB и BC , т.к. треугольник BOC может быть получен поворотом треугольника AOB на угол $\delta\varphi$.

Обозначим амплитуду результирующего колебания (длину вектора AD) через A , из равнобедренного треугольника AOD получаем

$$\frac{A}{2} = R \sin(N\delta\varphi/2). \quad (6.4)$$

Сопоставляя (6.3) и (6.4), получаем выражение для амплитуды результирующего колебания, пригодное для прямоугольного пакета, состоящего из любого количества монохроматических волн

$$A = a \frac{\sin(N\delta\varphi/2)}{\sin(\delta\varphi/2)}. \quad (6.5)$$

Сдвиг фаз между результирующими колебаниями и колебаниями, возбуждаемыми первой волной пакета, равен углу BAD на рис.6.3 (обозначим этот угол φ_0). Поскольку угол OAB равен $(\pi - \delta\varphi)/2$ угол OAD равен $(\pi - N\delta\varphi)/2$, получаем

$$\varphi_0 = \angle OAB - \angle OAD = (N - 1)\delta\varphi/2 = \frac{1}{2}(N - 1)(\delta\omega \cdot t - \delta k \cdot x). \quad (6.6)$$

Отметим, что при $N \gg 1$
$$\varphi_0 \approx N\delta\varphi/2 = \frac{\Delta\varphi}{2}, \quad (6.6,a)$$

где $\Delta\varphi$ – сдвиг фаз между колебаниями “крайних” волн пакета.

Выразим теперь результирующее колебание ξ , учитывая, что первая волна описывается уравнением (6.1) с $n = 1$, а сдвиг по фазе между ξ и ξ_1 – соотношением (6.6):

$$\xi = A \cos(\omega_1 t - k_1 x + \varphi_0) = A \cos(\langle \omega \rangle t - \langle k \rangle x). \quad (6.7)$$

В уравнение волны (6.6) введены средние для волнового пакета частота $\langle \omega \rangle$ и волновое число $\langle k \rangle$:

$$\langle \omega \rangle = \frac{\omega_1 + \omega_N}{2} = \omega_1 + (N - 1)\delta\omega/2; \quad \langle k \rangle = \frac{k_1 + k_N}{2} = k_1 + (N - 1)\delta k/2. \quad (6.8)$$

Существенно, что амплитуда результирующей волны A , которая описывается равенством (6.5), непостоянна как во времени, так и в пространстве, поскольку величина φ_0 зависит от t и x . Проведем анализ этой зависимости для случая, когда полное число волн N в пакете достаточно велико ($N \gg 1$), а фазовый сдвиг между отдельными волнами – мал ($\delta\varphi \ll 1$). В этих условиях в знаменателе (6.5) синус малого угла можно заменить его радианной мерой $\delta\varphi/2$, а в числителе – вместо $N\delta\varphi/2$ использовать φ_0 (см. (6.6,a)). В итоге соотношение (6.5) переписывается в следующей форме:

$$A \cong Na \frac{\sin \varphi_0}{\varphi_0}; \quad N \gg 1. \quad (6.9)$$

Зависимость амплитуды A от угла φ при $N \gg 1$ показана на рис.6.4.

При $\varphi_0 = 0$ амплитуда максимальна и равна $N \cdot a$. Физический смысл этого результата очевиден – при таком условии фазы всех колебаний совпадают ($\delta\varphi = 0$ – см. (6.6,a)) и “ломаная” векторная

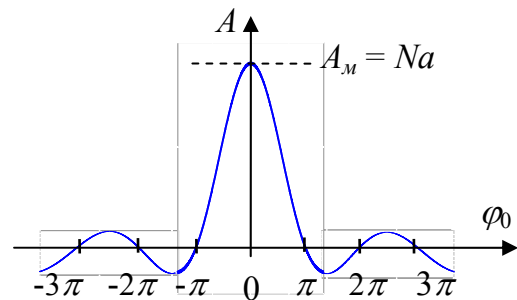


Рис. 6.4

Дополнительные главы. Глава VI. Волновые пакеты и импульсы

диаграмма, показанная на рис.6.3, превращается в прямую линию, длина которой $N \cdot a$. Ясно, что в некоторой точке пространства x_0 амплитуда результирующего колебания достигает максимального значения только в момент времени t_0 , когда выполняется условие:

$$\delta\varphi = \delta\omega \cdot t_0 - \delta k \cdot x_0 = 0. \quad (6.10)$$

В другие моменты времени синфазность колебаний $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_N$ нарушена и амплитуда колебаний меньше максимальной. При постепенном увеличении разности фаз $\delta\varphi$ между колебаниями “соседних” волн пакета растет также φ_0 – угол поворота результирующего вектора AD (см. рис.6.3). Когда φ_0 достигает π , вектор AD изменяет направление на обратное (по сравнению с его положением при $\varphi_0 = 0$). Обратим внимание, что при этом разность фаз между колебаниями “крайних” волн пакета $\Delta\varphi = N\delta\varphi = 2\pi$.

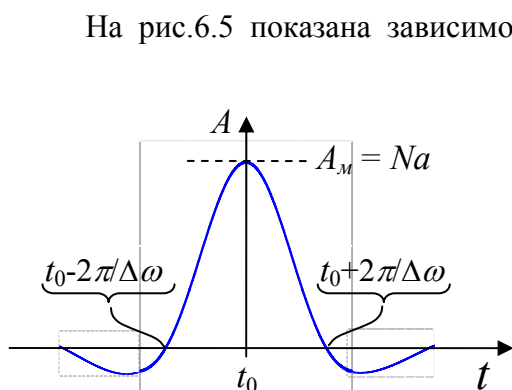


Рис. 6.5

На рис.6.5 показана зависимость амплитуды результирующего колебания в некоторой фиксированной точке x_0 от времени t . Максимальная амплитуда колебаний будет зарегистрирована наблюдателем, находящимся в точке x_0 , в момент $t_0 = x_0 \cdot \delta k / \delta\omega$. Выполнению условий $\varphi_0 = \pm \pi$ соответствуют моменты времени $(t_1 - t_0) = \pm 2\pi / \Delta\omega$. (За время $(t_1 - t_0)$ между колебаниями “крайних” волн пакета “набегают” разность фаз $\Delta\varphi = 2\pi$).

Поскольку переносимая волной энергия пропорциональна квадрату амплитуды колебаний, практически вся энергия волнового пакета будет зарегистрирована наблюдателем в период времени от $t_0 - 2\pi / \Delta\omega$ до $t_0 + 2\pi / \Delta\omega$ – рис.6.5. Таким образом, наблюдатель регистрирует импульсный сигнал на несущей частоте $\langle \omega \rangle$ – см. соотношение (6.7.). Принимая условно за длительность импульса Δt половину протяженности центрального максимума, т.е. полагая $\Delta t = 2\pi / \Delta\omega$, получим, что длительность импульса и частотный диапазон, занимаемый волновым пакетом, связаны соотношением

$$\Delta t \cdot \Delta\omega \cong 2\pi \quad \text{или} \quad \Delta t \cdot \Delta\nu \cong 1. \quad (6.11)$$

Это соотношение часто называют *теоремой о ширине частотной полосы*. В соответствии с этой теоремой импульсный сигнал длительностью Δt получается сложением пакета волн, частоты которых лежат в диапазоне $\Delta\omega = 2\pi / \Delta t$. Чем более короткий импульс требуется получить, тем шире должен быть частотный интервал, занимаемый волновым пакетом. Одной монохроматической волне соответствует $\Delta\omega = 0$ и, следовательно, $\Delta t \rightarrow \infty$ (бесконечно большая длительность сигнала).

Заметим, что в момент времени $t = t_0$ колебания всех составляющих пакета синфазны, через время $t_k = 2\pi / \Delta\omega$ эта синфазность полностью “расстраивается”. Очевидно, что время t_k – не что иное, как введенное нами ранее (см. гл. III, § 3) время когерентности.

Интересно теперь зафиксировать момент времени t_0 и сделать “мгновенную фотографию” сигнала – см. рис.6.6.

Условиям $\varphi_0 = \pm \pi$ соответствуют координаты $(x - x_0) = \pm 2\pi / \Delta k$.

Почти вся энергия волнового пакета сосредоточена в ограниченной области пространства. Как и ранее, принято считать пространственной протяжённостью волнового пакета величину $\Delta x = 2\pi / \Delta k$.

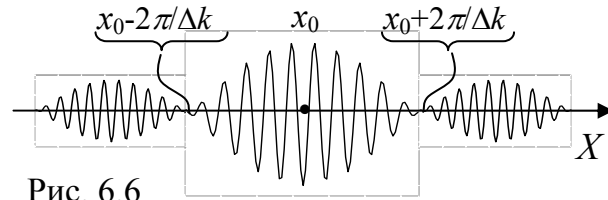


Рис. 6.6

Эта величина равна половине расстояния между минимумами $(x_0 - 2\pi / \Delta k)$ и $(x_0 + 2\pi / \Delta k)$. Определенная таким образом протяжённость волнового пакета связана с интервалом составляющих пакет длин волн соотношением, являющимся другой формой теоремы о ширине частотной полосы:

$$\Delta x \cdot \Delta k \cong 2\pi \quad \text{или} \quad \Delta x \cdot \left| \Delta(1/\lambda) \right| \cong 1. \quad (6.12)$$

Чем меньше протяжённость волнового пакета Δx , тем шире должен быть набор длин волн, составляющих пакет. Монохроматической волне соответствует $\Delta k = 0$, следовательно, такая волна описывается бесконечно длинным цугом. Из (6.12) следует, в частности, что представление о плоской волне строго применимо только для пространственно неограниченных пучков волн. Если же размер пучка волн (в поперечном сечении) ограничен, то это означает, что этот пучок нужно характеризовать некоторым набором волновых векторов $\Delta \vec{k}$ (т.е. волна не является плоской).

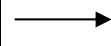

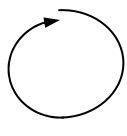
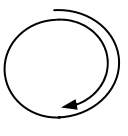
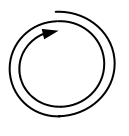
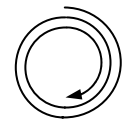
На мгновенной фотографии волнового пакета (рис.6.6) в точке x_0 все компоненты пакета возбуждают синфазные колебания. После прохождения расстояния $l_k = 2\pi / \Delta k$ когерентность колебаний различных волн, составляющих пакет, нарушается. Поэтому расстояние $l_k = 2\pi / \Delta k = \lambda^2 / \Delta \lambda$ точно равно длине когерентности, определенной ранее (см. гл. III, §3).

В заключение этого параграфа отметим, что соотношение (6.9) можно использовать для количественных расчетов дифракционной картины от щели или системы щелей (решетки), понимая под N число интерферирующих пучков волн (в случае дифракционной решетки N – число щелей).

Для иллюстрации в таблице 6.1 показаны векторные диаграммы сложения колебаний компонент волнового пакета в зависимости от угла φ_0 (и, соответственно, сдвига фаз между “крайними” компонентами $N\delta\varphi = 2\varphi_0$).

Сопоставляя таблицу 6.1 с табл.4.1 и 4.2, легко видеть эквивалентность соответствующих векторных диаграмм.

Таблица 6.1.

φ_0	0	$\pi/2$	π	$3\pi/2$	π	$5\pi/2$
$\Delta\varphi$	0	π	2π	3π	4π	5π
$\sin\varphi_0/\varphi_0$	1	$2/\pi$	0	$2/3\pi$	0	$2/5\pi$
векторные диаграммы						

Необходимо при этом учитывать, что в случае дифракции от одной щели $N\delta\varphi = 2\pi \frac{b \cdot \sin\varphi}{\lambda}$, а при рассмотрении дополнительных максимумов и минимумов дифракционной картины от решётки $N\delta\varphi = 2\pi \frac{Nd \cdot \sin\varphi}{\lambda}$.

Несколько забегаая вперед, отметим, что в современной физике теорема о ширине частотной полосы переходит в принцип неопределенности Гейзенберга. В квантовой механике каждой частице соответствует волна, параметры которой определяются энергией W и импульсом p частицы:

$$v = \frac{W}{h}, \quad \lambda = \frac{h}{p}, \quad (6.13)$$

где h – постоянная Планка. Подставляя в равенства (6.11) и (6.12) величины $\Delta v = \frac{\Delta W}{h}$ и $\Delta\left(\frac{1}{\lambda}\right) = \frac{\Delta p}{h}$, получим:

$$\Delta W \cdot \Delta t \cong h \quad \text{или} \quad \Delta p \cdot \Delta x \cong h. \quad (6.14)$$

Точные формулировки принципа неопределенности в квантовой механике записываются несколько иначе:

$$\Delta W \cdot \Delta t \geq h/2\pi \quad \text{или} \quad \Delta p \cdot \Delta x \geq h/4\pi. \quad (6.15)$$

§ 3. Распространение волновых пакетов

Анализируя условие максимума волнового пакета (6.10), легко понять, что с течением времени пакет перемещается по оси X со скоростью

$$v_2 = \frac{x_0}{t_0} = \frac{\delta\omega}{\delta k} = \frac{d\omega}{dk}. \quad (6.16)$$

Именно с такой скоростью, называемой **групповой скоростью** волнового пакета, распространяется энергия пакета и, следовательно, информация, которую мы можем передавать с помощью волн.

Учитывая, что $\omega = v \cdot k$, где v – фазовая скорость волн (см. стр. 42), можно записать выражение для групповой скорости несколько иначе:

$$v_2 = v + k \cdot \frac{dv}{dk} = v - \lambda \cdot \frac{dv}{d\lambda}. \quad (6.17)$$

Для электромагнитных волн в вакууме (см. гл. II, §5) фазовая скорость – постоянная величина $\left(v = c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} \right)$, не зависящая от длины волны λ . В

этом случае групповая скорость равна фазовой. В вакууме информация может быть передана с помощью электромагнитных волн со скоростью, равной c .

Однако в большинстве случаев при распространении как электромагнитных, так и упругих волн в различных веществах фазовая скорость волн оказывается зависящей от λ . В принципе возможны три вида зависимостей $\omega(k)$ – т.н. «дисперсионных кривых» – см. рис.6.7. Прямая 1, проходящая через начало координат, соответствует среде, в которой $v_g = v = const$ (принято говорить в этом случае об отсутствии дисперсии волн). Кривая 2 характерна для сред, в которых фазовая скорость растёт с ростом длины волны:

$$\frac{dv}{d\lambda} > 0; \quad v_g < v. \quad (6.18)$$

Дисперсия (т.е. зависимость ω от k , или v от λ) для таких сред называется **нормальной**.

Дисперсия волн называется **аномальной** для веществ, в которых фазовая скорость уменьшается с ростом длины волны:

$$\frac{dv}{d\lambda} < 0; \quad v_g > v. \quad (6.19)$$

Рассмотрим качественно характер дисперсии электромагнитных волн в диэлектрике. При прохождении электромагнитной волны через диэлектрик электрическое поле волн создает вынуждающую переменную силу, вызывающую смещение заряженных частиц (электронов и ионов). Поскольку диэлектрическая проницаемость вещества определяется его способностью поляризоваться в электрическом поле, вид зависимости $\epsilon(\omega)$ качественно должен повторять зависимость амплитуды дисперсии от частоты вынуждающей силы (см. гл. II, §5). На рис.6.8 показан характер зависимостей амплитуды поглощения (а), амплитуды дисперсии (б) и диэлектрической проницаемости $\epsilon(\omega)$ (в) от частоты вынуждающей силы. Величина ϵ_c равна диэлектрической проницаемости вещества в постоянном электрическом поле. При резонансной

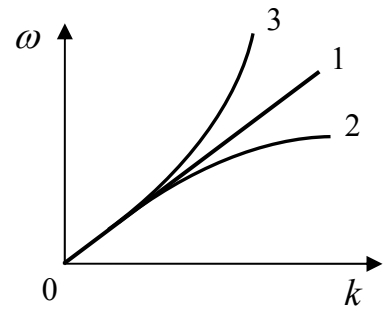


Рис. 6.7

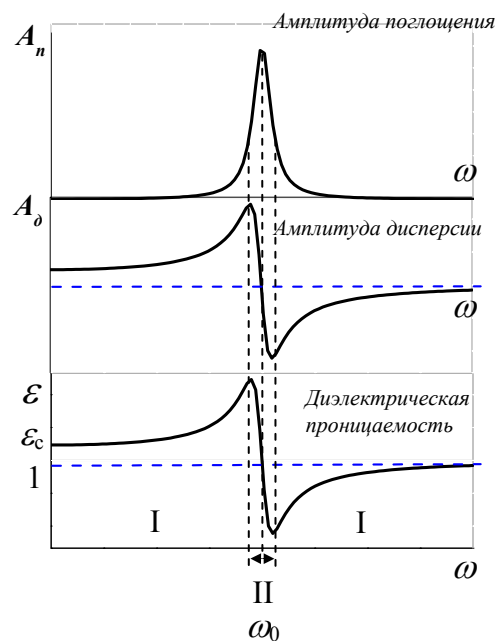


Рис. 6.8

Глава VI. Волновые пакеты и импульсы

частоте ω_0 диэлектрик не поляризуется (нет смещения заряженных частиц в фазе с вынуждающей силой), поэтому $\varepsilon = 1$. На высоких частотах заряженные частицы вообще не успевают реагировать на переменное электрическое поле, следовательно, при $\omega \rightarrow \infty$, также $\varepsilon \cong 1$. Учитывая, что фазовая скорость распространения электромагнитных волн $v = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}}$, а магнитная проницаемость μ для большинства

веществ – постоянная порядка единицы, получаем:

$$\frac{dv}{d\lambda} = \frac{dv}{d\varepsilon} \cdot \frac{d\varepsilon}{d\lambda} = -\frac{v}{2\varepsilon} \frac{d\varepsilon}{d\lambda}. \quad (6.20)$$

Отсюда групповая скорость электромагнитных волн может быть записана в форме:

$$v_g = v \left(1 + \frac{\lambda}{2\varepsilon} \frac{d\varepsilon}{d\lambda} \right). \quad (6.21)$$

Из соотношения (6.20) следует, что во всем спектральном диапазоне, кроме области вблизи полосы поглощения, дисперсия электромагнитных волн нормальная, (соответствующие области спектра обозначены на рис.6.8 цифрой I). В интервале II, соответствующей **полосе поглощения** электромагнитных волн в данном материале, **дисперсия аномальна**.

Обсудим теперь некоторые особенности распространения волновых пакетов в диспергирующих средах. На рис.6.9 показан волновой пакет в три

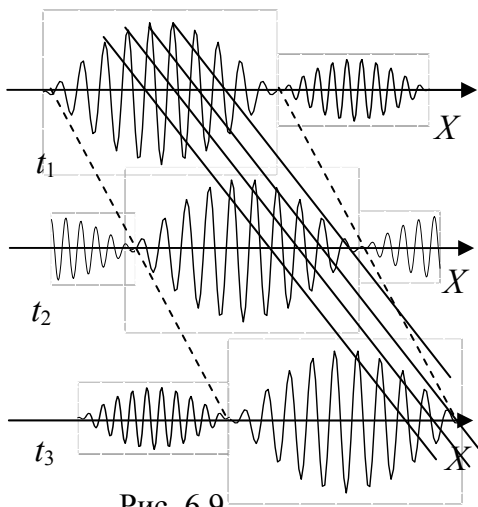


Рис. 6.9

Поскольку в диспергирующей среде групповая скорость (характеризующая скорость переноса вдоль оси X огибающей волнового пакета) не равна фазовой скорости волн (которая характеризует скорость перемещения по оси X максимумов «несущей» частоты $\langle \omega \rangle$), волновой пакет при его перемещении будет постоянно видоизменяться. В частности, в случае нормальной дисперсии ($v_g > v$) в левой части пакета будет все время как бы «нарождаться» волна частоты $\langle \omega \rangle$ и, перемещаясь быстрее огибающей пакета, исчезать на его правой границе.

Если волны, составляющие пакет, занимают достаточно узкий диапазон

частот $\Delta\omega$, так что соответствующий участок дисперсионной кривой можно считать линейным, то производная $\frac{d\omega}{dk}$ одинакова во всем интервале $\Delta\omega$, и вопрос об определении групповой скорости, характеризующей перемещение максимума огибающей волнового пакета (см. формулу (6.16)), не требует специального обсуждения. Однако если величина $\frac{d\omega}{dk}$ в диапазоне частот $\Delta\omega$ претерпевает заметные изменения, то определение скорости перемещения максимума огибающей

волнового пакета требует некоторого уточнения. Так как основной вклад в формирование максимума вносят волны средней частоты $\langle \omega \rangle$ (именно такова частота “несущей гармоники”), очевидно, что скорость перемещения максимума нужно вычислять по величине производной $\frac{d\omega}{dk}$ вблизи частоты $\langle \omega \rangle$, т.е.:

$$v_{max} \equiv v_2(\langle \omega \rangle) = \left. \frac{d\omega}{dk} \right|_{\omega=\langle \omega \rangle}. \quad (6.22)$$

Остановимся вкратце на вопросе об изменениях формы волнового пакета при распространении его в диспергирующих средах. Для этого продумаем мысленно следующую процедуру – разобьём интервал $\Delta\omega$ на несколько (например, на пять) равных частей $\Delta\omega' = \Delta\omega/5$ – см. рис.6.10. Каждая такая часть может рассматриваться как отдельный волновой пакет (будем называть такой пакет “пакетиком”). Каждый “пакетик” даст волновой импульс, показанный на рис.6.6, только длительность $\Delta t'$ и пространственная протяженность $\Delta x'$ “пакетика” будут, в соответствии с теоремой о ширине частотной полосы, в 5 раз больше, чем целого пакета. Если групповые скорости, соответствующие средним частотам всех “пакетиков”, одинаковы, то волновые импульсы пяти “пакетиков” будут распространяться вместе. Между колебаниями в этих импульсах будет происходить интерференция, и в итоге ширина суммарного волнового импульса уменьшится в 5 раз (точно так же, как уменьшается в 5 раз ширина главного дифракционного максимума при увеличении количества щелей в 5 раз – см. стр. 120).

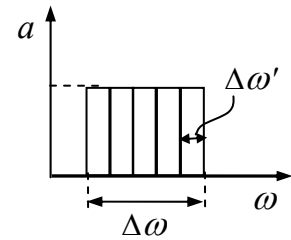


Рис. 6.10

Ситуация коренным образом меняется, если частотный диапазон, занимаемый пакетом ($\Delta\omega$), не очень мал, а среда, в которой распространяется пакет – диспергирующая. Тогда величины производной для частот, соответствующих серединам разных “пакетиков”, будут разными. Поэтому волновые импульсы от пяти “пакетиков” будут распространяться с различными скоростями, и с течением времени будут постепенно расходиться. В результате условия интерференции волновых “пакетиков” нарушатся, что неминуемо приведет к “расплыванию” результирующего волнового пакета. Подчеркнём вместе с тем, что скорость распространения результирующего волнового пакета может быть определена по формуле (6.22).

Если в момент времени t_0 волновой пакет характеризовался длительностью $(\Delta t)_0$ и пространственной протяженностью $(\Delta x)_0$, то в диспергирующей среде из-за разброса величин групповых скоростей волн Δv_2 в пределах пакета параметры, характеризующие протяженность волнового пакета во времени и пространстве в момент $t_1 > t_0$, будут с учетом “расплывания” таковы:

$$(\Delta x)_1 = (\Delta x)_0 + \Delta v_2 \cdot \frac{t_1 - t_0}{v_2}, \quad (6.23)$$

$$(\Delta t)_1 = (\Delta t)_0 + \Delta v_1 \cdot \frac{t_1 - t_0}{v_2}. \quad (6.24)$$

Величина разброса групповых скоростей по пакету Δv_2 может быть записана в виде:

$$\Delta v_2 = \frac{dv_2}{dk} \Delta k = \frac{d^2\omega}{dk^2} \cdot \Delta k. \quad (6.25)$$

$$\Delta v_z = \frac{dv_z}{dk} \Delta k = \frac{d^2 \omega}{dk^2} \cdot \Delta k. \quad (6.25)$$

Учитывая равенства (6.23) и (6.24), легко понять, что полученные ранее соотношения (6.11) и (6.12) справедливы совершенно строго только в недиспергирующих средах. Использование этих соотношений возможно на начальном этапе распространения пакета (при малых $t_1 - t_0$ “расплыванием” пакета можно пренебречь, $(\Delta x)_1 \approx (\Delta x)_0$); а также в том случае, когда мала величина Δv_z в пределах пакета. В противном случае вместо (6.11) и (6.12) нужно писать

$$\Delta t \cdot \Delta \omega \geq 2\pi, \quad \Delta t \cdot \Delta v \geq 1; \quad (6.26)$$

$$\Delta x \cdot \Delta k \geq 2\pi, \quad \Delta x \cdot |\Delta(1/\lambda)| \geq 1. \quad (6.27)$$

§ 4. Волновые пакеты и импульсы произвольной формы

До сих пор мы имели дело только с “прямоугольным” волновым пакетом. Нам удалось установить, что такому пакету соответствует импульсный сигнал, форма которого показана на рис.6.5 и рис.6.6. Таким образом, если наблюдатель зарегистрировал сигнал, имеющий такую форму, можно сразу сделать вывод о спектральном составе волнового пакета (с учетом соотношений (6.11) и (6.12)).

Очевидно, что если изменять вид волнового пакета, варьируя амплитуду отдельных составляющих, то будет также изменяться форма соответствующего сигнала. Важно установить, насколько широк диапазон сигналов, которые можно получать, создавая различные по форме волновые пакеты (т.е. задавая разные зависимости амплитуд гармонических компонент от частоты и изменяя спектральный состав пакета).

Некоторые соображения на этот счет можно привести, основываясь только на классическом волновом уравнении (2.5). Ранее упоминалось, что любая достаточно плавная функция вида $f(t - x/v)$ удовлетворяет этому уравнению. С другой стороны, решениями уравнения (2.5) являются также гармонические функции вида:

$$A \cdot \sin[\omega(t - x/v)] \quad \text{или} \quad B \cdot \cos[\omega(t - x/v)] \quad (6.28)$$

Логично предположить, что любая плавная функция может быть представлена в виде некоторого набора гармоник (6.28).

Для того чтобы точно определить этот набор для какой-то функции $f(t)$, воспользуемся методом разложения функций в ряд Фурье. Сначала рассмотрим периодическую функцию времени $F(t)$, полагая, что она удовлетворяет условиям Дирихле. Приведенное ниже рассмотрение автоматически переносится на функцию координаты, если провести замену $t \rightarrow x$.

Ряд Фурье для функции $F(t)$ выглядит так:

$$F(t) = B_0/2 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin \omega_n t + \sum_{n=1}^{\infty} B_n \cos \omega_n t. \quad (6.29)$$

Здесь A_n и B_n – коэффициенты, определяемые соотношениями:

$$\begin{aligned}
 A_n &= \frac{2}{T} \int_t^{t+T} [F(t) \sin \omega_n t] dt, \\
 B_n &= \frac{2}{T} \int_t^{t+T} [F(t) \cos \omega_n t] dt, \\
 B_0 &= \frac{2}{T} \int_t^{t+T} F(t) dt.
 \end{aligned}
 \tag{6.30}$$

Коэффициент B_0 отличается от нуля для функций, среднее значение которых за период не равно нулю (см. рис.6.11,а). Если функция $F(t)$ – чётная (рис.6.11,б), то все $A_n = 0$; для нечётных функций $B_1 = B_2 = \dots = B_n = 0$ (рис.6.11,в).

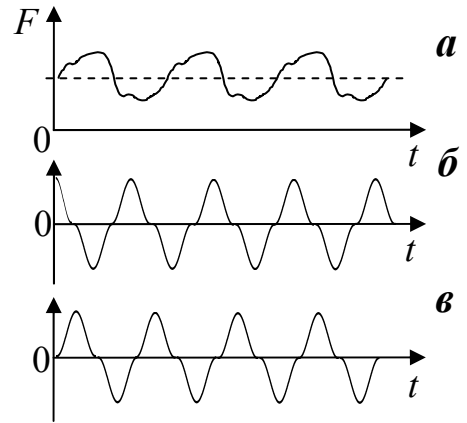


Рис.6.11

В качестве примера, на рисунке 6.12

нечётные), приведены ряды Фурье для этих функций, а также соответствующие частотные спектры (по горизонтали – частоты, по вертикали – амплитуды гармоник). Видно, что для периодических функций основной вклад в разложение Фурье вносят низкочастотные гармонические составляющие. Чем более плавной является функция, тем быстрее убывают амплитуды гармоник с возрастанием номера n в разложении периодической функции (6.29).

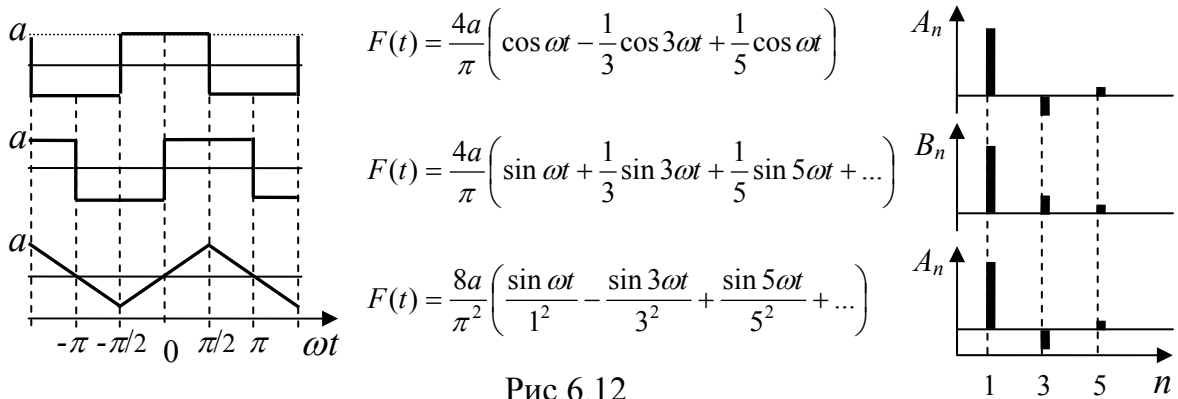


Рис.6.12

Для приближенного описания периодических функций, как правило, достаточно небольшого числа первых членов ряда (6.29). Это хорошо видно из рис.6.13, на котором показаны графики суммы первых трех (а) и пяти (б) членов ряда Фурье для прямоугольной волны.

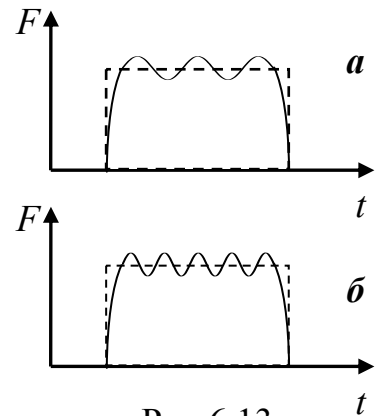


Рис.6.13

Перейдём теперь к обсуждению возможности представления в виде суперпозиции гармоник неперiodических функций.

Пусть в некоторую точку x_0 , приходит неперiodический сигнал $\xi(t)$, имеющий форму импульса ограниченной длительности (т.е. функция

$\xi(t)$ равна нулю за пределами интервала времени $t_0 < t < t_0 + T_0$ – см. рис.6.14,*а*). Для того чтобы иметь возможность использовать результаты, полученные при рассмотрении периодических функций, воспользуемся следующим приёмом. Построим функцию $f(t)$, точно равную функции $\xi(t)$ в интервале $t_0 < t < t_0 + T_0$, а вне этого интервала представляющую собой периодическое повторение функции $\xi(t)$ с периодом T_0 , так что $f(t) = f(t + T_0)$ – см. рис.6.14,*б*. Будем считать, что функция $f(t)$ удовлетворяет условиям Дирихле и её можно разложить в ряд Фурье (6.29). Если среднее значение функции $\xi(t)$ равно нулю, т.е. отсутствует постоянный “сдвиг” сигнала (см. рис.6.11,*а*), то коэффициент B_0 в разложении (6.29) равен нулю. Очевидно, что чётная функция $f(t)$, как и ранее, будет содержать в разложении (6.29) только косинусы, нечётная – только синусы. В обоих случаях первые члены соответствующих рядов Фурье – гармоники с частотой $\omega_0 = 2\pi/T_0$. Поскольку выбор периода T_0 , в общем, произволен, его можно выбрать столь большим, что частота $\omega_0 = 2\pi/T_0$ будет очень малой. При этом отличие частот

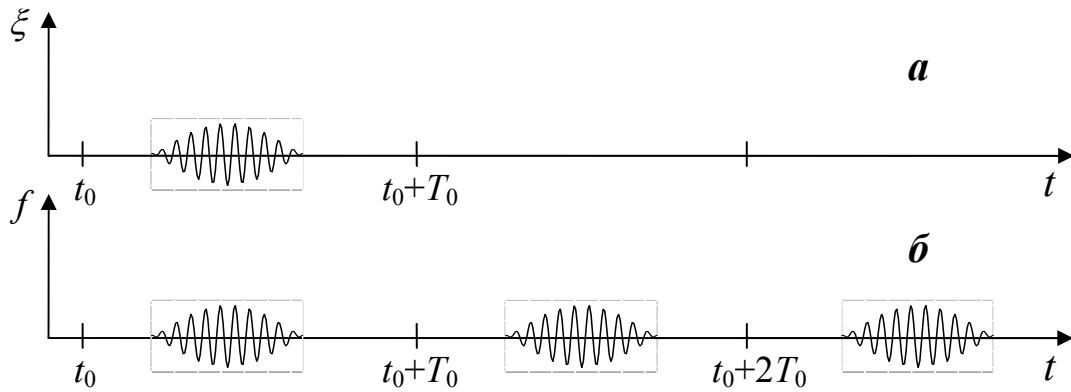


Рис.6.14

В итоге суммирование отдельных гармоник в ряду (6.29) можно заменить интегрированием по частоте:

$$f(t) = \int_0^{\infty} [A(\omega) \sin \omega t] d\omega + \int_0^{\infty} [B(\omega) \cos \omega t] d\omega, \quad (6.31)$$

где $A(\omega) = A(n\omega_0) = A_n/\omega_0$, $B(\omega) = B(n\omega_0) = B_n/\omega_0$. (6.32)

Нижние пределы в интегралах (6.31) взяты равными нулю, так при бесконечном возрастании T_0 частоты самых низкочастотных составляющих ряда (6.29) стремятся к нулю. Детальный анализ трансформации частотного спектра периодической функции $F(t)$ при увеличении периода и перехода в пределе к одиночному, сигналу $\xi(t)$ будет проведён в следующем параграфе (п.3).

Амплитуды гармоник можно определить, воспользовавшись соотношениями (6.30) и (6.31):

$$A(\omega) = \frac{2}{\omega_0 T_0} \int_{t_0}^{t_0 + T_0} [f(t) \sin \omega t] dt = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} [\xi(t) \sin \omega t] dt,$$

$$B(\omega) = \frac{2}{\omega_0 T_0} \int_{t_0}^{t_0 + T_0} [f(t) \cos \omega t] dt = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} [\xi(t) \cos \omega t] dt, \quad (6.32)$$

$$B(\omega) = \frac{2}{\omega_0 T_0} \int_{t_0}^{t_0+T_0} [f(t) \cos \omega t] dt = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} [\xi(t) \cos \omega t] dt, \quad (6.32)$$

В последних равенствах учтено, что $\omega_0 T_0 = 2\pi$, а величина интеграла на интервале, равном одному периоду от искусственно сформированной периодической функции $f(t)$ точно равна интегралу в интервале времени от $-\infty$ до $+\infty$ от одиночного непериодического импульса $\xi(t)$.

Резюмируя вышесказанное, запишем представление непериодической функции времени в виде т.н. “интеграла Фурье”:

$$\xi(t) = \int_0^{\infty} [A(\omega) \sin \omega t] d\omega + \int_0^{\infty} [B(\omega) \cos \omega t] d\omega, \quad (6.33)$$

где коэффициенты $A(\omega)$ и $B(\omega)$ определяются равенствами (6.32).

Мы уже неоднократно убеждались в полной идентичности описания функций времени и пространства, поэтому очевидно, что “пространственный импульс” – зафиксированная в какой-то момент картина распространяющегося по оси X одиночного сигнала – также может быть представлена в виде совокупности гармонических волн, аналогично (6.33), только ωt при этом нужно заменить на kx .

Соотношения (6.32), таким образом, позволяют определять спектральный состав сигналов произвольной формы. Процедура, описываемая формулами (6.32), называется Фурье–анализом сигнала или волнового пакета. В следующем параграфе мы проиллюстрируем возможности Фурье–анализа на примере нескольких сигналов, с которыми довольно часто приходится встречаться на практике.

§ 5. Фурье-анализ волновых пакетов и импульсов

1. Начнем Фурье-анализ сигналов с рассмотрения простейшего волнового пакета, характеризуемого “прямоугольным” частотным спектром, который мы уже анализировали, пользуясь методом векторных диаграмм (см. гл. VI, § 2).

Пусть функция $A(\omega)$ равна нулю во всем спектральном диапазоне, а функция $B(\omega)$ задана соотношениями:

$$\begin{aligned} B(\omega) &= (\Delta\omega)^{-1}; & \omega_1 < \omega < \omega_1 + \Delta\omega; \\ B(\omega) &= 0; & \omega < \omega_1, \omega > \omega_1 + \Delta\omega. \end{aligned} \quad (6.34)$$

Постоянное значение функции $B(\omega)$ в интервале частот от ω_1 , до ω_2 задано таким, чтобы удовлетворять условие нормировки:

$$\int_0^{\infty} B(\omega) d\omega = 1. \quad (6.35)$$

Воспользовавшись равенством (6.33) и учитывая, что $A(\omega) = 0$, получаем:

$$\xi(t) = \int_0^{\infty} B(\omega) \cos \omega t d\omega = \frac{\sin \omega_2 t - \sin \omega_1 t}{\Delta\omega t}. \quad (6.36)$$

Представляя разность синусов в виде удвоенного произведения косинуса полусуммы углов на синус полуразности, имеем:

$$\xi(t) = \frac{\sin(\Delta\omega t/2)}{\Delta\omega t/2} \cos\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}t\right) = A(t) \cos \langle \omega \rangle t. \quad (6.37)$$

Таким образом, мы пришли к уже известному нам результату: прямоугольный волновой пакет дает импульс, представляющий собой “быстрое” колебание со средней частотой $\langle \omega \rangle$, а амплитуда импульса сравнительно медленно изменяется со временем по закону:

$$A(t) = \frac{\sin(\Delta\omega t/2)}{\Delta\omega t/2}. \quad (6.38)$$

Равенство (6.38) аналогично (6.9). Физический смысл величин $N\delta\varphi$ (в соотношении (6.9)) и $\Delta\omega t$ (в (6.38)) одинаков – в обоих случаях это разность фаз между “крайними” составляющими прямоугольного пакета. Максимальные значения функций (6.9) и (6.38), конечно, отличаются, поскольку для функции $B(\omega)$ принято условие нормировки (6.35). Максимум (6.38) достигается при $t = 0$ и равен единице.

Заметим, что в задаче с дискретным частотный спектром прямоугольного волнового пакета (§2) аналогом интеграла $\int_0^\infty B(\omega)d\omega$ является сумма амплитуд a всех N компонент пакета, т.е. произведение Na , которое равно максимальной амплитуде импульса A_m , (см. рис.6.4). Поэтому условие нормировки функции $B(\omega)$, полностью эквивалентное задаче, рассмотренной в § 2, таково:

$$\int_0^\infty B(\omega)d\omega = A_m. \quad (6.39)$$

Условию (6.39) соответствует постоянная величина амплитуды “непрерывного” пакета, равная $A_m(\Delta\omega)^{-1}$ при $\omega_1 < \omega < \omega_2 = \omega_1 + \Delta\omega$.

2. Проведем теперь Фурье-анализ прямоугольного импульсного сигнала $\xi(t)$ – см. рис.6.15. Пусть t_0 – время, соответствующее центру импульса. Для удобства сравнения с задачей о “непрерывном” прямоугольном частотном спектре “пронормируем” сигнал:

$$\int_0^\infty \xi(t)dt = 1. \quad (6.40)$$

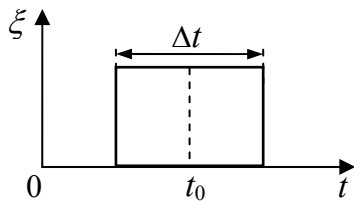


Рис.6.15

Из (6.40) следует, что амплитуда импульса равна:

$$\xi(t) = (\Delta t)^{-1} \quad \text{при } (t_0 - \Delta t/2) < t < (t_0 + \Delta t/2). \quad (6.41)$$

Из рис.6.15 видно, что $\xi(t)$ – чётная функция $(t - t_0)$, поэтому интеграл Фурье для этой функции можно

$$\xi(t) = \int_0^\infty B(\omega) \cos \omega(t - t_0) d\omega, \quad (6.42)$$

а спектральный состав гармоник соответствующего пакета находим по формуле (6.32):

$$B(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \xi(t) \cos \omega(t - t_0) dt. \quad (6.43)$$

Интегрируя (6.43), получаем

$$B(\omega) = \frac{1}{\pi} \frac{\sin(\Delta\omega t / 2)}{\Delta\omega t / 2}. \quad (6.44)$$

На рис. 6.16 сопоставлены: прямоугольный частотный спектр (а) и амплитуда соответствующего сигнала (в) в разные моменты времени, а также прямоугольный импульсный сигнал (б) и соответствующий частотный спектр (г).

Отрицательные значения амплитуды означают, что в соответствующих частотных диапазонах на рис.6.16,б фаза колебания на несущей частоте $\langle\omega\rangle$ изменяется на π . Аналогично, в спектре частот на рис. 6.16,г присутствуют гармоники, которым соответствуют отрицательные величины $B(\omega)$. Начальные фазы соответствующих гармоник сдвинуты на π .

Из рис.6.16 видно, что имеется однозначное соответствие между функциями $B(\omega)$ и $\xi(t)$ – представляя одну из этих функций в виде интеграла Фурье, получаем другую. Такие пары функций принято называть «Фурье-образами» друг друга, а переход от одной к другой – «Фурье-преобразованием».

3. Проследим трансформацию, которую претерпевает спектр частот гармоник периодической функции по мере увеличения периода T и в пределе превращения

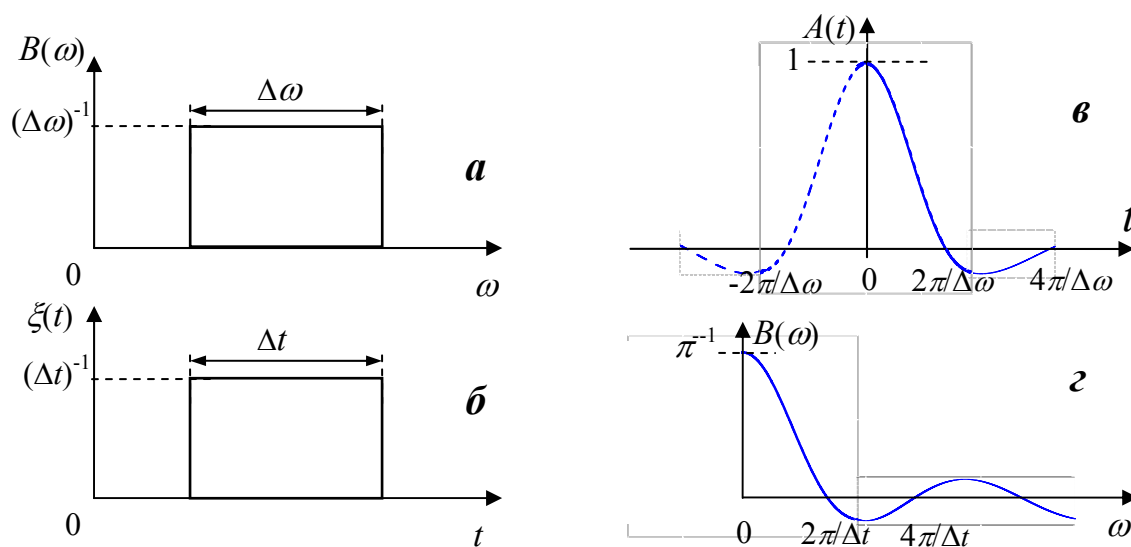


Рис.6.16

которых T_1 .

Начнем мы с “прямоугольной волны”, которую рассматривали в начале § 4 (см. рис.6.12), и будем постепенно трансформировать функцию, увеличивая период повторения импульсов в два раза ($T'_1 = 2T_1$, $T''_1 = 4T_1, \dots$). В конце концов, мы придём к одиночному прямоугольному импульсу – см. рис.6.17(а-г). Отсчет времени $t = 0$ начнём с середины одного из импульсов, так что наша периодическая функция – четная, поэтому ряд Фурье для неё должен состоять только из косинусов:

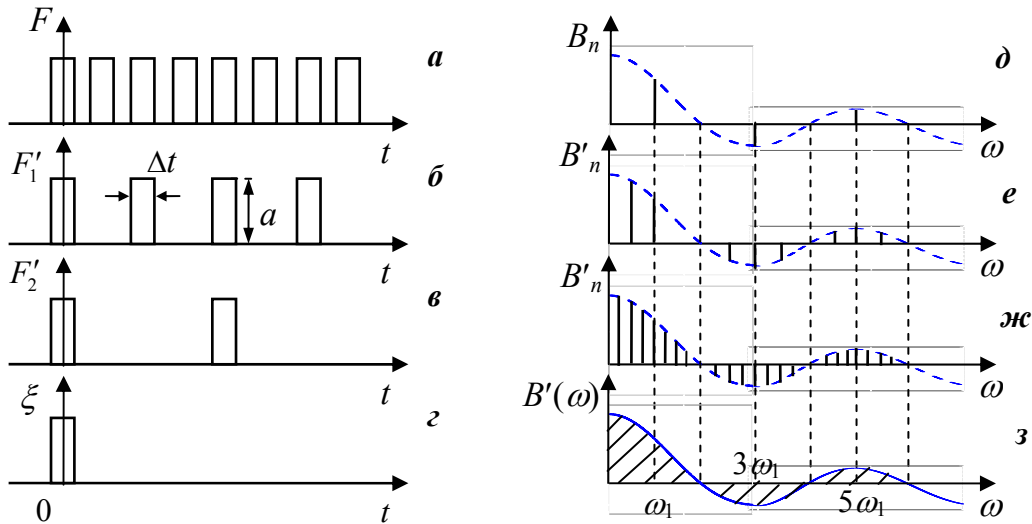


Рис.6.17

$$F(t) = B_0 / 2 + \sum_{n=1}^{\infty} B_n \cos \omega_{1n} t, \quad \omega_1 = \frac{2\pi}{T}. \quad (6.45)$$

Поскольку “прямоугольная волна”, показанная на рис.6.17,а, несимметрична (ср. с рис.6.12), коэффициент B_0 для неё отличен от нуля. Но этот постоянный член разложения (6.45) интересовать нас не будет, потому что по мере увеличения периода он будет постепенно уменьшаться, стремясь к нулю. В данном случае мы сконцентрируем внимание только на гармонических составляющих ряда (6.45).

Амплитуды гармоник B_n находим, используя (6.30):

$$B_n = \frac{2}{T_1} \int_0^{T_1} [F(t) \cos \omega_{1n} t] dt. \quad (6.46)$$

Полагая, что амплитуда импульсов равна a , а период повторения их T_1 , получаем:

$$B_n = \frac{4a}{T_1} \frac{\sin n\omega_1 t}{n\omega_1} \Big|_0^{\Delta t/2} = 2a \left(\frac{\Delta t}{T_1} \right) \frac{\sin(n\omega_1 \Delta t / 2)}{n\omega_1 \Delta t / 2}. \quad (6.47)$$

Если амплитуда импульсов постоянна, совершенно очевидно, что при “удалении” половины из них амплитуды гармоник уменьшаются пропорционально величине отношения $\frac{\Delta t}{T_1}$. Так как мы анализируем только спектральный состав

сигналов, на графиках рис.6.17(а–з) будем изображать коэффициенты $B'_n = B_n \frac{T_1}{\Delta t}$,

величины которых не зависят от отношения $\frac{\Delta t}{T_1}$. Вид функциональной зависимости

$B'_n(\omega)$ показан на рис.6.17,з и перенесён пунктирной линией на рис.6.17(д–ж), на котором ось частот проградуирована в единицах, соответствующих частоте первой гармоники сигнала $F(t)$, изображённого на рис.6.17,а.

Положение первого (самого низкочастотного) “узла” на зависимостях $B'_n(\omega)$, показанных на рис.6.17 (д–ж), определяется условием (см. рис.6.4):

$$\frac{n\omega_1\Delta t}{2} = \pi. \quad (6.48)$$

Обозначая $\omega = n\omega_1$ и учитывая, что для “прямоугольной волны” (рис.6.17,а) $\Delta t = T_1/2$, получим частоту, соответствующую первому узлу функции $B'_n(\omega)$ на рис.6.17,д: $\omega = 2\omega_1$. Из рис.6.17,д видно, что амплитуды всех чётных гармоник в разложении “прямоугольной волны” в ряд Фурье равны нулю, так как попадают в узлы функции $B'_n(\omega)$. Амплитуды всех нечётных гармоник ($\omega = \omega_1, 3\omega_1, 5\omega_1$ и т.д.) попеременно меняют знак (см. также рис.6.11). Номера гармоник показаны на рис.6.17,д цифрами, проставленными рядом с соответствующими вертикальными штрихами.

Удалим из последовательности импульсов, показанных на рис.6.17,а, каждый второй. В результате получим периодическую функцию $F'_1(t)$, период которой $T'_1 = 2T_1$, а самая низкая частота в разложении (6.45):

$$\omega'_1 = \frac{2T}{T'_1} = \frac{\omega_1}{2}. \quad (6.49)$$

Отсюда следует, что расстояние между соседними гармониками по оси частот ряда Фурье для Функции $F'_1(t)$ будет в два раза меньше, чем для функции $F(t)$ – ср. рис.6.17(д, е).

Снова проведём “прореживание” последовательности импульсов, оставляя каждый второй – см. рис.6.17,в. Период функции опять увеличивается в два раза, а самая низкая частота – уменьшается в два раза аналогично (6.49). В итоге спектр частот ряда Фурье для функции $F(t)$ стал ещё в два раза “гуще” – см. рис.6.18,ж.

Очевидно, что, продолжая эту процедуру много раз, мы придём по существу к одиночному импульсу (рис.6.17,з), который описывается бесконечно большим количеством гармоник – т.е. непрерывным распределением гармоник по частотам – рис.6.17,з. Вместо ряда Фурье в этом случае необходимо использовать интеграл Фурье для представления функции в виде совокупности гармоник – см. соотношения (6.29) и (6.31).

Как уже обсуждалось ранее, чем меньше длительность импульса Δt , тем шире спектр частот гармоник, составляющих этот импульсный сигнал (см. рис.6.17,з).

4. Проведём Фурье-анализ затухающего колебательного процесса, происходящего по закону (см. (1.34), рис.1.8):

$$\xi(t) = A_0 e^{-\beta t} \cdot \cos \omega_c t; \quad \omega_c^2 = \omega_0^2 - \beta^2; \quad t > 0. \quad (6.50)$$

Функция (6.50) – непериодическая, поэтому может быть представлена в виде интеграла Фурье:

$$\xi(t) = \int_0^{\infty} A(\omega) \sin \omega t d\omega + \int_0^{\infty} B(\omega) \cos \omega t d\omega. \quad (6.51)$$

Коэффициенты Фурье определяются соотношениями:

$$A(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \xi(t) \sin \omega t dt = \frac{A_0}{\pi} \int_0^{\infty} [e^{-\beta t} \cdot \cos \omega_c t \sin \omega t] dt =$$

$$= \frac{A_0}{2\pi} \int_0^{\infty} \left\{ e^{-\beta t} \cdot [\sin(\omega + \omega_c)t + \sin(\omega - \omega_c)t] \right\} dt. \quad (6.52)$$

$$\begin{aligned} B(\omega) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \xi(t) \cos \omega t dt = \frac{A_0}{\pi} \int_0^{\infty} [e^{-\beta t} \cdot \cos \omega_c t \cdot \cos \omega t] dt = \\ &= \frac{A_0}{2\pi} \int_0^{\infty} \left\{ e^{-\beta t} \cdot [\cos(\omega + \omega_c)t + \cos(\omega - \omega_c)t] \right\} dt. \end{aligned} \quad (6.53)$$

Используя табличные интегралы

$$\int_0^{\infty} e^{-\beta t} \cdot \sin \alpha t dt = \frac{\alpha}{\alpha^2 + \beta^2}, \quad \int_0^{\infty} e^{-\beta t} \cdot \cos \alpha t dt = \frac{\beta}{\alpha^2 + \beta^2}, \quad (6.54)$$

равенства (6.52) и (6.53) можно привести к виду:

$$A(\omega) = \frac{A_0}{2\pi} \left[\frac{\omega + \omega_c}{\beta^2 + (\omega + \omega_c)^2} + \frac{\omega - \omega_c}{\beta^2 + (\omega - \omega_c)^2} \right]; \quad (6.55)$$

$$B(\omega) = \frac{A_0}{2\pi} \left[\frac{\beta}{\beta^2 + (\omega + \omega_c)^2} + \frac{\beta}{\beta^2 + (\omega - \omega_c)^2} \right]. \quad (6.56)$$

Полагая, кроме того, затухание малым ($\beta^2 \ll \omega_0^2$; $\omega_c \approx \omega_0$) и, рассматривая область частот вблизи ω_0 , в соотношениях (6.55) и (6.56) можно пренебречь первыми слагаемыми:

$$A(\omega) \cong \frac{A_0}{2\pi} \frac{\omega - \omega_0}{\beta^2 + (\omega - \omega_0)^2}; \quad (6.57)$$

$$B(\omega) = \frac{A_0}{2\pi} \frac{\beta}{\beta^2 + (\omega - \omega_0)^2}. \quad (6.58)$$

Интенсивность колебаний определяется суммой квадратов коэффициентов $A(\omega)$ и $B(\omega)$, поэтому имеем

$$I(\omega) = A^2(\omega) + B^2(\omega) \cong \left(\frac{A_0}{2\pi} \right)^2 \frac{1}{\beta^2 + (\omega - \omega_0)^2}. \quad (6.59)$$

Легко видеть, что интенсивность колебаний, в соответствии с равенством (6.59), пропорциональна функции $R(\omega)$ – «лоренцевой» функции формы линии (см. (1.72)).

Отсюда следует важный практический вывод – для того, чтобы экспериментально определять характеристики затухающего колебательного процесса, достаточно провести Фурье-анализ этого процесса. Обычно это требует значительно меньшего времени, чем изучение вынужденных колебаний в исследуемой системе.

5. Пусть плоская монохроматическая волна распространяется по оси X – рис.6.18,*а*. Поместим на её пути длинную щель шириной b , ограничивающую пространственно размер фронта волны по оси Y – рис.6.18,*б*. В результате дифракции амплитуда результирующего колебания A будет зависеть от угла дифракции так, как это показано на рис.6.18,*в* (интенсивность волны, пропорциональная квадрату амплитуды, представлена для разных углов дифракции на рис.4.18).

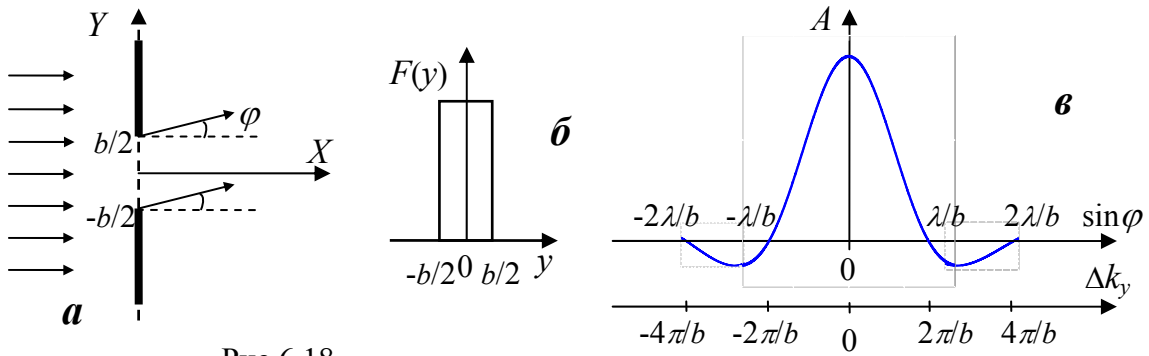


Рис.6.18

Положение минимумов дифракционной картины определяется соотношением (4.13), которое можно переписать так:

$$\frac{2\pi}{\lambda} \sin \varphi = \pm m \frac{2\pi}{b} . \quad (6.60)$$

Учтём, что $k = \frac{2\pi}{\lambda}$, а $k \sin \varphi = \Delta k_y$, – изменение составляющей волнового вектора в результате дифракции по оси Y (амплитуда волнового вектора остается неизменной). В итоге горизонтальную ось на рис.6.18,в можно проградуировать в величинах Δk_y . Сопоставляя рис.6.18(б,в) и рис.6.16(в,г), убеждаемся в их сходстве. Положение ближайшего к центральному максимуму минимума на рис.6.18,в соответствует выполнению теоремы о ширине волнового пакета в форме:

$$\Delta k_y \cdot b = \Delta k_y \cdot \Delta y = 2\pi . \quad (6.61)$$

Таким образом, дифракционная картина от щели может рассматриваться как Фурье-образ (в Δk_y -пространстве) ограниченного по оси Y фронта плоской волны. Представление о дифракции как Фурье-преобразовании оказывается чрезвычайно плодотворным при рассмотрении дифракции на более сложных препятствиях – например, на прямоугольном отверстии.

§6. Представление о Фурье-спектроскопии

Фурье-спектроскопия – современный метод оптической спектроскопии, в котором спектры исследуемого объекта получаются в две стадии. На первой стадии регистрируется так называемая «интерферограмма» объекта, на второй – проводится математическая обработка интерферограммы, в результате которой и восстанавливается спектральный состав исследуемого излучения.

Для получения интерферограммы используется интерферометр Майкельсона – необходимый элемент любого Фурье-спектрометра. Устройство интерферометра Майкельсона схематически показано на рис.6.19. Параллельный пучок исследуемого излучения через входное отверстие спектрометра направляется на полупрозрачное зеркало 3, плоскость которого составляет с пучком угол 45° . Половина составляющих пучок O волн проходит через полупрозрачное зеркало (луч 1), а другая половина – отражается от него (луч 2). Далее лучи 1 и 2 отражаются от зеркал 4' и 4, соответственно; затем они вновь попадают на зеркало 3, где опять происходит разделение каждого из этих лучей на два (на рисунке показаны только лучи

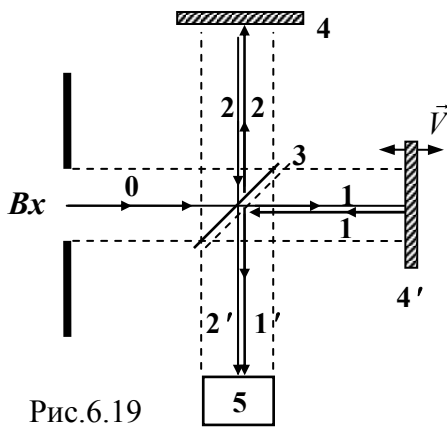


Рис.6.19

1' и 2', направления распространения которых совпадают). Если волны 1' и 2' когерентны, регистрирующий прибор 5 зафиксирует результат интерференции. Устройство интерферометра Майкельсона таково, что интенсивности интерферирующих лучей 1' и 2' строго одинаковы.

Сначала предположим, что на вход интерферометра попадает монохроматическое излучение частоты ω . После разделения исходного пучка на два, каждый из вновь образованных пучков (1 и 2) проходит свой путь, после чего они вновь соединяются (лучи 1' и 2'). Ранее было показано (см. соотношение (3.9)), что, если интенсивности лучей 1' и 2' равны $I(\omega)/2$, то интенсивность результирующих колебаний на входе прибора 5 будет равна:

$$I(\omega) = I_0(\omega)(1 + \cos \Delta\varphi), \quad (6.62)$$

где $\Delta\varphi$ – разность фаз колебаний между лучами 1 и 2.

В начальный момент времени зеркала 4 и 4' установлены так, что величина $\Delta\varphi = 0$. Затем одно из них (например, зеркало 4') начинает поступательно перемещаться вдоль луча 1 с постоянной скоростью V . Так как разность фаз $\Delta\varphi$ связана с разностью хода лучей 1' и 2' Δl соотношением $\Delta\varphi = k\Delta l$, получаем:

$$\Delta\varphi = \frac{2V\omega t}{v}. \quad (6.63)$$

Здесь v – фазовая скорость распространения волн; множитель два отражает то обстоятельство, что Δl изменяется со скоростью $2V$.

Поскольку величина $\Delta\varphi$ периодически изменяется со временем, регистрирующий прибор 5 зафиксирует присутствие в сигнале переменной составляющей

$$\tilde{I}(\tau) = I_0(\omega) \cos \omega\tau, \quad \text{где } \tau = \frac{2V}{vt}. \quad (6.64)$$

Если на входе интерферометра присутствуют волны двух частот, то переменный сигнал регистрирующего прибора 5 получится сложением двух составляющих типа (6.64):

$$\tilde{I}(\tau) = I_1(\omega) \cos \omega_1\tau + I_2(\omega) \cos \omega_2\tau, \quad (6.65)$$

Здесь $I_1(\omega_1)$, $I_2(\omega_2)$ – интенсивности волн соответствующих частот на входе интерферометра.

Очевидно, что если частотный спектр исследуемого сигнала непрерывный, то переменная составляющая отклика регистрирующего прибора 5 запишется в виде интеграла

$$F(\tau) = \int_0^{\infty} I(\omega) \cos \omega \tau d\omega . \quad (6.66)$$

Легко видеть, что выражение (6.66) – не что иное, как Фурье-преобразование частотного спектра исходного сигнала $I(\omega)$.

В частности, если исследуемый сигнал представляет собой наложение волн одинаковых амплитуд, равномерно заполняющих частотный диапазон от ω до $\omega + \Delta\omega$ (прямоугольный частотный спектр), то прибор 5 регистрирует отклик, изменяющийся во времени так, как это показано на рис.6.16,в.

В общем случае оптический спектр исходного сигнала может быть найден, как это следует из предыдущего параграфа, с помощью обратного преобразования Фурье – и это составляет второй этап получения искомого спектра:

$$I(\omega) = (\pi)^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} F(t) \cos \omega t dt . \quad (6.67)$$

Идея Фурье-спектроскопии была высказана Майкельсоном сто лет назад (математический аппарат Фурье преобразований к тому времени был уже развит). Однако практическая реализация метода стала возможной лишь после появления быстродействующих компактных компьютеров, с помощью которых можно быстро проводить численное интегрирование (6.67). В современных вариантах Фурье-спектрометров компьютер используется не только для обработки экспериментальных данных, но и для автоматического управления экспериментальной установкой.

Принципиальным отличием Фурье-спектроскопии от традиционной спектроскопии является то, что Фурье-спектрометр регистрирует сразу весь спектр исследуемого сигнала, а не его маленький участок, как обычный спектрометр с “диспергирующим” элементом (призмой или дифракционной решеткой). Соответственно, на порядки возрастают объём получаемой в единицу времени информации, а также разрешающая способность аппаратуры. Например, в инфракрасной области спектра Фурье-спектрометр позволяет получать спектральное разрешение линий, отличающихся на тысячные доли $см^{-1}$. Фурье-спектрометры для дальней инфракрасной области спектра (50–2000 *мкм*) находят широкое применение в химии.

ГЛАВА VII. ИНТЕРФЕРЕНЦИОННЫЕ МЕТОДЫ ИССЛЕДОВАНИЯ

Принцип действия всех интерференционных приборов одинаков – пучок света разделяется на два или более когерентных пучков, которые проходят различные оптические пути и затем вновь накладываются друг на друга. Наблюдаемая интерференционная картина зависит от трёх параметров: разности хода лучей Δl , показателя (или показателей) преломления среды n , и длины волны используемого света λ . Соответственно, при двух известных параметрах из интерференционной картины может быть извлечён третий параметр: если это разность хода Δl , то прибор называется «интерференционным компаратором»; если это показатель преломления, – «интерференционным рефрактометром». Интерференционные аппараты для измерения длин волн называются интерференционными спектральными приборами. Кратко остановимся на устройстве некоторых интерферометров, относящихся к указанным типам приборов.

§ 1. Интерференционные компараторы

Для точного измерения длин в технике широко используются так называемые «концевые меры» или «плитки». В частности, они служат для проверки и градуировки измерительного инструмента (линеек, штангенциркулей и т.п.). Плитки представляют собой прямоугольные параллелепипеды строго определенного сечения (9×30 или 9×35 мм²) с плоскопараллельными гранями. Длины плиток различны: от 1 до 1000 мм. Поверхности плиток столь высокого качества, что при сдавливании двух плиток они за счет сил межмолекулярного взаимодействия как бы «склеиваются», так что из нескольких плиток можно составить новую концевую меру. Обычно плитки составляют набор, с помощью которого можно изготовить любую требуемую концевую меру с заданной точностью (например, 0,01 мм или 0,001 мм).

С помощью интерференционного компаратора можно сравнивать длины изготовленных плиток с эталонными, либо непосредственно с длиной волны света. Идея метода иллюстрируется рисунком 6.20. Две плитки – эталонная Э и измеряемая И устанавливаются между двумя плоско-параллельными стеклянными или кварцевыми пластинами $П_1$ и $П_2$. На систему направляется параллельный пучок света и в областях I и II наблюдается интерференционная картина (полосы равной толщины при небольшой непараллельности $П_1$ и $П_2$). По виду интерференционной картины в области II можно судить о качестве поверхности плитки И, а по сдвигу интерференционных полос в областях I и II – о различии длин концевых мер Э и И. Длину исследуемой плитки в принципе можно определить непосредственным сравнением её с длиной световой волны – для этого необходимо найти величину сдвига интерференционных картин в областях II и III – см. рис.6.20. Особенностью современных методов определения длин является то, что число волн, укладывающихся на длине концевой меры, получается без непосредственного счета

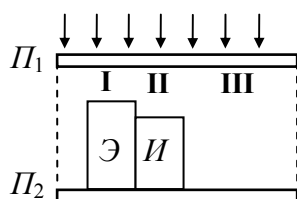


Рис.6.20

интерференционных полос. Номер соответствующей интерференционной полосы определяется косвенным путем, так называемым «способом совпадения дробных частей» (по совпадению интерференционных максимумов от разных длин волн).

В качестве интерференционного компаратора удобно использовать интерферометр Майкельсона – см. рис.6.19, поскольку в этом приборе эталонную и измеряемую длины

можно пространственно разнести (поместить в разные плечи интерферометра). Одно из зеркал интерферометра Майкельсона, (4 или 4' на рис.6.19) можно закрепить непосредственно на измеряемом объекте любой формы.

Интерференционные компараторы в сочетании с микроскопом позволяют с высокой степенью точности (до сотых долей длины волны) изучать геометрический рельеф поверхности.

С помощью современных интерференционных компараторов длина в несколько метров может быть измерена с точностью до 5 нм.

§ 2. Интерференционный рефрактометр Жамена

Рефрактометр Жамена – типичный двухлучевой интерференционный прибор, широко использующийся для измерения показателей преломления жидкостей и газов. Устройство рефрактометра Жамена показано на рис.6.21.

Параллельный пучок монохроматического света O после отражения от передней и задней поверхностей стеклянной пластины Π_1 разделяется на два пучка – 1 и 2. Затем пучки 1 и 2 проходят через одинаковые кюветы K_1 и K_2 и попадают на стеклянную пластину Π_2 , которая слегка повернута относительно пластины Π_1 .

Два из четырёх лучей, отраженных от передней и задней поверхностей пластины Π_2 , накладываются друг на друга (эти лучи показаны на рис.6.21 сплошными линиями) и интерферируют в регистрирующем устройстве P . Если в качестве регистрирующего устройства используется зрительная труба, то наблюдатель будет видеть систему полос равной толщины (пластины Π_1 и Π_2 образуют “воздушный клин”).

В контрольном эксперименте обе кюветы заполнены одним и тем же веществом, положение максимумов и минимумов интерференционной картины строго фиксируется. После этого одна из кювет заполняется исследуемым веществом и регистрируется величина сдвига, интерференционной картины. Из-за того, что показатели преломления веществ, находящихся в кюветах K_1 и K_2 , разные, между лучами 1 и 2 возникает дополнительная оптическая разность хода $\Delta = (n_2 - n_1)l$, где n_1 и n_2 – показатели преломления веществ в кюветах K_1 и K_2 , l – длина кювет. Направление смещения интерференционной картины по сравнению с контрольной указывает, какой из показателей преломления (n_2 или n_1) больше, а из величины сдвига легко вычислить искомый показатель преломления n_2 .

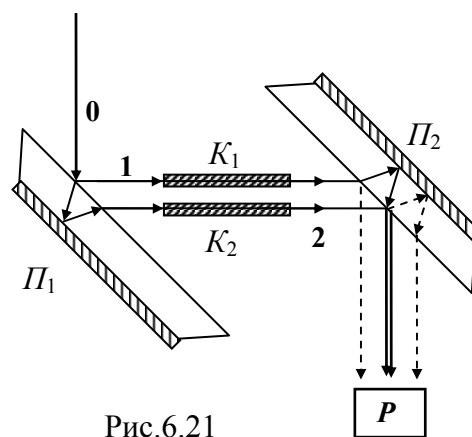


Рис.6.21

Оценим точность определения показателя преломления интерференционным методом. Пусть длина кювет $l = 5$ см, длина волны используемого света $\lambda = 5 \cdot 10^{-7}$ м, а минимальная величина сдвига интерференционной картины, регистрируемая прибором P , соответствует смещению на 0,1 полосы. Тогда получаем

$$\Delta n = n_2 - n_1 = \frac{\Delta}{l} = \frac{0,1 \cdot 5 \cdot 10^{-7}}{5 \cdot 10^{-2}} = 10^{-6}. \quad (7.1)$$

Точность определения может быть повышена, во-первых, удлинением кювет K_1 и K_2 , а во-вторых, использованием более совершенной регистрирующей

аппаратуры. В современных лазерных интерференционных рефрактометрах точность определения Δn достигает седьмого–восьмого десятичного знака.

Рефрактометрия находит широкое применение в химии для определения состава и структуры веществ (чаще всего газов и разбавленных растворов). Для иллюстрации возможностей метода в следующей таблице приведены показатели преломления разбавленных водных растворов сахарозы.

Таблица 7.1.

содержание сахарозы (по весу), в процентах	0	1	2	3
показатель преломления	1,33299	1,33443	1,33588	1,33733

Видно, что при точности метода 10^{-8} – 10^{-7} легко зарегистрировать изменения концентрации раствора в тысячные доли процента (одна ложка сахара на целый плавательный бассейн !).

Измерение показателя преломления вещества позволяет, кроме того, проверить правильность предположений о составе и строении этого вещества путем определения так называемой «молекулярной рефракции»:

$$R_m = \frac{n^2 - 1}{n^2 + 2} \frac{\mu}{\rho} \quad (7.2)$$

где μ – молекулярная масса; ρ – плотность вещества.

В соответствии с формулой Лоренц-Лоренца показатель преломления вещества с электронной поляризуемостью составляющих его частиц однозначно связан с величиной этой поляризуемости:

$$\frac{n^2 - 1}{n^2 + 2} \frac{\mu}{\rho} = \frac{4}{3} N_A \cdot \alpha \quad (7.3)$$

(Здесь N_A – число поляризующихся частиц в единице объёма). При использовании видимого или ультрафиолетового света поляризуемость вещества чисто электронная, поэтому формула Лоренц-Лоренца справедлива. Сопоставляя (7.2) и (7.3), легко видеть, что молекулярная рефракция пропорциональна поляризуемости молекул, из которых состоит исследуемое вещество. Поскольку электронная поляризуемость обладает свойством аддитивности (складывается из поляризуемостей отдельных атомов или связей в молекуле), таким же свойством аддитивности обладает и молекулярная рефракция R_m . Поэтому молекулярную рефракцию какого-либо вещества можно найти как сумму ряда постоянных слагаемых R_i , соответствующих атомным рефракциям, групповым рефракциям, связевым рефракциям и т.п. В частности, молекулярная рефракция бензола может быть вычислена как сумма “связевых” рефракций:

$$R_{C_6H_6} = 6R_{C-H} + 3R_{C-C} + 3R_{C=C} = 26,307 \quad (7.4)$$

Здесь “связевые” рефракции равны соответственно $R_{C-H} = 1,705$; $R_{C-C} = 1,209$; $R_{C=C} = 4,15$.

В случае растворов молекулярная рефракция сохраняет свойства аддитивности в тех случаях, когда при растворении поляризуемости компонентов не изменяются. При этом молекулярная рефракция будет линейной комбинацией рефракций отдельных компонент раствора с коэффициентами, учитывающими содержание этих компонент в растворе.

§ 3. Интерференционный спектральный аппарат Фабри-Перо

Интерферометр Фабри-Перо представляет собой многолучевой прибор, предназначенный для исследования тонкой структуры спектров в достаточно узком спектральном диапазоне.

Интерферометр состоит из двух прозрачных стеклянных или кварцевых пластинок, внутренние поверхности которых покрыты отражающей пленкой и установлены строго параллельно друг другу. Коэффициент отражения покрытий обычно находится в пределах 80–95%. Это означает, что при отражении луча света от поверхности пластинки его интенсивность уменьшается в $r = 0,8–0,95$ раз. Соответственно, сквозь отражающее покрытие проходит $(1 - r)$ часть от интенсивности падающего луча.

На систему направляется слегка непараллельный пучок света интенсивностью I_0 , который претерпевает многократные отражения от зеркальных покрытий пластин Π_1 и Π_2 . При каждом отражении из системы выходит часть энергии света (лучи 1, 2, 3, ...); Интенсивности нескольких отраженных и проходящих через пластину Π_2 лучей показаны на рис.6.22 (предполагается, что поглощением света внутри пластин Π_1 и Π_2 можно пренебречь). Видно, что интенсивность каждого последующего луча, выходящего из интерферометра, меньше интенсивности предыдущего в r^2 раз. При условии сохранения когерентности все выходящие лучи, накладываясь друг на друга, образуют интерференционную картину. Без применения собирающей линзы эта картина, как обсуждалось в гл.III (§5), локализована в бесконечности. Однако обычно после интерферометра ставится линза, и интерференционная картина регистрируется в фокальной плоскости этой линзы. Поскольку падающий на интерферометр пучок света слегка непараллелен, картина состоит из светлых и тёмных полос равного наклона. Существенно, что чем большее количество лучей интерферирует, тем более резкой получится интерференционная картина (точно так же, как при увеличении количества щелей дифракционной решётки). Поскольку условия максимумов и минимумов интерференции зависят от длины волны света, положения максимумов для разных длин волн будут отличаться. Таким образом, интерферометр Фабри-Перо будет осуществлять разложение падающего луча света в спектр, т.е. будет выполнять функции спектрального аппарата.

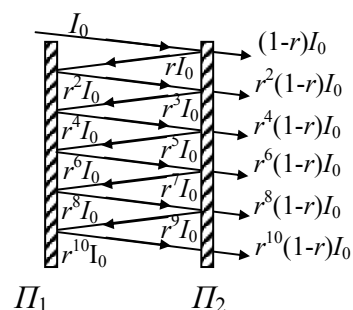


Рис.6.22

Проведём оценку важнейших параметров спектрометра Фабри-Перо. Воспользуемся для этого результатами, полученными при анализе параметров дифракционной решётки (гл.IV, § 5).

В частности, для разрешающей способности решётки было получено соотношение (4.40): $R = mN$, где m – порядок интерференции, N – число щелей. Очевидно, что в случае спектрометра Фабри-Перо под N следует понимать количество интерферирующих лучей, выходящих из аппарата.

Оценим число N следующим образом. Будем полагать, что “последний” интерферирующий луч ослаблен по сравнению с первым в K раз. Тогда, учитывая, что луч под номером N имеет интенсивность $I_{2N} = r^{2N} I_1$ (см. рис.119), получаем:

$$N = \frac{\ln K}{2 \ln r}. \quad (7.5)$$

Условно принимая, что $K = 10^{-2}$ (результат не очень сильно зависит от выбора величины K), получаем из (7.5) следующие значения для наиболее типичных коэффициентов отражения:

Таблица 7.2.

r	0,8	0,85	0,9	0,95
N	10	14	22	45

Для того чтобы оценить порядок интерференции в интерферометре Фабри-Перо, нужно разделить разность хода между двумя соседними лучами, выходящими из интерферометра, на длину световой волны. Поскольку обычно расстояние между пластинами P_1 и P_2 выбирается порядка нескольких сантиметров, а разность хода между соседними лучами равна удвоенному расстоянию между пластинами, имеем $m = 10^5 - 10^6$. Учитывая, что $N = 10 - 100$, получаем в итоге разрешающую способность спектрометра Фабри-Перо $R = mN = 10^6 - 10^8$. Это очень большая величина, которая на несколько порядков превышает типичные значения R для призмных или решёточных спектрометров.

Совершенно ясно, что для увеличения разрешающей способности спектрального аппарата Фабри-Перо нужно увеличивать расстояние между зеркалами, а также коэффициент отражения покрытий r . Однако при этом нужно иметь в виду, что при росте r существенно уменьшается интенсивность света, прошедшего через прибор. Поэтому обычно выбирают некоторое оптимальное значение $r = 0,8 - 0,9$.

Другой важный параметр спектрального аппарата – свободная спектральная область. Так как величина свободной спектральной области равна отношению минимальной длины волны в рабочем диапазоне к порядку интерференции, получаем, что для спектрометра Фабри-Перо эта область очень узкая – всего лишь $10^{-6} - 10^{-5} \lambda$. Поэтому основное применение этого прибора – изучение тонкой структуры оптических спектров в весьма узкой спектральной области.

Запись спектра исследуемого сигнала обычно осуществляется с помощью т.н. “сканирующего” интерферометра Фабри-Перо. Интенсивность интерференционной картины в определённой точке регистрируется фотоэлементом. Одно из зеркал поступательно перемещается, так что расстояние между зеркалами контролируемым образом изменяется. Каждому положению зеркала соответствует выполнение условия максимума интерференции для определённой длины волны. Полученная зависимость амплитуды сигнала, снимаемого с фотоэлемента, от положения зеркала, легко может быть пересчитана в искомый оптический спектр сигнала.

ЛИТЕРАТУРА

1. Крауфорд Ф. Волны. М.: Наука, 1984, 510 с.
2. Киттель Ч., Найт В., Рудерман М., Механика. М.: Наука, 1983, 447 с.
3. Савельев И.В. Курс общей физики, т.1 Механика, молекулярная физика. М.: Физматлит, 1998. 336 с.
4. Савельев И.В. Курс общей физики, т.2 Электричество и магнетизм. М.: Физматлит, 1998. 336 с.
5. Савельев И.В. Курс общей физики, т.4 Волны, оптика. М.: Физматлит, 1998. 256 с.
6. Иродов И.Е. Волновые процессы. М.: БИНОМ, 2004, 263 с.
7. Ландсберг Г.С. Оптика. М.: Наука, 1976, 926 с.
8. Калашников С.Г. Электричество. М.: Наука, 1985, 576 с.
9. Сивухин Д.В. Общий курс физики, т.1 Механика. М.: Физматлит, 2002, 560 с.
10. Сивухин Д.В. Общий курс физики, т.3 Электричество. М.: Физматлит, 2004, 656 с.
11. Сивухин Д.В. Общий курс физики, т.4 Оптика. М.: Физматлит, 2005, 792 с.
12. Горелик Г.С. Колебания и волны. М.: ГИТТЛ, 1950, 551 с.

СОДЕРЖАНИЕ

Предисловие	2
-------------------	---

Глава I. КОЛЕБАНИЯ

§ 1. Колебания систем с одной степенью свободы. Гармонический осциллятор	3
§ 2. Модель гармонического осциллятора в химии	8
§ 3. Свободные колебания связанных осцилляторов	11
§ 4. Затухающие колебания	19
§ 5. Вынужденные колебания	26

Глава II. ВОЛНЫ

§ 1. Классическое дифференциальное волновое уравнение	39
§ 2. Уравнение волны	41
§ 3. Энергия упругой волны	46
§ 4. Электромагнитные волны в системе связанных контуров и в двухпроводной линии ...	49
§ 5. Электромагнитные волны в однородной непроводящей среде	53
§ 6. Энергия электромагнитной волны.....	59

Глава III. ИНТЕРФЕРЕНЦИЯ ВОЛН

§ 1. Наложение волн.....	61
§ 2. Интерференция волн от двух точечных источников	63
§ 3. Условия наблюдения интерференции	68
§ 4. Стоячие волны	76
§ 5. Интерференция волн, отраженных от двух поверхностей	80

Глава IV. ДИФРАКЦИЯ ВОЛН

§ 1. Принцип Гюйгенса-Френеля. Метод зон Френеля	85
§ 2. Дифракция Френеля на щели	97
§ 3. Дифракция Фраунгофера на щели	104
§ 4. Классификация дифракционных явлений.....	110
§ 5. Дифракция Фраунгофера от системы щелей. Дифракционная решетка.....	116
§ 6. Характеристики дифракционной решётки как спектрального аппарата	122

Глава V. ПОЛЯРИЗАЦИЯ ВОЛН

§ 1. Типы поляризации волн.....	128
§ 2. Поляризация волн при избирательном поглощении.....	131
§ 3. Поляризация волн при отражении и рассеянии света	135
§ 4. Поляризация при двойном лучепреломлении света.....	148
§ 5. Эллиптически поляризованный свет	156
§ 6. Интерференция поляризованного света	163
§ 7. Искусственная оптическая анизотропия	168
§ 8. Оптическая активность	174

Дополнительные главы

Глава VI. ВОЛНОВЫЕ ПАКЕТЫ И ИМПУЛЬСЫ

§ 1. Модулированные волны	183
§ 2. Характеристики волнового пакета	184
§ 3. Распространение волновых пакетов	188
§ 4. Волновые пакеты и импульсы произвольной формы	192
§ 5. Фурье-анализ волновых пакетов и импульсов	195
§ 6. Представление о Фурье-спектроскопии.....	201

ГЛАВА VII. ИНТЕРФЕРЕНЦИОННЫЕ МЕТОДЫ ИССЛЕДОВАНИЯ

§ 1. Интерференционные компараторы	204
§ 2. Интерференционный рефрактометр Жамена	205
§ 3. Интерференционный спектральный аппарат Фабри-Перо	207
Литература	209
Содержание	210