

1. Общие свойства гармонических колебаний

Точка совершает гармонические колебания, если её отклонение от положения равновесия зависит от времени по закону:

$$\xi(t) = A \cdot \cos(\omega t + \varphi_0). \quad (1.1)$$

Параметр A называется амплитудой, ω – циклической (круговой) частотой колебаний, $(\omega t + \varphi_0)$ – фазой, φ_0 – начальной фазой колебаний. Величина $T = 2\pi/\omega$ называется периодом колебаний.

Дифференцируя (1.1) по времени, получаем зависимости скорости колеблющейся по гармоническому закону точки и её ускорения от времени:

$$\dot{\xi}(t) = -A\omega \sin(\omega t + \varphi_0) = A\omega \cos(\omega t + \varphi_0 + \pi/2), \quad (1.2)$$

$$\ddot{\xi}(t) = -A\omega^2 \cos(\omega t + \varphi_0) = A\omega^2 \cos(\omega t + \varphi_0 + \pi). \quad (1.3)$$

Из соотношений (1.2) и (1.3) следует, что максимальная величина скорости колебательного движения (*амплитуда скорости*) равна $v_{max} = A\omega$, а ускорение точки в любой момент времени пропорционально её отклонению от положения равновесия

$$\ddot{\xi}(t) = -\omega^2 \cdot \xi(t). \quad (1.4)$$

Таким образом, если при решении какой-то физической задачи некоторая величина (например, координата тела в механике или заряд конденсатора в электричестве) окажется пропорциональной её второй производной по времени с обратным знаком, то эта величина зависит от времени по гармоническому закону (1.1). Причём коэффициент пропорциональности между величиной и её второй производной определяется частотой *собственных колебаний* $\omega_0^2 = -\ddot{\xi}/\xi$ (здесь и в дальнейшем для частоты *собственных незатухающих колебаний* какого-

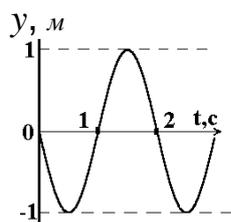
либо физического осциллятора используется обозначение ω_0).

При решении конкретной физической задачи частота собственных гармонических колебаний определяется только параметрами осциллятора (такими, как масса колеблющегося тела, коэффициент жёсткости пружины, ёмкость конденсатора, индуктивность катушки в колебательном контуре и т.п.). Амплитуду колебаний A и начальную фазу φ_0 можно определить, используя два начальных условия – начальное отклонение от положения равновесия и начальную скорость точки.

Решим несколько задач, которые помогут лучше понять общие свойства гармонических колебаний.

Задача

1.1. Координата точки по оси Y меняется со временем по закону,



представленному на графике. Опишите эту зависимость уравнением вида $y(t) = A \cdot \cos(\omega t + \varphi_0)$, подобрав значения параметров A , ω и φ_0 .

Решение

Из рисунка видно, что максимальное отклонение точки от положения равновесия и, следовательно, амплитуда колебаний $A = 1$ м. Период колебаний $T = 2$ с, отсюда $\omega = 2\pi/T = \pi$ с⁻¹. Наконец, в начальный момент времени ($t = 0$) $y(0) = \cos \varphi_0 = 0$. Это может быть при $\varphi_0 = \pi/2$ и $\varphi_0 = 3\pi/2$. Однако начальная скорость точки, как это видно из рисунка, $v_{0y} < 0$. Поскольку $v_{0y} = -A\omega \sin \varphi_0$, а $\sin \pi/2 > 0$, правильным является именно значение $\varphi_0 = \pi/2$.

Ответ: $y(t) = \cos(\pi t + \pi/2)$ м.

Предлагаем самостоятельно получить закон движения этой же точки также в виде $y(t) = A \sin(\omega t + \varphi_1)$.

Задача

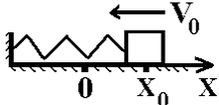
1.2. Частица совершает гармонические колебания вдоль оси X . В некоторый момент времени t_1 смещение частицы от положения равновесия $x_1 = 0,3$ м, проекция её скорости $v_1 = -4$ м/с и ускорения $a_1 = -30$ м/с². Определите амплитуду и частоту колебаний частицы.

Решение

По условию координата частицы меняется со временем по закону $x(t) = A \cdot \cos(\omega t + \varphi_0)$. В некоторый момент времени t_1 смещение частицы от положения равновесия $x_1 = A \cdot \cos(\omega t_1 + \varphi_0)$, её скорость $v_1 = -A\omega \sin(\omega t_1 + \varphi_0)$, а ускорение $a_1 = -A\omega^2 \cos(\omega t_1 + \varphi_0)$. Поскольку при гармонических колебаниях $a = -\omega^2 x$, имеем $\omega = \sqrt{-a_1/x_1}$. Суммируя функции $\cos^2(\omega t_1 + \varphi_0) + \sin^2(\omega t_1 + \varphi_0) = (x_1/A)^2 + (v_1/A\omega)^2 = (1/A)^2(x_1^2 - x_1 \cdot v_1^2/a_1) = 1$, получаем $A = x_1 \sqrt{1 - v_1^2/a_1 x_1}$.

Ответ: $A = x_1 \cdot \sqrt{1 - v_1^2/a_1 x_1} = 0,5$ м; $\omega = \sqrt{-a_1/x_1} = 10$ рад·с⁻¹.

Задача

1.3. Тело, прикрепленное упругой пружиной к  стене, находится на гладкой горизонтальной поверхности. В начальный момент времени его смещают по оси X на расстояние $x_0 = 5$ см и толкают со скоростью $v_0 = 10$ см/с влево. Период колебаний тела $T = 3,14$ с. Определите, через какое минимальное время τ тело будет проходить положение равновесия.

Решение

Запишем второй закон Ньютона для тела, совершающего

малые колебания на пружине:

$$m\ddot{x} = -k \cdot x ,$$

где m – масса тела, k – коэффициент упругости пружины. Отсюда следует, что $\ddot{x} = -\omega^2 x$ (здесь $\omega^2 = k/m$). Это типичное дифференциальное уравнение гармонических колебаний, общее решение которого: $x = A \cdot \cos(\omega t + \varphi_0)$. Из начальных условий получаем:

$$x_0 = A \cdot \cos \varphi_0, v_0 = -A \omega \sin \varphi_0; \sin^2 \varphi_0 + \cos^2 \varphi_0 = (v_0/A\omega)^2 + (x_0/A)^2 = 1.$$

Следовательно,

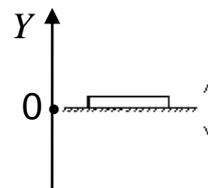
$$A = \sqrt{x_0^2 + (v_0 T / 2\pi)^2} \text{ и } \cos \varphi_0 = x_0 / A = 1 / \sqrt{1 + (v_0 T / 2\pi x_0)^2} .$$

Перемещение тела от начального положения до равновесного равно по величине x_0 . В равновесном положении $x = 0 = A \cdot \cos(\omega t + \varphi_0)$. Первый раз тело окажется в положении равновесия при значении фазы: $\omega \tau + \varphi_0 = \pi/2$. Это произойдёт в момент времени $\tau = (\pi/2 - \varphi_0)/\omega = T/4 - T\varphi_0/2\pi$.

$$\text{Ответ: } \tau = T/4 - (T/2\pi) \cdot \arccos \left[1 / \sqrt{1 + (v_0 T / 2\pi x_0)^2} \right] = T/8 \cong 0,39 \text{ с.}$$

Задача

- 1.4. Монета лежит на горизонтальной подставке, совершающей вертикальные колебания по закону: $y(t) = A \cdot \sin \omega t$, где $\omega = 10 \text{ с}^{-1}$. При каких амплитудах этих колебаний движение монеты будет гармоническим? На какой максимальной высоте H относительно среднего положения подставки окажется монета в течение первого периода колебаний подставки, если $A = 0,2 \text{ м}$. Ускорение свободного падения считать равным $g = 10 \text{ м/с}^2$.



Решение

По второму закону Ньютона для монеты $ma_y = N - mg$, где N – сила, действующая на монету со стороны подставки вверх (по оси Y), a_y – вертикальная проекция ускорения монеты. Движение монеты будет гармоническим до тех пор, пока она не начнёт «отрываться» от подставки. При гармоническом движении монеты её ускорение $a_y = \ddot{y} = -A\omega^2 \sin \omega t$. Началу отрыва монеты от подставки при постепенном увеличении амплитуды соответствует условие $N = 0$. При этом «пограничном» условии $g = A\omega^2 \sin \omega t$. Таким образом, при $A = g/\omega^2$ движение монеты ещё происходит по гармоническому закону (монета «теряет контакт» с подставкой пока только в верхних точках траектории); при $A > g/\omega^2$ движение монеты уже не будет гармоническим. В частности, при заданных условиях задачи движение монеты будет гармоническим при $A \leq 0,1$ м. При бóльших амплитудах монета начнет «подскакивать» над подставкой.

Определим, на какой максимальной высоте окажется монета в течение первого периода колебаний подставки при $A > g/\omega^2$. Моменту отрыва t_1 монеты от подставки соответствует условие $\sin \omega t_1 = g/A\omega^2$. В этот момент координата монеты $y_1 = A \cdot \sin \omega t_1 = g/\omega^2$, а её скорость $v_1 = \dot{y} = A\omega \cos \omega t_1 = A\omega \sqrt{1 - \sin^2 \omega t_1} = A\omega \sqrt{1 - (g/A\omega^2)^2}$. Начиная с этого момента, монета летит, как брошенное вверх со скоростью v_1 тело. Максимальную высоту, на которую поднимется монета (от этой точки), легко определить, например, пользуясь законом сохранения механической энергии:

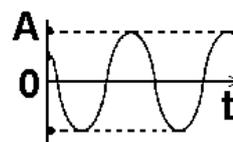
$h = (v_1^2/2g) = A^2\omega^2/2g - g/2\omega^2$. Максимальная высота подъёма монеты от среднего положения $H = h + y_1$.

Ответ: $H = A^2\omega^2/2g + g/2\omega^2 = 25$ см.

Задачи для самостоятельного решения

1.5. Точка колеблется вдоль оси X по закону: $x(t) = A\cos\omega t$. Построить зависимости: $x_1(t) = A\cos(\omega t + \pi/2)$, $x_2(t) = A\cos(\omega t + \pi)$ и $x_3(t) = A\sin(\omega t + \pi)$.

1.6. Частица движется по гармоническому закону, причём в начальный момент времени её смещение от положения равновесия равно половине максимального (см. рис.). Опишите её движение законами вида $x(t) = A \cdot \cos(\omega t + \varphi_0)$ и $A \cdot \sin(\omega t + \varphi_1)$.



1.7. Шарик падает на пол с высоты h . Если удар шарика о пол упругий, будет ли движение шарика (а) колебательным, (б) периодическим и (в) гармоническим? Что изменится, если удары шарика о пол неупругие?

1.8. Вектор, длина которого равна A , вращается против часовой стрелки с угловой скоростью ω . В начальный момент вектор составляет угол φ_0 с осью X . По какому закону изменяется проекция этого вектора на ось X ?

1.9. Частица колеблется вдоль оси X по закону: $x(t) = A\cos\omega t$. Построить зависимости: а) $x(t)$, $\dot{x}(t)$, $\ddot{x}(t)$; б) $\dot{x}(x)$ и $\ddot{x}(x)$.

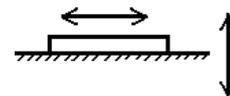
- 1.10.** Рыбка перемещается вдоль стенки аквариума по закону: $x(t) = 0,2\cos\pi t$ (м). Найти среднюю величину модуля скорости $\langle v \rangle$ и модуль средней скорости $|\langle \vec{v} \rangle|$ рыбки за один цикл.
- 1.11.** Частица колеблется по закону: $x(t) = 2\cos\pi t/3$ (м). Найти среднюю скорость $\langle \vec{v} \rangle$ частицы и средний модуль скорости $\langle v \rangle$ за время: а) от 1 с до 2 с; б) от 2 с до 4 с.
- 1.12.** Студент движется между химическим и физическим факультетами МГУ по закону $x(t) = 100 \cdot \cos\omega t$ (м). Считая, что его максимальная скорость равна $v_0 = \pi$ м/с, определите, за какое время τ он сможет преодолеть расстояние от химфака до памятника Ломоносову? Какими будут модуль его средней скорости $|\langle \vec{v} \rangle|$ и средний модуль скорости $\langle v \rangle$ за один полный цикл химфак–физфак–химфак?
- 1.13.** Лектор перемещается вдоль доски по закону $x(t) = 5 \cdot \sin\omega t$ (м). Его максимальная скорость при этом равна $v_m = 360$ м/час. Определите, какое время τ требуется лектору для того, чтобы пройти от одного крайнего положения до другого?
- 1.14.** В средней части траектории лектора из предыдущей задачи находится доска длиной 5 м. Определите, за какое время τ он проследует мимо доски?
- 1.15.** Зависимость скорости тела массы $m = 1$ кг от его координаты x представляет собой эллипс с полуосями $a = 1$ м и $b = 0,628$ м/с. Изобразить зависимости координаты и

импульса тела от времени. Чему равен период колебаний тела?

- 1.16.** Грузик на пружинке с коэффициентом жесткости k совершает гармонические колебания с амплитудой A . Площадь его фазовой траектории (зависимости импульса грузика от его координаты) равна S . Определить период колебаний грузика.
- 1.17.** Амплитуда колебаний грузика на пружинке возросла в два раза. Во сколько раз увеличились энергия колебаний (a) и площадь его фазовой траектории (b).
- 1.18.** Два тела массами $m_1 = 1$ кг и $m_2 = 2$ кг находятся на гладкой горизонтальной поверхности и связаны пружиной ($k = 1,5 \cdot 10^2$ Н/м), длина которой $L = 12$ см. Пружину сжимают на величину $\Delta L = 6$ см и без толчка отпускают. Какова частота возникших колебаний? Определите амплитуды колебаний каждого тела.
- 1.19.** Грузик подвешен на нерастяжимой нити, верхний конец которой перемещают по вертикали по закону: $y(t) = A \cdot \sin \omega t$. Величина A постепенно растет. При каких минимальных A колебания грузика станут негармоническими? В каких точках начнется отклонение от гармонического закона колебаний грузика?
- 1.20.** Брусок находится на горизонтальной  подставке (см. рис.), которая начинает вибрировать в горизонтальной плоскости по закону $x(t) = A \cdot \sin \omega t$. При какой минимальной амплитуде колебаний

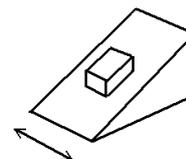
подставки движение бруска будет негармоническим, если коэффициент трения между ним и подставкой равен μ ?

1.21. Шайба находится на горизонтальной подставке, которая может вибрировать в



вертикальном и горизонтальном направлениях (см. рис.) по гармоническому закону с одной и той же частотой. При движении подставки в вертикальном направлении шайба начинает отрываться от подставки при амплитуде колебаний подставки A_1 , а при горизонтальном движении шайба начинает соскальзывать при амплитуде A_2 . Каков коэффициент трения шайбы о подставку?

1.22. * Брусок лежит на поверхности клина (см. рис.), составляющей с горизонтом угол $\alpha = 30^\circ$. Коэффициент трения между бруском и



клином $\mu = 0,7$. Клин начинает вибрировать вдоль его ребра по закону $A \cdot \cos 10t$ (м). При какой минимальной амплитуде колебаний клина брусок начнёт соскальзывать с его поверхности?

2. Свободные гармонические колебания одномерных механических и электрических осцилляторов

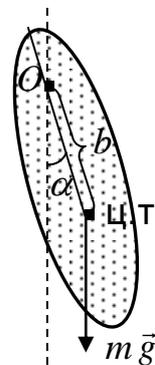
При отсутствии потерь энергии в системе колебания могут оказаться гармоническими. Это происходит тогда, когда процессы в ней допускают описание дифференциальным уравнением вида

$$\ddot{\xi} + \kappa \cdot \xi = 0, \quad (2.1)$$

относительно функции $\xi(t)$ – отклонения какого-либо параметра, характеризующего систему, от равновесного значения. Множитель κ – постоянный коэффициент. Уравнение (2.1) называется «дифференциальным уравнением гармонического осциллятора». Именно к такому виду приводятся уравнения, описывающие *малые* свободные колебания в хорошо известных простейших колебательных системах *в отсутствие потерь энергии*: грузика на пружине, математического маятника и колебательного (LC -) контура. Как следует из уравнения (1.4), константа κ равна квадрату частоты собственных гармонических (незатухающих) колебаний системы $\kappa = \omega_0^2$. Покажем, каким образом можно находить этот важный параметр ω_0 на примере несколько более сложных колебательных систем. Продемонстрируем, кроме того, как определяются амплитуда A и начальная фаза φ_0 из *начальных условий конкретной задачи*, т.е. способа возбуждения колебаний в системе.

Задача

2.1. Найти частоту малых свободных колебаний ω_0 физического маятника – тела произвольной формы, закрепленного на горизонтальной оси, не проходящей через его центр тяжести. Момент инерции тела относительно этой оси равен I_z , его масса m , а расстояние от оси до центра тяжести тела равно b .



Решение

При отклонении тела от положения устойчивого равновесия (когда ось вращения и центр тяжести находятся на одной вертикали) возникает момент силы тяжести, действующей на тело, направленный против вектора его углового смещения $\vec{\alpha}$. Уравнение динамики вращательного движения твёрдого тела относительно закреплённой оси имеет вид:

$$I_z \cdot \ddot{\alpha} = -mgb \cdot \sin \alpha .$$

Знак минус здесь обусловлен тем, что направления **векторов** момента силы тяжести и углового смещения при любом положении тела противоположны. Как мы видим, данное дифференциальное уравнение *не является линейным*. Однако при малых углах ($\alpha \ll 1$) $\sin \alpha \approx \alpha^*$ и уравнение приобретает знакомую форму (2.1):

$$\ddot{\alpha} + \frac{mgb}{I_z} \cdot \alpha = 0 .$$

Сравнивая это соотношение с уравнением (2.1), получаем частоту собственных незатухающих колебаний физического маятника:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{mgb}{I_z}} .$$

В частном случае математического маятника с учётом $b = l$ и $I_z = ml^2$ получим известное выражение:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}} .$$

Какова длина математического маятника, собственная частота которого совпадает с частотой данного физического маятника?

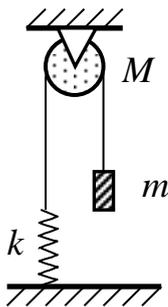
*) Заметим, что если углы отклонения не превышают $0,1 \text{ рад}$ ($5,7^\circ$), то отличие $\sin \alpha$ от α составляет всего $0,2\%$.

$$\sqrt{\frac{mgb}{I_z}} = \sqrt{\frac{g}{l_{np}}}, \quad l_{np} = \frac{I_z}{mb}.$$

Это значение называется *приведённой длиной* физического маятника.

Задача

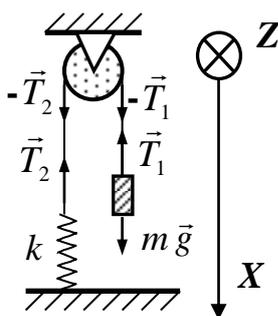
2.2. В устройстве, показанном на рисунке, блок представляет собой сплошной однородный цилиндр массой $M = 8 \text{ кг}$, который может вращаться вокруг оси без трения. Масса груза $m = 6 \text{ кг}$. Жёсткость пружины $k = 1000 \text{ Н/м}$. Груз удерживают в положении, при котором пружина не растянута.



Найти закон движения груза после его освобождения (без толчка). Проскальзывание нити по блоку отсутствует, а сама нить невесома и нерастяжима.

Решение

Выберем систему отсчёта, в которой одна координатная ось направлена вертикально вниз (OX), а другая (OZ) – перпендикулярно плоскости рисунка от нас (см. рис.). Пусть начало отсчёта на оси OX соответствует положению груза при недеформированной пружине. В этом случае координата x груза будет одновременно равна величине деформации пружины. Уравнение движения груза в проекции на ось OX можно записать



так:

$$m\ddot{x} = mg - T_1. \quad (1)$$

Уравнение динамики вращательного движения массивного блока в проекции на ось OZ имеет вид:

$$I_z \cdot \ddot{\alpha} = (T_1 - T_2) \cdot R, \quad (2)$$

где I_z – момент инерции блока относительно оси OZ , равный

$$I_z = \frac{MR^2}{2}. \quad (3)$$

Сила натяжения нити T_2 равна, по третьему закону Ньютона, силе упругости деформированной пружины:

$$T_2 = kx. \quad (4)$$

Наконец для линейного ускорения груза и углового ускорения блока с учётом условий нерастяжимости нити и отсутствия её проскальзывания по блоку выполняется уравнение кинематической связи:

$$\ddot{x} = R \cdot \ddot{\alpha}. \quad (5)$$

Совместное решение уравнений (1) – (5) приводит к уравнению:

$$\ddot{x} + \frac{2k}{2m + M} \left(x - \frac{mg}{k} \right) = 0. \quad (6)$$

Замена переменной $\xi = x - \frac{mg}{k}$ преобразует уравнение (6) к виду

(2.1), где роль ω_0^2 играет величина $\frac{2k}{2m + M}$. Таким образом,

движение груза в выбранной системе отсчёта происходит по закону:

$$x(t) = \frac{mg}{k} + A \cos(\omega_0 t + \varphi_0), \quad (7)$$

и представляет собой гармоническое колебание вблизи

положения равновесия $x_0 = \frac{mg}{k}$ с частотой $\omega_0 = \sqrt{\frac{2k}{2m + M}}$.

Покажем, каким образом можно определить амплитуду и начальную фазу колебаний груза, если известен способ

возбуждения колебаний в системе – то есть начальные условия.

Начальные условия движения в задаче таковы:

$$x(0) = 0, \quad \dot{x}(0) = 0.$$

Используя общее решение (7), имеем:

$$x(0) = 0 = \frac{mg}{k} + A \cos \varphi_0; \quad \dot{x}(0) = 0 = -A \omega_0 \sin \varphi_0.$$

Из второго уравнения следует, что $\varphi_0 = 0$, и после подстановки в первое получаем:

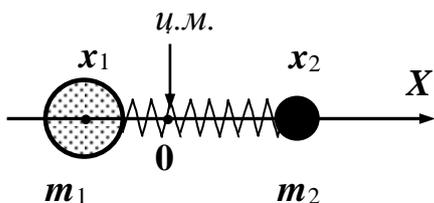
$$A = -\frac{mg}{k}.$$

Таким образом, окончательно закон движения груза после его освобождения можно записать в виде:

$$x(t) = \frac{mg}{k} \left(1 - \cos \sqrt{\frac{2k}{2m + M}} \cdot t \right).$$

Задача

2.3. Два шарика, массы которых m_1 и m_2 , могут скользить без трения по тонкому горизонтальному стержню (см. рис.). Шарики связаны невесомой пружинкой жёсткости k^*). Первоначально шарики смещают в противоположных направлениях и отпускают без толчка. Определить частоту ω_0 возникающих колебаний и максимальную относительную скорость шаров, если их первоначальное относительное смещение $\xi(0) = \xi_0$.



Решение

Направим координатную ось OX системы отсчёта вдоль стержня

*) Такая система моделирует свободную двухатомную молекулу.

вправо и за начало отсчёта выберем положение центра масс системы. Если координаты шариков до деформации пружины обозначить x_{10} и x_{20} , то очевидно, длина недеформированной пружины равна

$$l_0 = x_{20} - x_{10}.$$

Уравнение движения грузов по оси OX можно записать в виде:

$$m_1 \ddot{x}_1 = k(x_2 - x_1 - l_0), \quad (1)$$

$$m_2 \ddot{x}_2 = -k(x_2 - x_1 - l_0). \quad (2)$$

Величина, записанная в скобках, равна деформации пружины в процессе колебаний.

С математической точки зрения трудность решения данной системы дифференциальных уравнений состоит в том, что в каждое уравнение входят обе неизвестные функции – $x_1(t)$ и $x_2(t)$. Для преодоления этой трудности вычтем из уравнения (2) уравнение (1), поделив предварительно каждое на соответствующую массу:

$$\ddot{x}_2 - \ddot{x}_1 = -\left(\frac{k}{m_2} + \frac{k}{m_1}\right)(x_2 - x_1 - l_0).$$

Если ввести теперь новую переменную $\xi = (x_2 - x_1 - l_0)$, то уравнение приобретает вид (2.1), в котором роль ω_0^2 выполняет множитель $\left(\frac{k}{m_2} + \frac{k}{m_1}\right)$. Собственная частота, таким образом, может быть записана в виде:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{\mu}},$$

где $\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$ называется *приведённой массой* системы

(молекулы). Поскольку $(x_2 - x_1)$ – это длина пружины в процессе колебаний, очевидно, смысл введенной нами переменной ξ – деформация пружины (*равная относительно смещению шаров*) при колебаниях. Она-то и меняется по гармоническому закону с частотой ω_0 . Отметим, что центр масс системы в указанных условиях покоится. Исходя из начальных условий:

$$\xi(0) = \xi_0, \quad \dot{\xi}(0) = 0,$$

находим

$$\xi(t) = \xi_0 \cdot \cos \omega_0 t.$$

Тогда относительная скорость: $\dot{\xi}(t) = -\xi_0 \cdot \omega_0 \cdot \sin \omega_0 t = -v_{\max} \cdot \sin \omega_0 t$.

А максимальная относительная скорость отсюда равна

$$v_{\max} = \xi_0 \cdot \omega_0 = \xi_0 \cdot \sqrt{\frac{k}{\mu}}.$$

Задачи для самостоятельного решения

2.4. Рассмотрим ситуацию, моделирующую процесс столкновение атома и молекулы. Первоначально система, описанная в задаче 2.3, неподвижна и пружинка не деформирована. Первому шару сообщается импульс $p_0 = m_1 v_0$ в сторону второго (удар налетающего атома). Определите скорость v_c центра масс системы, и частоту ω_0 возникающих колебаний.

2.5. В условиях задачи 2.4 определите: а) амплитуду A изменения деформации пружины, б) энергию поступательного $E_{\text{пост}}$ и колебательного $E_{\text{кол}}$ движения системы.

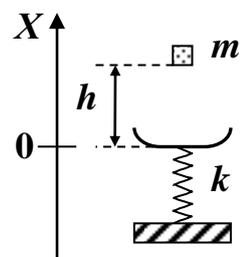
2.6. Потенциальная энергия частицы массы m в одномерном силовом поле зависит от её координаты x по закону

$U(x) = U_0(1 - \cos ax)$, U_0 и a – постоянные. Найдите частоту малых колебаний этой частицы около положения равновесия.

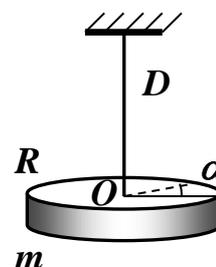
2.7. Груз массой $m = 0,2$ кг, подвешенный на пружине жёсткостью $k = 20$ Н/м, лежит на подставке так, что пружина не деформирована. Подставку убирают, и груз начинает двигаться. Найдите закон движения груза и его максимальную скорость.

2.8. С горизонтальной закреплённой пружиной, жёсткость которой $k = 25$ Н/м, связано тело массой $M = 1$ кг, лежащее на абсолютно гладком столе. В это тело попадает и застревает в нём пуля массой $m = 10$ г, летевшая вдоль оси пружины со скоростью $v = 200$ м/с. Определите период и амплитуду возникших колебаний. Найдите зависимость координаты тела от времени, прошедшего после попадания пули в тело.

2.9. Тело массой m падает с высоты h на чашу пружинных весов и прилипает к ней. Определите зависимость координаты чаши от времени после соударения. Масса чаши и пружины пренебрежимо мала, жёсткость пружины k .



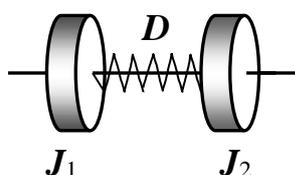
2.10. К потолку на тонкой проволоке подвешен однородный диск массы $m = 0,2$ кг и радиуса $R = 20$ см (рис.). Модуль кручения проволоки*) равен $D = 0,1$ Н·м/рад. Определите:



*) коэффициент пропорциональности между возникающим вращательным моментом упругих сил и углом закручивания

а) частоту ω_0 малых крутильных колебаний диска, б) амплитуду A и начальную фазу φ_0 колебаний, если в начальный момент диск повернули на угол $\alpha = 0,2 \text{ рад}$ и сообщили ему начальную угловую скорость $\Omega = 1 \text{ рад/с}$ в направлении поворота.

2.11. Два диска закреплены соосно на одном тонком стержне,



имеющем модуль кручения $D = 1,5 \text{ Н}\cdot\text{м/рад}$.

Радиус дисков одинаков и равен $R = 0,2 \text{ м}$.

Массы дисков равны: $m_1 = 1 \text{ кг}$ и $m_2 = 3 \text{ кг}$.

Диски поворачивают в противоположные

стороны и отпускают. а) Чему равна частота ω_0 малых крутильных колебаний дисков? б) Какой будет частота, если один из дисков (например, второй) закрепить.

2.12. Физический маятник представляет собой шар радиуса $R = \frac{2}{11} \text{ м}$,

висящий на тонком невесомом стержне длины $l = R$. В начальный момент времени маятнику сообщили угловую скорость $\Omega = 0,25 \text{ рад/с}$. Найдите зависимость от времени угла отклонения маятника от вертикали $\varphi(t)$.

2.13. Цилиндрический поплавок высоты $h = 2 \text{ см}$ плавает на поверхности воды. Определите период малых колебаний поплавок по вертикали, которые возникают, если его слегка погрузить в воду и отпустить. Плотность материала поплавок $\rho = 800 \text{ кг/м}^3$, плотность воды $\rho_0 = 1000 \text{ кг/м}^3$.

2.14. В стеклянную U-образную трубочку налита ртуть так, что

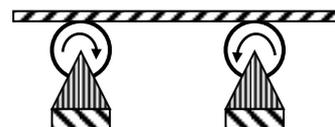
весь столбик ртути имеет длину $l = 20$ см. После заполнения трубочку слегка наклонили, и возвратили в вертикальное положение, отчего ртуть начала колебаться. Определите период T_0 этих колебаний, пренебрегая трением.

2.15. На середине натянутой струны длины $l = 1$ м укреплен шарик массой $m = 50$ г. Найдите частоту малых поперечных колебаний этого шарика. Силу натяжения струны считать постоянной и равной $T = 20$ Н. Массой струны и силой тяжести пренебречь.

2.16. Неподвижный груз массы m , висящий на пружине, растягивает её на величину x_1 . Груз дополнительно оттягивают вниз на расстояние x_0 и сообщают ему скорость v , направленную вертикально вверх. Найдите закон движения груза относительно его положения при нерастянутой пружине $x = x(t)$.

2.17. * Небольшой шарик массой $m = 30$ г, подвешенный на нерастяжимой изолирующей нити на высоте $h = 10$ см от большой горизонтальной проводящей плоскости, совершает малые колебания. После того как шарик сообщили некоторый заряд, период колебаний изменился в $n = 2$ раза. Найдите этот заряд.

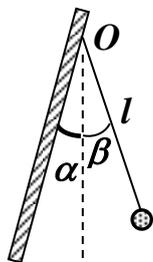
2.18. * Доску положили на два быстро вращающихся навстречу друг другу (в



противоположных направлениях) цилиндрических ролика. Расстояние между осями роликов $l = 80$ см, коэффициент трения скольжения между стержнем и роликами $\mu = 0,16$.

Докажите, что стержень будет совершать гармонические колебания и найдите их частоту ω_0 .

2.19. * Маленький упругий шарик подвешен на нити длиной l у

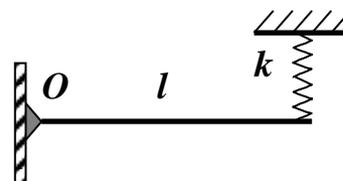


стены, образующей с вертикалью угол α . Его отклонили от положения равновесия на угол $\beta > \alpha$ и отпустили. Считая, что $\beta \ll 1$ найдите период колебаний шарика, пренебрегая временем соударения шарика со стенкой.

2.20. Однородный стержень длиной $l = 15 \text{ см}$ может поворачиваться без трения вокруг горизонтальной оси, перпендикулярной к стержню и проходящей через его верхний конец. Стержень отклонили от вертикали на угол $\alpha_0 = 0,07 \text{ рад}$ ($\approx 4^\circ$) и отпустили без толчка. Найдите зависимость от времени угла отклонения стержня от вертикали $\alpha(t)$.

2.21. Конденсатор с ёмкостью C , заряженный до напряжения U_0 , замыкается на катушку с индуктивностью L . Найдите закон изменения со временем заряда на конденсаторе $q(t)$. Чему равна амплитуда I_m силы тока в этой цепи? Активным сопротивлением пренебречь.

2.22. Однородный стержень массы $m = 1 \text{ кг}$ совершает малые колебания вокруг горизонтальной оси, проходящей



через точку O . Правый конец стержня подвешен на невесомой пружине жёсткости $k = 300 \text{ Н/см}$. Найдите

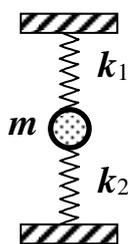
частоту ω_0 колебаний стержня, если в положении равновесия он горизонтален. Трением в шарнире пренебречь.

- 2.23.** Определите, чему равна максимальная скорость в процессе малых продольных колебаний тела массы $m = 0,2 \text{ кг}$ в системе, показанной на рисунке, если тело первоначально отклонили от положения равновесия на $x_0 = 1 \text{ см}$ и отпустили без толчка.

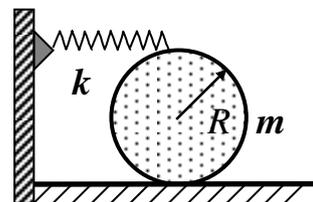


Жёсткости пружин равны $k_1 = 12 \text{ Н/м}$ и $k_2 = 8 \text{ Н/м}$, а их массы пренебрежимо малы. В положении равновесия пружинки не деформированы. Трением пренебречь. Найдите также закон движения тела $x = x(t)$.

- 2.24.** В системе, показанной на рисунке, груз удерживают в положении, при котором пружины не деформированы. В момент времени $t = 0$ груз отпустили без толчка. Масса груза $m = 3 \text{ г}$, жёсткости пружин равны $k_1 = 2 \text{ Н/м}$ и $k_2 = 1 \text{ Н/м}$. Найдите зависимость координаты груза от времени. Массы пружин пренебрежимо малы.



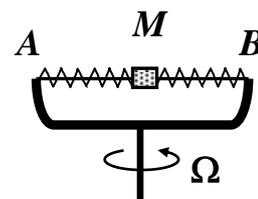
- 2.25.** Сплошной однородный цилиндр массы $m = 1 \text{ кг}$ совершает малые колебания под действием пружины с жёсткостью $k = 150 \text{ Н/м}$. Найдите частоту этих колебаний в отсутствие проскальзывания цилиндра по горизонтальной опоре. Масса пружины пренебрежимо мала.



- 2.26. *** В кабине самолета подвешен маятник. Когда самолет

летит без ускорения, маятник качается с частотой ω_0 . Какова будет частота колебаний маятника, если самолет взлетает с ускорением \vec{a} , направленным под углом α к горизонту? Отдельно рассмотрите случай, когда $a = g$ и $\alpha = 0$.

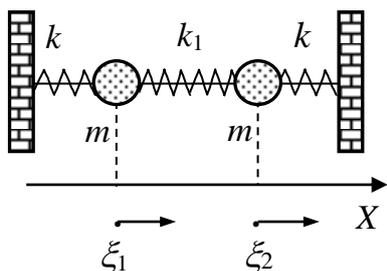
- 2.27. * Грузик массы $M = 0,3 \text{ кг}$ может скользить без трения вдоль горизонтального стержня в установке, изображённой на рисунке. Грузик соединён двумя одинаковыми пружинками жёсткостью $k = 15 \text{ Н/м}$, с точками A и B установки.



Установка вращается с постоянной угловой скоростью $\Omega = 6 \text{ рад}\cdot\text{с}$ вокруг вертикальной оси, проходящей через середину стержня. а) Найдите частоту малых колебаний грузика. б) При какой угловой скорости Ω колебания не возникнут?

3. Колебания в системе связанных осцилляторов

Любая система из N связанных одномерных осцилляторов может быть описана системой N дифференциальных уравнений, в каждое из которых в общем случае входит более, чем одна функция времени. Например, недиссипативная система, состоящая из двух одинаковых механических осцилляторов, между



которыми имеется упругое взаимодействие (рис.3.1), в соответствии со вторым законом Ньютона описывается двумя уравнениями:

$$m \ddot{\xi}_1 = -k\xi_1 - k_1(\xi_1 - \xi_2), \quad (3.1)$$

$$m \ddot{\xi}_2 = -k\xi_2 + k_1(\xi_1 - \xi_2). \quad (3.2)$$

Рис. 3.1

Здесь ξ_1 и ξ_2 – отклонения левой и правой масс m от положений равновесия, k и k_1 – коэффициенты упругости крайних и средней пружин, соответственно. Эти уравнения в общем случае не являются дифференциальными уравнениями гармонических колебаний, в каждое из них входят две неизвестные функции времени – $\xi_1(t)$ и $\xi_2(t)$. Можно, однако, преобразовать эту систему таким образом, чтобы в каждое уравнение входила только одна функция времени и её вторая производная. В рассматриваемом случае такое преобразование легко провести, складывая и вычитая почленно уравнения (3.1) и (3.2). В результате такой процедуры получаем:

$$m \ddot{\xi}_I = -k\xi_I, \quad \text{где } \xi_I = \xi_1 + \xi_2; \quad (3.3)$$

$$m \ddot{\xi}_{II} = -(k + 2k_1)\xi_{II}, \quad \text{где } \xi_{II} = \xi_1 - \xi_2. \quad (3.4)$$

Уравнения (3.3) и (3.4) уже являются дифференциальными уравнениями, описывающими гармонические колебания. Они

имеют решения вида (т.н. *нормальные колебания*, или *нормальные моды*):

$$\xi_I = A_I \cdot \cos(\omega_I t + \varphi_I), \quad \text{где } \omega_I = \sqrt{\frac{k}{m}}; \quad (3.3,a)$$

$$\xi_{II} = A_{II} \cdot \cos(\omega_{II} t + \varphi_{II}), \quad \text{где } \omega_{II} = \sqrt{\frac{k + 2k_1}{m}}. \quad (3.4,a)$$

Соответствующие новые переменные ξ_I и ξ_{II} называются *нормальными координатами*. Движение каждого из осцилляторов, как следует из (3.3) и (3.4), представляет собой наложение *нормальных мод*:

$$\xi_1 = (\xi_I + \xi_{II})/2; \quad \xi_2 = (\xi_I - \xi_{II})/2. \quad (3.5)$$

Если в рассматриваемой системе возбуждена только первая нормальная мода ($\xi_{II} = 0$), то $\xi_1 = \xi_2 = \xi_I/2$ и оба осциллятора на рис.3.1 совершают *синфазные* гармонические колебания с частотой ω_I (при этом средняя пружина «не работает» и частота ω_I совпадает с собственной частотой одного свободного осциллятора). При возбуждении только второй нормальной моды ($\xi_I = 0$) из (3.5) следует, что $\xi_1 = -\xi_2 = \xi_{II}/2$, т.е. осцилляторы совершают гармонические колебания с частотой ω_{II} , двигаясь в *противофазе*. В общем случае колебательное движение каждого осциллятора представляет собой суперпозицию двух нормальных гармонических колебаний с частотами ω_I и ω_{II} . Амплитуды (A_I и A_{II}) и начальные фазы (φ_I и φ_{II}) нормальных мод можно определить из начальных условий конкретной физической задачи – начальных смещений и начальных скоростей каждого осциллятора.

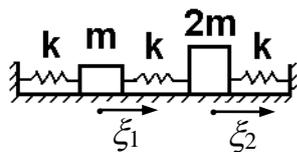


Рис. 3.2

динамики таковы:

$$m\ddot{\xi}_1 = -k\xi_1 - k(\xi_1 - \xi_2), \quad (3.6)$$

$$2m\ddot{\xi}_2 = -k\xi_2 + k(\xi_1 - \xi_2). \quad (3.7)$$

Разделив (3.6) на m , а (3.7) на $2m$ и обозначая $k/m = a$, получаем:

$$\ddot{\xi}_1 = -2a\xi_1 + a\xi_2, \quad (3.6,a)$$

$$\ddot{\xi}_2 = -a\xi_2 + a\xi_1/2. \quad (3.7,a)$$

Будем искать нормальные координаты ξ в виде линейной комбинации ξ_1 и ξ_2 :

$$\xi = \xi_1 + n\xi_2, \quad (3.8)$$

где n – искомые постоянные коэффициенты (разные для разных нормальных мод). Умножим (3.7,a) на n и сложим почленно (3.6,a) и (3.7,a):

$$\ddot{\xi}_1 + n\ddot{\xi}_2 = -a(2 - n/2)\xi_1 - a(n - 1)\xi_2. \quad (3.9)$$

Для того, чтобы (3.9) было дифференциальным уравнением гармонических колебаний, необходимо, чтобы коэффициент перед ξ_2 был в n раз больше, чем перед ξ_1 :

$$a(n - 1) = na(2 - n/2), \text{ или иначе } n^2 - 2n - 2 = 0. \quad (3.10)$$

Из уравнения (3.10) получаем два возможных значения n , соответствующих двум нормальным модам:

$$n_I = 1 + \sqrt{3} \quad \text{и} \quad n_{II} = 1 - \sqrt{3}. \quad (3.11)$$

Поскольку $(\ddot{\xi}_1 + n\ddot{\xi}_2) = -\omega^2(\xi_1 + n\xi_2)$, из уравнения (3.9) следует, что $a(2 - n/2) = \omega^2$ (здесь ω – собственная частота соответствующих нормальных колебаний). Используя (3.11), получаем частоты двух нормальных мод:

$$\omega_I^2 = (3 - \sqrt{3}) \frac{k}{2m} \quad \text{и} \quad \omega_{II}^2 = (3 + \sqrt{3}) \frac{k}{2m}. \quad (3.12)$$

Нормальные координаты равны при этом:

$$\xi_I = \xi_1 + n_I \xi_2; \quad \xi_{II} = \xi_1 + n_{II} \xi_2. \quad (3.8,a)$$

Если в системе возбуждена только первая мода ($\xi_{II} = 0$), то при этом из (3.8,a) и (3.11) следует, что отношение амплитуд колебаний двух осцилляторов $C_I = (\xi_1/\xi_2)_I = -n_{II} = (\sqrt{3} - 1) \cong 0,73$. Аналогично, при возбуждении только второй моды $C_{II} = (\xi_1/\xi_2)_{II} = -n_I = -(\sqrt{3} + 1) \cong -2,73$. Первой (низкочастотной) моде, как и для «симметричной» системы (рис. 3.1), соответствует синфазное движение обоих осцилляторов, второй (высокочастотной) – противофазное. Однако амплитуды колебаний двух осцилляторов теперь разные.

При возбуждении в колебательной системе только одной нормальной моды колебания отдельных осцилляторов происходят по гармоническому закону либо в фазе, либо в противофазе. Поэтому определить частоты нормальных колебаний можно следующим *общим методом*.

Будем искать решение уравнений (3.6,a) и (3.7,a) в виде:

$$\xi_1 = A \cos \omega t, \quad \xi_2 = B \cos \omega t, \quad (3.13)$$

где A и B – амплитуды колебаний, ω – искомая частота нормальных колебаний. После подстановки (3.13) в (3.6,a) и (3.7,a) получаем два уравнения с двумя неизвестными (ω и $C = A/B$):

$$\omega^2 C = 2aC - a, \quad (3.6, б)$$

$$\omega^2 = a - aC/2. \quad (3.7, б)$$

Легко убедиться, что решения уравнений (3.6, б) и (3.7, б) для частот нормальных мод (ω_I и ω_{II}) и отношений амплитуд колебаний отдельных осцилляторов C_I и C_{II} совпадают с полученными ранее. Поскольку $C_I = -n_{II}$, а $C_{II} = -n_I$, легко найти линейные комбинации координат осцилляторов ξ_1 и ξ_2 , соответствующие двум колебательным модам (3.8).

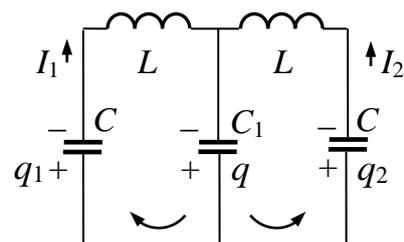


Рис. 3.3

Покажем, что аналогично решаются задачи, в которых требуется найти колебательные характеристики системы связанных электрических контуров. Пусть, например, нужно определить, как изменяются со временем заряды на конденсаторах в системе, состоящей из двух одинаковых LC -контуров. Связь между контурами осуществляется через конденсатор C_1 (рис. 3.3).

Совершая обходы в указанных направлениях по двум малым контурам и, используя второе правило Кирхгофа, получаем:

$$\frac{q_1}{C} - \frac{q}{C_1} = -L \frac{dI_1}{dt}, \quad (3.14)$$

$$\frac{q_2}{C} - \frac{q}{C_1} = -L \frac{dI_2}{dt}. \quad (3.15)$$

Здесь q_1 , q_2 и q – заряды на левом, правом и среднем конденсаторах, соответственно; I_1 и I_2 – токи через левый и правый конденсаторы. Поскольку $I_1 = \frac{dq_1}{dt}$, а $I_2 = \frac{dq_2}{dt}$, система уравнений (3.14) и (3.15) преобразуется к виду:

$$L\ddot{q}_1 + q_1/C - q/C_1 = 0, \quad (3.14, a)$$

$$L\ddot{q}_2 + q_2/C + q/C_1 = 0. \quad (3.15, б)$$

Сложим, а затем вычтем почленно уравнения (3.14,а), (3.15,а). Учитывая, что из-за электронейтральности системы $q_1 + q_2 + q = 0$, можно получить два независимых дифференциальных уравнения, описывающих *нормальные колебания*:

$$L\ddot{q}_I + q_I/C + 2q_I/C_1 = 0, \quad (3.16)$$

$$L\ddot{q}_{II} + q_{II}/C = 0. \quad (3.17)$$

Уравнения полностью (3.16) и (3.17) аналогичны уравнениям (3.4) и (3.3) соответственно. Здесь *нормальные координаты* $q_I = q_1 + q_2$ и $q_{II} = q_1 - q_2$. Решения уравнений (3.16) и (3.17) представляют собой *нормальные моды*:

$$q_I = Q_I \cdot \cos(\omega_I t + \varphi_I), \quad \text{где } \omega_I^2 = \frac{1}{L} \left(\frac{1}{C} + \frac{2}{C_1} \right), \quad (3.16, a)$$

$$q_{II} = Q_{II} \cdot \cos(\omega_{II} t + \varphi_{II}), \quad \text{где } \omega_{II} = \frac{1}{\sqrt{LC}}. \quad (3.17, a)$$

Решения (3.16,а) и (3.17,б) аналогичны (3.3,а) и (3.3,б) с той только разницей, что низкочастотной моде соответствует в данном случае нормальная координата q_{II} , а высокочастотной – q_I . На рис. 3.4 показаны направления токов в двух контурах в некоторый произвольный момент времени для низкочастотной (а) и высокочастотной (б) мод. Из рисунка видно, что для низкочастотной моды конденсатор C_1 вообще не перезаряжается, а для высокочастотной – заряжается в два раза больше, чем «основные» конденсаторы C .

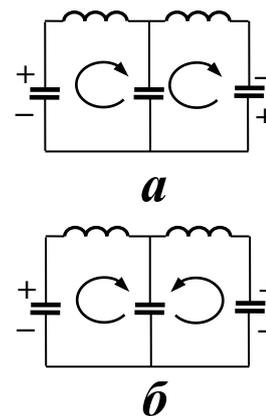
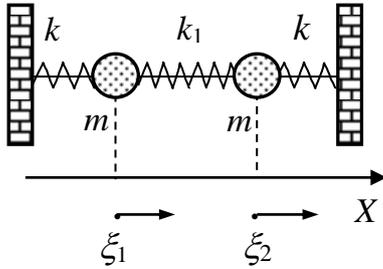


Рис. 3.4

Разберём несколько задач по рассматриваемой теме

Задача

3.1. В начальный момент времени оба тела в системе, представленной на рисунке, отклоняют по оси X на



одинаковое расстояние b вправо и отпускают. Считая, что трение отсутствует, найти зависимости от времени отклонений тел от положений равновесия $\xi_1(t)$ и $\xi_2(t)$.

Решение

Воспользуемся решением задачи, рассмотренной в начале данного параграфа (см. (3.3) – (3.4)):

$$\xi_1 = \frac{1}{2} [A_I \cos(\omega_I t + \varphi_I) + A_{II} \cos(\omega_{II} t + \varphi_{II})], \quad (3.18)$$

$$\xi_2 = \frac{1}{2} [A_I \cos(\omega_I t + \varphi_I) - A_{II} \cos(\omega_{II} t + \varphi_{II})]. \quad (3.19)$$

В начальный момент времени:

$$\xi_1(0) = \frac{1}{2} (A_I \cos \varphi_I + A_{II} \cos \varphi_{II}) = b, \quad (3.18,a)$$

$$\xi_2(0) = \frac{1}{2} (A_I \cos \varphi_I - A_{II} \cos \varphi_{II}) = b, \quad (3.19,a)$$

$$\dot{\xi}_1(0) = \frac{1}{2} (-A_I \omega_I \sin \varphi_I - A_{II} \omega_{II} \sin \varphi_{II}) = 0, \quad (3.18,b)$$

$$\dot{\xi}_2(0) = \frac{1}{2} (-A_I \omega_I \sin \varphi_I + A_{II} \omega_{II} \sin \varphi_{II}) = 0, \quad (3.19,b)$$

Суммируя (3.18,b) и (3.19,b), получаем, что $\sin \varphi_{I,II} = 0$, следовательно, $\varphi_{I,II} = 0$. Из (3.18,a) и (3.19,a) имеем $A_I = 2b$, $A_{II} = 0$. Отсюда следует, что в рассматриваемой ситуации возбуждается

только первая низкочастотная нормальная мода. Искомые зависимости смещений двух тел от времени выглядят так:

$$\xi_1(t) = \xi_2(t) = b \cdot \cos \omega_1 t, \quad (3.20)$$

Собственная частота нормальных колебаний ω_1 была определена нами ранее (см. (3.3,а)).

Задача

3.2. В начальный момент времени оба тела задачи 3.1 отклоняют на одну и ту же величину b от положения равновесия, но в разные стороны. Найдём зависимости $\xi_1(t)$ и $\xi_2(t)$.

Решение

В данном случае начальные условия записываются следующим образом:

$$\xi_1(0) = \frac{1}{2}(A_I \cos \varphi_I + A_{II} \cos \varphi_{II}) = b, \quad (3.18, \varepsilon)$$

$$\xi_2(0) = \frac{1}{2}(A_I \cos \varphi_I - A_{II} \cos \varphi_{II}) = -b, \quad (3.19, \varepsilon)$$

Два других условия аналогичны (3.18,б) и (3.19,б). Как и в задаче 3.1, из них следует $\varphi_I = \varphi_{II} = 0$. Суммируя и вычитая (3.18,ε) и (3.19,ε), получаем $A_I = 0$, $A_{II} = 2b$; таким образом, в системе возбуждается только высокочастотная нормальная мода (с частотой $\omega_{II} = \sqrt{\frac{k + 2k_1}{m}}$ – см. (3.3,б)):

$$\xi_1(t) = b \cdot \cos \omega_{II} t, \quad \xi_2(t) = -b \cdot \cos \omega_{II} t. \quad (3.21)$$

Задача

3.3. В системе, состоящей, из двух связанных механических осцилляторов (см. задачу 3.1) в начальный момент времени тело 1 смещают по оси X на $2b$ (тело 2 при этом закреплено в

равновесном положении). Найти зависимости смещения обоих тел от времени после того, как их отпускают.

Решение:

Используем общее решение задачи (3.3) – (3.4) и начальные условия (3.18,б) – (3.19,б), вместо условий (3.18,а) и (3.19,а), запишем:

$$\xi_1(0) = \frac{1}{2}(A_I \cos \varphi_I + A_{II} \cos \varphi_{II}) = 2b, \quad (3.18, \delta)$$

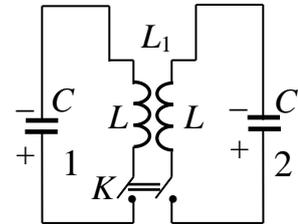
$$\xi_2(0) = \frac{1}{2}(A_I \cos \varphi_I - A_{II} \cos \varphi_{II}) = 0. \quad (3.19, \delta)$$

Как и в задаче 3.1, из (3.18,б) – (3.19,б) следует, что $\varphi_I = \varphi_{II} = 0$. Складывая и вычитая левые и правые части соотношений (3.18,δ) и (3.19,δ), получим: $A_I = A_{II} = 2b$. В искомом решении представлены в равной степени оба типа нормальных колебаний:

$$\begin{aligned} \xi_1(t) &= b \cdot \cos \omega t + b \cdot \cos \omega_{II} t, \\ \xi_2(t) &= b \cdot \cos \omega t - b \cdot \cos \omega_{II} t. \end{aligned} \quad (3.22)$$

Задача

3.4. В системе, состоящей из двух связанных индуктивно контуров 1 и 2 (L_1 – коэффициент взаимной индукции) в исходном состоянии ключ K разомкнут; левый конденсатор несет заряд $2q_0$, правый – не заряжен. Найти зависимости зарядов на конденсаторах от времени после замыкания ключа K .



Решение

Как и при решении задачи о контурах с ёмкостной связью, используем второе правило Кирхгофа

$$\frac{q_1}{C} = -L \frac{dI_1}{dt} - L_1 \frac{dI_2}{dt}, \quad (3.14)$$

$$\frac{q_2}{C} = -L \frac{dI_2}{dt} - L_1 \frac{dI_1}{dt} . \quad (3.15)$$

Здесь q_1, q_2 – заряды на левом и правом конденсаторах; I_1 и I_2 – силы токов в контурах 1 и 2. Далее задача решается совершенно аналогично предыдущей с той разницей, что величины ξ_1, ξ_2 и b заменяются на q_1, q_2 и q_0 . Соответственно, решение имеет вид:

$$\begin{aligned} q_1(t) &= q_0 \cos \omega_1 t + q_0 \cos \omega_{II} t , \\ q_2(t) &= q_0 \cos \omega_1 t - q_0 \cos \omega_{II} t . \end{aligned} \quad (3.23)$$

Частоты нормальных колебаний определяются соотношениями:

$$\omega_1 = \frac{1}{\sqrt{(L+L_1)C}} = \frac{1}{\sqrt{LC(1+k)}} = \frac{\omega_0}{\sqrt{1+k}} , \quad (3.24)$$

$$\omega_{II} = \frac{1}{\sqrt{(L-L_1)C}} = \frac{1}{\sqrt{LC(1-k)}} = \frac{\omega_0}{\sqrt{1-k}} , \quad (3.25)$$

где $k = L_1/L$ – коэффициент связи между контурами.

Задача

3.5. Изобразить графически зависимости от времени зарядов на обоих конденсаторах для задачи 3.4, если $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} = 2\pi c^{-1}$, а коэффициент связи между контурами $k = 0,1$.

Решение

Зависимости $q_1(t)$ и $q_2(t)$ имеют вид (3.23), где нормальные частоты $\omega_1 = \frac{\omega_0}{\sqrt{1+k}}$, $\omega_{II} = \frac{\omega_0}{\sqrt{1-k}}$. Подставляя числа, получим $\omega_1 = 0,95\omega_0$, $\omega_{II} = 1,05\omega_0$. Представим (3.23) в виде:

$$\begin{aligned} q_1(t) &= 2q_0 \cos\left(\frac{\omega_{II} - \omega_1}{2} t\right) \cdot \cos\left(\frac{\omega_{II} + \omega_1}{2} t\right), \\ q_2(t) &= 2q_0 \sin\left(\frac{\omega_{II} - \omega_1}{2} t\right) \cdot \sin\left(\frac{\omega_{II} + \omega_1}{2} t\right). \end{aligned} \quad (3.26)$$

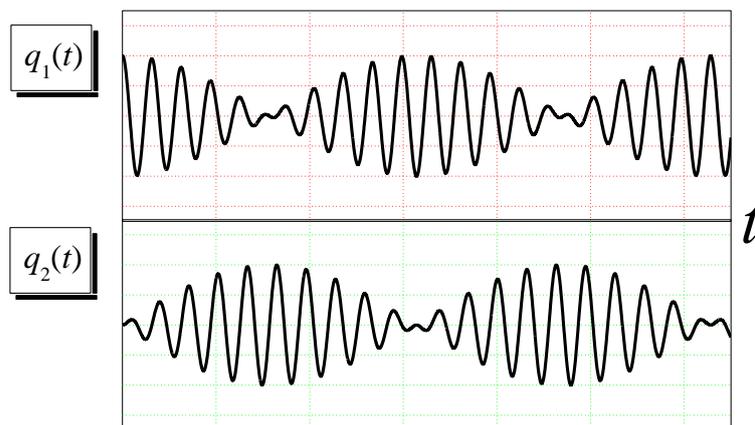
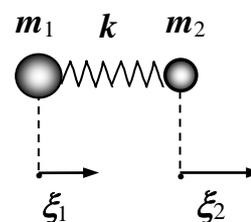


Рис. 3.5

Видно (см. рис.3.5), что эти зависимости представляют собой так называемые "биения" – колебания частотой ω_0 с медленно меняющейся амплитудой (частота «биений» $\omega_b = \frac{\omega_{II} - \omega_I}{2}$). Обратим внимание, что энергия постоянно как бы "перетекает" от одного контура к другому (но *обмена энергий между модами нет!*).

Задача

3.6. Найти *общим методом* (см. стр.27) собственную частоту колебаний двухатомной молекулы (массы атомов m_1 и m_2 , коэффициент упругой связи k).



Решение

Уравнения динамики для каждого атома выглядят так:

$$m_1 \ddot{\xi}_1 = -k(\xi_1 - \xi_2), \quad (3.27)$$

$$m_2 \ddot{\xi}_2 = k(\xi_1 - \xi_2). \quad (3.28)$$

Решение этой системы ищем в виде (3.13):

$$\xi_1 = A \cos \omega t, \quad \xi_2 = B \cos \omega t.$$

Подставляя (3.13) в (3.27) и (3.28), получаем систему

уравнений:

$$-k \cdot (A - B) = -m_1 \omega^2 A, \quad (3.29)$$

$$k \cdot (A - B) = -m_2 \omega^2 B, \quad (3.30)$$

Суммируя (3.29) и (3.30) имеем $m_1 \omega^2 A = -m_2 \omega^2 B$, т.е. $B = -A \cdot m_1/m_2$. После подстановки B легко найти искомую величину:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{\mu}}, \quad \mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}. \quad (3.31)$$

Задачи для самостоятельного решения.

- 3.7.** Система состоит из двух одинаковых осцилляторов, связанных между собой пружинкой (см. рис. 3.1). Как нужно вывести эту систему из равновесия, чтобы колебания обоих тел после прекращения воздействия были гармоническими?
- 3.8.** Система состоит из двух одинаковых осцилляторов, связанных между собой пружинкой (см. рис. 3.1) Параметры m , k и k_1 известны. В начальный момент времени левое тело толкают по оси X со скоростью v_0 . Определите законы изменения координат каждого из тел после этого.
- 3.9.** Для системы, описанной в предыдущей задаче, определите энергию, запасенную в каждой нормальной моде колебаний.
- 3.10.** В системе, состоящей, из двух связанных механических осцилляторов (см. задачу 3.1) в начальный момент времени тело 1 смещают по оси X на $2b$ (тело 2 при этом закреплено в равновесном положении). Изобразите зависимости от времени смещений обоих тел, если частоты двух нормальных колебаний этой системы отличаются на 10% ($\omega_{II} = 1,1 \omega_I$).

3.11. Определите частоты нормальных колебаний и нормальные координаты для системы, показанной на рисунке. Массы

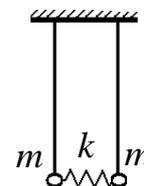


обоих тел равны m , а коэффициенты жёсткости обеих пружинок – k .

3.12. Система состоит из двух одинаковых дисков, связанных одинаковыми пружинами. Модуль кручения*) пружин одинаков и равен D . Определите частоты нормальных колебаний этой системы, если момент инерции каждого диска J .



3.13. Два одинаковых математических маятника длиной l связаны пружиной с коэффициентом жесткости k . Найдите частоты нормальных колебаний этой системы.

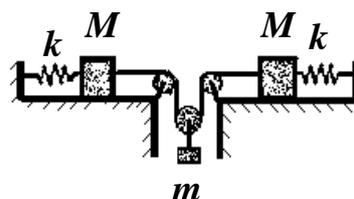


3.14. Два одинаковых математических маятника (длина каждого равна l) связаны последовательно. Определите частоты нормальных колебаний этой системы.



3.15. В начальный момент времени верхний грузик системы математических маятников из предыдущей задачи смещают вправо на $\Delta x_1 = 1$ см. Как нужно сместить в этот момент нижний грузик Δx_2 , чтобы при освобождении грузиков оба они совершали гармонические колебания?

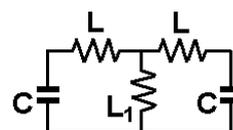
3.16. На рисунке показана система, состоящая из двух одинаковых механических



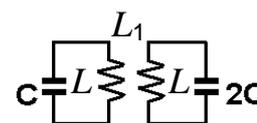
*) См. примечание на стр. 19 раздела 2.

осцилляторов (величины M и k известны), связь между которыми осуществляется через массу m^{**}). Блоки, нити и пружины считать невесомыми, а нити – нерастяжимыми. Найдите частоты нормальных колебаний этой системы.

- 3.17.** Два одинаковых колебательных контура (L, C известны) связаны между собой индуктивностью L_1 . Найдите частоты нормальных колебаний этой системы.

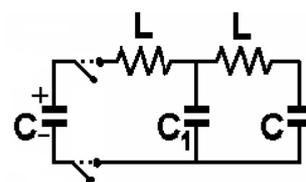


- 3.18.** * Связь между двумя колебательными контурами с разными ёмкостями (C и $2C$) и одинаковыми индуктивностями (L) осуществляется через взаимную индукцию ($L_1 = L/2$). Найдите частоты нормальных колебаний этой системы и нормальные «координаты» q_I и q_{II} .



- 3.19.** Параллельно одному колебательному контуру (L, C) подключают другой (L_1, C_1). Сколько нормальных мод будет у этой системы? Найдите частоты её собственных колебаний.

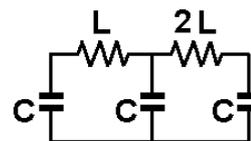
- 3.20.** Сначала левый конденсатор заряжают до разности потенциалов U_0 , затем его подключают к схеме. Определите, как будут меняться со временем заряды на двух крайних конденсаторах.



- 3.21.** Для системы, описанной в предыдущей задаче, найдите энергию, запасенную в каждой нормальной моде колебаний.

^{**}) Аналог индуктивной связи в задаче 3.4.

3.22. Два колебательных контура с разными индуктивностями (L и $2L$) и одинаковыми емкостями C соединены такой же емкостью. Определите частоты нормальных колебаний.



3.23. Известно, что частота собственных колебаний молекулы HF^{19} $\omega_0 \cong 7,8 \cdot 10^{14} \text{ рад} \cdot \text{с}^{-1}$. Определите частоту собственных колебаний молекулы HJ^{127} , если известно, что величины второй производной от потенциальной энергии молекулы по координате вблизи минимумов потенциальной энергии отличаются для этих молекул в $n \cong 3$ раза. Для какой молекулы величина второй производной больше и почему?

3.24. Оцените, во сколько раз (n) отличаются величины d^2U/dx^2 вблизи минимумов потенциальной энергии для молекул HCl^{35} и $Na^{23}Cl^{35}$, если собственные частоты колебаний этих молекул: $\omega(HCl) \cong 5,65 \cdot 10^{14} \text{ рад} \cdot \text{с}^{-1}$, а $\omega(NaCl) \cong 7,5 \cdot 10^{13} \text{ рад} \cdot \text{с}^{-1}$. Объясните причину столь большой разницы.

3.25. Определите количество нормальных мод линейной молекулы N_2O . Назовите типы колебаний этой молекулы.

3.26. Определите количество нормальных мод молекулы аммиака NH_3 . Изобразите возможные типы валентных и деформационных колебаний этой молекулы.

3.27. Найдите отношение частот симметричных и антисимметричных валентных колебаний линейной молекулы CO_2 .

4. Затухающие колебания

У реального осциллятора всегда есть потери колебательной энергии. Поэтому свободные колебания будут затухающими (а значит, не гармоническими). В этом случае в уравнение колебаний в механических системах (2-й закон Ньютона) следует добавить силу вязкого трения ($r \cdot \dot{x}$), а в уравнение колебаний в электрическом контуре (2-ое правило Кирхгофа) – падение потенциала на сопротивлении ($RI = R\dot{q}$). В результате мы приходим к дифференциальному уравнению вида:

$$\ddot{\xi} + 2\beta\dot{\xi} + \omega_0^2\xi = 0, \quad (4.1)$$

где β – новая константа, называемая *коэффициентом затухания*. Например, $\beta = r/2m$ в случае колебаний грузика массой m на пружине, а ω_0 по-прежнему имеет смысл собственной частоты незатухающих колебаний $\omega_0 = \sqrt{k/m}$. Для электрических колебаний в LC -контуре коэффициент затухания равен $\beta = R/2L$.

Вид решения уравнения (4.1) как раз и зависит от *соотношения* констант ω_0 и β , а их значения определяются параметрами *конкретной колебательной системы*.

1) Для случая $\beta < \omega_0$ (*малое затухание*) его решением является функция:

$$\xi(t) = A_0 \cdot e^{-\beta t} \cdot \cos(\omega_c t + \varphi_0), \quad (4.2)$$

где $\omega_c = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$ – частота затухающих колебаний. Как видим, колебания осциллятора напоминают гармонические, но с постепенно убывающей по экспоненциальному закону амплитудой. Для описания этого убывания принято использовать следующие величины:

а) *Время релаксации амплитуды* τ_A – время уменьшения амплитуды колебаний в e раз.

$$\frac{A_0}{A_0 e^{-\beta \tau_A}} = e, \quad \text{откуда} \quad \tau_A = 1/\beta. \quad (4.3)$$

б) Количество колебаний N_e , за которое амплитуда уменьшится в e раз:

$$N_e = \frac{\tau_A}{T} = \frac{1}{\beta T}. \quad (4.4)$$

в) *Логарифмический декремент затухания* γ – логарифм отношения амплитуд двух последовательных колебаний:

$$\gamma = \ln \frac{A(t)}{A(t+T)} = \beta T = \frac{1}{N_e}. \quad (4.5)$$

г) *Добротность колебательной системы* Q :

$$Q = \pi \cdot N_e = \frac{\pi}{\gamma} = \frac{\pi}{\beta T}. \quad (4.6)$$

Можно показать, что при $\beta T \ll 1$ добротность

$$Q = 2\pi \frac{W(t)}{\Delta W(t, T)}, \quad (4.7)$$

где – $W(t)$ запасенная осциллятором энергия, $\Delta W(t, T)$ – потери энергии за период колебаний.

2) **Большое затухание** реализуется при $\beta > \omega_0$. Решение уравнения (4.1) имеет в этом случае вид:

$$\xi(t) = A \cdot e^{-\frac{t}{\tau_1}} + B \cdot e^{-\frac{t}{\tau_2}}, \quad (4.8)$$

где $\tau_1 = \frac{1}{\beta - \beta_1}$, $\tau_2 = \frac{1}{\beta + \beta_1}$, $\beta_1 = \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}$, A и B – константы,

зависящие от начальных условий. Графически эта функция представлена на рис.4.1 для случая $\xi(0) = 0$.

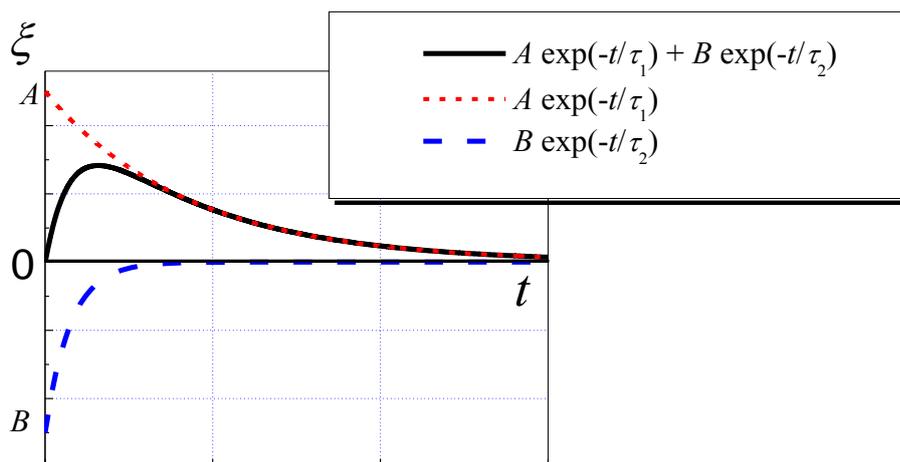


Рис. 4.1

Очевидно, такой процесс уже не является периодическим.

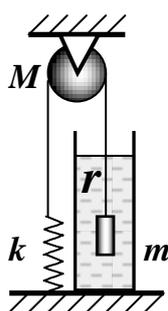
3) Наконец, случай $\beta = \omega_0$ соответствует “критическому режиму”, при котором возвращение осциллятора к равновесию происходит по закону:

$$\xi(t) = (A + B \cdot t)e^{-\beta t} \quad (4.9)$$

Рассмотрим далее несколько задач, в которых реализуются разные случаи затухания свободных колебаний.

Задача

4.1. В устройстве, рассмотренном в задаче 2.2, груз движется в



среде с коэффициентом сопротивления^{*)} $r = 2 \text{ кг/с}$. Масса блока $M = 8 \text{ кг}$. Жёсткость пружины $k = 1000 \text{ Н/м}$. Масса груза $m = 6 \text{ кг}$. Записать закон движения груза при его малых колебаниях по вертикали. Выталкивающей силой пренебречь.

Решение

Уравнения, описывающие движение системы, отличаются от уравнений, использовавшихся при решении задачи 2.2, лишь

^{*)} коэффициент пропорциональности между силой вязкого трения, действующей на тело, и его скоростью

добавлением силы сопротивления среды – вязкого трения в правой части записи 2-го закона Ньютона для груза:

$$m\ddot{x} = mg - T_1 - r \cdot \dot{x}.$$

Использование остальных уравнений системы (см. решение задачи 2.2) позволяет привести это уравнение к виду (4.1) с константами

$$\beta = \frac{r}{2m + M} = 0,1 \text{ с}^{-1} \text{ и } \omega_0 = \sqrt{\frac{2k}{2m + M}} = 10 \text{ с}^{-1}.$$

В нашем случае $\beta \ll \omega_0$ и $\omega_c \approx \omega_0 = \sqrt{\frac{2k}{2m + M}} = 10 \text{ рад} \cdot \text{с}^{-1}$. Итак, колебания груза происходят по закону:

$$x(t) = \frac{mg}{k} + A \cdot e^{-\beta t} \cdot \cos(\omega_0 t + \varphi_0) = [0,06 + A \cdot e^{-0,1t} \cdot \cos(10t + \varphi_0)] \text{ (м)}.$$

Амплитуда и начальная фаза колебаний, как обычно, определяются начальными условиями.

Задача

4.2. В условиях предыдущей задачи определить параметры затухающих колебаний в системе: а) время релаксации амплитуды (τ_A); б) количество колебаний, за которое амплитуда уменьшится в e раз (N_e); в) логарифмический декремент затухания γ ; г) добротность Q .

Решение

а) **Время релаксации амплитуды τ_A :**

$$\tau_A = 1/\beta = 10 \text{ с}.$$

$$\text{б) } N_e = \frac{\tau_A}{T} = \frac{1}{\beta T}, \quad T = \frac{2\pi}{\omega_0} \approx 0,6 \text{ с}, \quad N_e = \frac{1}{2\pi\beta} \sqrt{\frac{2m + M}{2k}} \approx 16.$$

в) *Логарифмический декремент затухания:*

$$\gamma = \ln \frac{A(t)}{A(t+T)} = \beta T = \frac{1}{N_e} = 0,06.$$

г) *Добротность:* $Q = \pi N_e = \frac{\pi}{\gamma} = \frac{\pi}{\beta T} \approx 52.$

Задача

4.3. Сколько колебаний совершит груз в устройстве, рассмотренном в задачах 4.1 и 4.2, за то время, пока амплитуда уменьшится в $n = 23$ раза.

Решение

Запишем отношение амплитуд в начале колебаний и в момент времени τ_n , когда амплитуда уменьшится в n раз:

$$\frac{A_0}{A_0 e^{-\beta \tau_n}} = n.$$

Отсюда $\tau_n = \frac{1}{\beta} \ln(n).$

Число колебаний до этого момента

$$N_n = \frac{\tau_n}{T} = \frac{1}{\beta T} \ln(n) = \frac{\ln(n)}{\gamma} = \frac{\ln(n)}{\pi} \cdot Q.$$

$$N_{23} = \frac{\ln 23}{\pi} \cdot Q \approx Q \approx 52.$$

Таким образом, оказалось, что *добротность равна числу колебаний осциллятора, за которое амплитуда уменьшается в 23 раза.*

Задача

4.4. Для колебательной системы, рассмотренной в предыдущих задачах (4.1–4.3), определить относительное уменьшение собственной частоты затухающих колебаний ω_c по сравнению с незатухающими ω_0 .

Решение

Относительное уменьшение частоты свободных колебаний в результате затухания равно:

$$\frac{\omega_0 - \omega_c}{\omega_0} = 1 - \frac{\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}}{\omega_0} = 1 - \sqrt{1 - \left(\frac{\beta}{\omega_0}\right)^2} = 1 - \sqrt{1 - \left(\frac{\beta T}{2\pi}\right)^2} = 1 - \sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}.$$

Воспользуемся далее формулой для приближенного вычисления корня $\sqrt{1 + \delta} \approx 1 + \frac{1}{2}\delta$, справедливой для случая $\delta \ll 1$:

$$\frac{\omega_0 - \omega_c}{\omega_0} \approx 1 - \left(1 - \frac{1}{2} \frac{1}{4Q^2}\right) = \frac{1}{8Q^2} \approx 5 \cdot 10^{-5} \text{ (0,005 \%)}.$$

Задача

4.5. При какой величине коэффициента вязкости r в устройстве, рассмотренном в задачах 4.1–4.3, реализуется *критический режим* колебаний. Определить зависимость смещения от времени в критическом режиме, если в начальный момент времени тело из положения равновесия толкают вниз со скоростью $v_0 = 1 \text{ м/с}$.

Решение

Критический режим колебаний реализуется при $\beta = \omega_0 = 10 \text{ с}^{-1}$.
Для рассматриваемой колебательной системы:

$$r = \beta(2m + M) = \omega_0 \cdot (2m + M) = 200 \text{ кг/с}.$$

Общее решение для критического режима может быть записано в виде:

$$\xi(t) = (A + B \cdot t)e^{-\beta t}.$$

Начальные условия:

$$\xi(0) = 0, \quad \dot{\xi}(0) = v_0.$$

Отсюда $A = 0$, $v_0 = -\beta A + B$, $\Rightarrow B = v_0$.

Окончательно получаем зависимость смещения от времени:

$$\xi(t) = v_0 \cdot t \cdot e^{-\beta t}.$$

Задача

4.6. В условиях предыдущей задачи (4.5) найти максимальное отклонение груза от положения равновесия. Доказать, что оно пропорционально начальной скорости грузика.

Решение

Анализируя функцию $\xi(t) = v_0 \cdot t \cdot e^{-\beta t}$ на экстремум, легко показать, что в критическом режиме система достигает максимального отклонения от положения равновесия за время

$t_{max} = \frac{1}{\beta} = 0,1 \text{ с}$. В этот момент отклонение оказывается

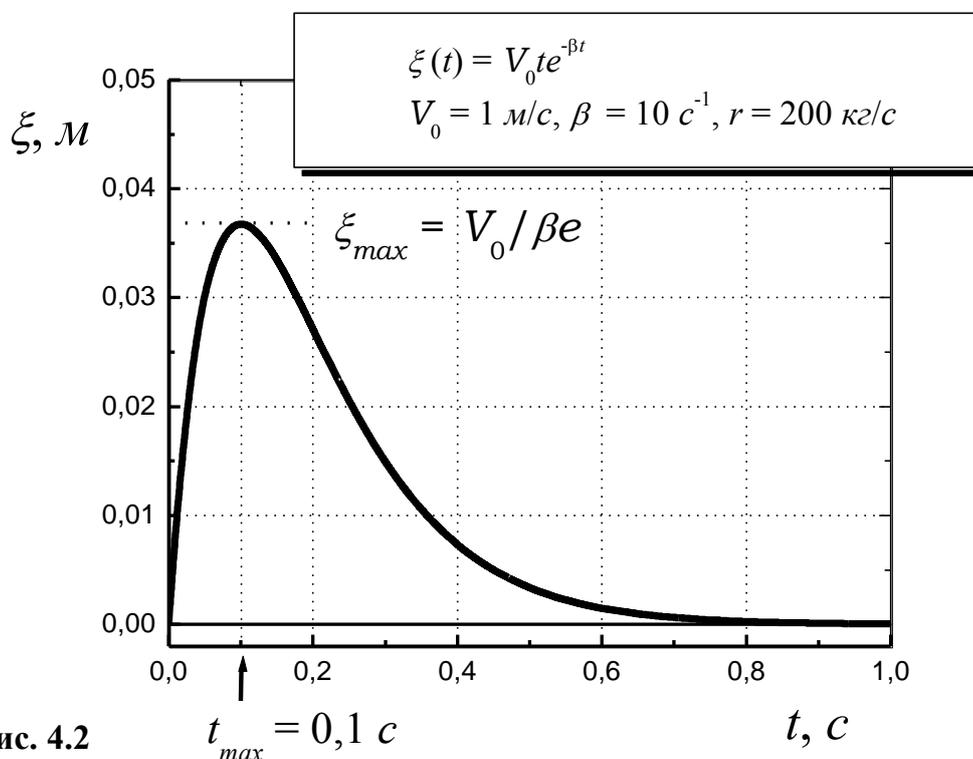


Рис. 4.2

пропорциональным начальной скорости осциллятора^{*)}:

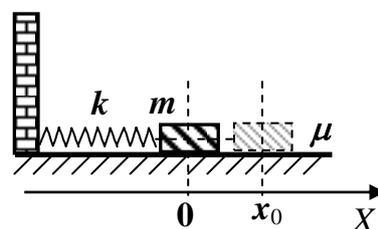
$$\xi_{\max} = v_0 \frac{1}{\beta e}.$$

На рис.4.2 приведена зависимость отклонения грузика от положения равновесия в критическом режиме для случая, рассмотренного в задачах 4.5 и 4.6.

В представленных выше задачах (4.1–4.6) затухание колебаний обусловлено наличием *вязкого трения*. Колебания в системе с “*сухим трением*” рассмотрим на примере следующей задачи.

Задача

4.7. На горизонтальном столе лежит брусок массы $m = 0,5$ кг, прикрепленный горизонтальной пружиной к стене. Коэффициент трения скольжения бруска о поверхность стола равен $\mu = 0,1$. Брусок сместили по оси X так, что пружина растянулась на $x_0 = 6,3$ см, и затем отпустили. Коэффициент жёсткости пружинки $k = 100$ Н/м, а её масса пренебрежимо мала.



- а) Построить график зависимости от времени смещения бруска от начального положения $x(t)$; б) Найти число колебаний, которое совершит брусок до остановки.

Решение

Главное отличие этой задачи от предыдущих состоит в том, что в рассматриваемом случае нельзя написать единое уравнение, описывающее движение бруска *в любой момент*

^{*)} Такой режим реализуется обычно в «баллистическом маятнике».

времени. Ведь сила сухого трения, оставаясь постоянной по величине, меняет направление при изменении направления движения. Это приводит к тому, что для движения бруска вправо и влево придется записывать и решать разные дифференциальные уравнения. Пусть $x = 0$ соответствует положению тела при недеформированной пружине.

1. При движении бруска из начального положения *влево* ($\dot{x} < 0$) можно записать уравнение:

$$m\ddot{x} = -kx + \mu \cdot mg.$$

Откуда
$$\ddot{x} + \frac{k}{m} \left(x - \frac{\mu mg}{k} \right) = 0.$$

Обозначим $\frac{\mu mg}{k} = \xi_0$ и, после стандартной замены переменной $\xi = x - \xi_0$, получим уравнение гармонического осциллятора (2.1). Решение для этого этапа движения (обозначим его $x^{(1)}$) имеет вид:

$$x^{(1)}(t) = \xi_0 + A_1 \cdot \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}} \cdot t\right),$$

где $A_1 = x_0 - \xi_0$ (с учетом начальных условий). Подстановка численных данных задачи даёт:

$$\xi_0 = 0,5 \text{ см}, \quad A_1 = 5,8 \text{ см}, \quad \sqrt{\frac{k}{m}} = 10 \cdot \sqrt{2} \approx 14,1 \text{ с}^{-1}.$$

Отметим, кроме того, что к концу этого этапа (в момент остановки тела перед началом обратного движения) координата тела окажется равной:

$$x^{(1)}(T/2) = x_1 = \xi_0 - A_1 = -x_0 + 2\xi_0 = -5,3 \text{ см}.$$

Эта координата будет *начальной* для следующего этапа движения. Как можно заметить, максимальное отклонение бруска от начала координат уменьшилось на $2\xi_0$.

2. При последующем движении бруска от положения с координатой x_1 **вправо** ($\dot{x} > 0$) направление силы трения (и, соответственно, знак слагаемого $\mu \cdot mg$) изменятся:

$$m\ddot{x} = -kx - \mu \cdot mg.$$

Совершенно аналогично приходим к решению для второго этапа движения (обозначим его $x^{(2)}$):

$$x^{(2)}(t) = -\xi_0 + A_2 \cdot \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}} \cdot t\right).$$

Отметим, что отсчёт времени в этом соотношении следует начинать от начала данного этапа движения. $A_2 = x_1 + \xi_0 = -4,8$ см. Частота колебаний, конечно, прежняя.

К концу второго этапа движения координата тела окажется равной:

$$x^{(2)}(T/2) = x_2 = -\xi_0 + A_2 = x_0 - 4\xi_0 = 4,3 \text{ см.}$$

Эта координата по истечению одного цикла колебаний уже на $4\xi_0$ меньше исходной. Понятно, что и в дальнейшем будет происходить подобное *затухание* колебаний. Закон уменьшения амплитуды колебаний, однако, иной, нежели в случае вязкого трения, а само полное решение представляет собой как бы «сшитые куски» гармонических функций с одинаковым периодом, но уменьшающейся со временем по линейному закону амплитудой. Кроме того, каждый из «кусков» сдвинут вверх или вниз относительно оси времени на одинаковую величину ξ_0 . Вид этого решения для рассматриваемой задачи представлен на рисунке 4.3.

Ещё одной важной особенностью этой задачи является прекращение колебаний после того, как максимальное отклонение тела от положения равновесия x_n окажется по модулю меньше ξ_0 (при этом сила упругости не сможет «перебороть» силу трения

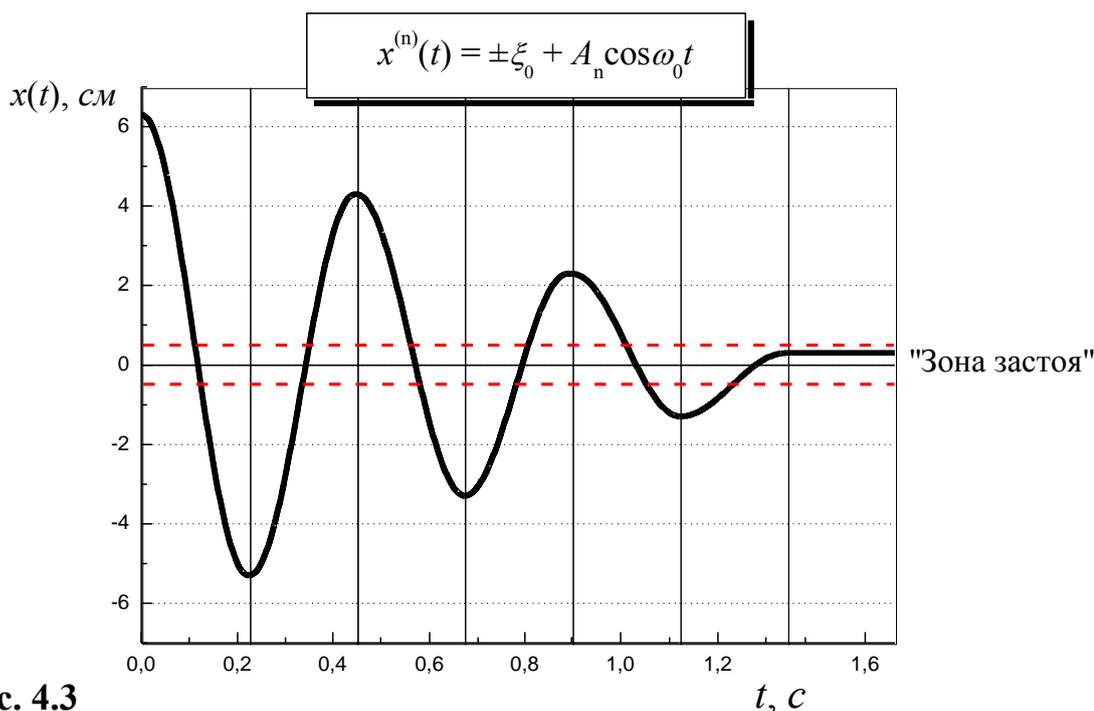


Рис. 4.3

покоя и брусок «застрянет»). На рисунке эта область помечена пунктирными линиями и названа «зоной застоя». В условиях нашей задачи это произойдет на шестом этапе движения, т.е. по завершению 3-го цикла колебаний.

Задачи для самостоятельного решения.

4.8. * В колебательной системе, описанной в задаче 4.7, использована пружина и брусок, про которые известно, что если брусок подвесить на этой пружине, то она растянется на $a = 5 \text{ см}$. Определите, какая часть первоначальной энергии пружины перейдет в тепло при таком же, как и в задаче 4.5, способе возбуждения колебаний в системе ($x_0 = 6,3 \text{ см}$, $v_0 = 0$).

4.9. * В колебательной системе, описанной в задаче 2.23, использованы две одинаковые пружины и брусок. Если брусок подвесить на одной из этих пружин, то она растянется на $a = 10 \text{ см}$. Коэффициент трения скольжения



бруска о поверхность стола равен $\mu = 0,1$. Первоначально брусок отводят влево на $x_0 = 5,3$ см и отпускают без толчка. Массы пружинок пренебрежимо малы. В положении равновесия ($x = 0$) пружинки не деформированы. Определите координату груза после его остановки.

4.10. В процессе свободных затухающих колебаний пружинного маятника, рассмотренного в задаче 4.1, оказалось, что за время $\tau_1 = 12$ с амплитуда колебаний груза уменьшается в $n_1 = 10$ раз. За какое время τ_2 амплитуда уменьшится в $n_2 = 1000$ раз?

4.11. Определите зависимость смещения тела m от времени для пружинного маятника в вязкой среде, рассмотренного в задаче 4.1, если коэффициент вязкости среды увеличен до значения $r = 400$ кг/с. Тело толкают вниз из положения равновесия с начальной скоростью $v(0) = v_0 = 1$ м/с.

4.12. В процессе свободных слабо затухающих колебаний пружинного маятника в вязкой среде за время $\tau = 22$ с амплитуда колебаний уменьшается в $\eta = 3$ раза. а) Найдите коэффициент затухания колебаний β . б) За какое время τ_A амплитуда колебаний уменьшается в e раз?

4.13. За время, в течение которого система совершает $N = 100$ колебаний, их амплитуда уменьшается в $\eta = 9$ раз. Определите добротность такой колебательной системы Q .

4.14. Амплитуда затухающих электромагнитных колебаний в колебательном контуре уменьшается в e раз за $\tau = 10^{-2}$ с. Частота этих колебаний равна $\nu_c = 10^2$ Гц. Определите

собственную частоту в данном контуре ν_0 в отсутствии затухания.

4.15. Определите добротность Q электрического колебательного контура, состоящего из конденсатора с электроёмкостью $C = 0,1 \text{ мкФ}$, катушки индуктивности $L = 100 \text{ мГн}$ и резистора с сопротивлением $R = 5 \text{ Ом}$.

4.16. В условиях предыдущей задачи определите, какую относительную погрешность вы сделаете, вычислив добротность по приближенной формуле $Q_1 = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}$?

4.17. Добротность электрического колебательного контура равна $Q = 144$, а его собственная частота колебаний $\nu_0 = 2 \text{ кГц}$. В контуре возбуждают свободные колебания. Определите:
а) Как меняется со временем колебательная энергия, запасенная в контуре $W = W(t)$. б) Какая часть первоначальной энергии W_0 сохранится в контуре по истечении времени $\tau = 8 \text{ мс}$?

4.18. Найдите период малых колебаний однородного диска радиуса $R = 27 \text{ см}$, который может вращаться вокруг горизонтальной оси, перпендикулярной к его плоскости и проходящей через край диска. Логарифмический декремент затухания равен $\gamma = 1$.

4.19. Через время $\tau_1 = 40 \text{ с}$ после начала колебаний маятника амплитуда уменьшилась до $A_1 = 1 \text{ см}$. Через какое время τ_2 амплитуда будет равна $A_2 = 0,1 \text{ см}$, если начальная амплитуда колебаний этого маятника $A_0 = 10 \text{ см}$.

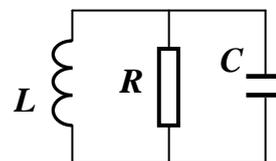
4.20. * После подключения к электрической схеме измерительного прибора три последовательных крайних положения его качающейся стрелки оказались против делений $x_{1,2,3} = 30, 20$ и 24 . Считая декремент затухания постоянным, определите положение равновесия x_0 стрелки.

4.21. Музыкальный камертон имеет собственную частоту колебаний $\nu = 1000$ Гц. Через какое время громкость его звучания уменьшится в $n = 10^6$ раз, если логарифмический декремент затухания равен $\gamma = 0,0006$?

4.22. Электрический колебательный контур состоит из последовательно соединённых конденсатора ёмкости C , катушки индуктивности L , ключа и резистора с сопротивлением R , равным критическому для данного контура. При разомкнутом ключе конденсатор зарядили до напряжения U_0 , после чего ключ замкнули. Найдите, как зависит сила тока I в контуре от времени t . Какова максимальная величина силы тока I_{max} и, в какой момент времени t_m она будет достигнута?

4.23.* Найдите закон изменения заряда на конденсаторе для контура, показанного на рисунке.

Параметры контура C , L и R считать известными. Определите, при каком значении сопротивления R процесс



разрядки конденсатора будет аperiodическим.

5. Вынужденные колебания

Наибольший практический интерес представляют вынужденные колебания при внешнем *гармоническом воздействии* – силы $F(t) = F_m \cdot \cos \omega t$ (или момента сил) в случае механической колебательной системы. В этом случае в уравнении, описывающем колебательный процесс, в правой части появляется соответствующая гармоническая функция:

$$\ddot{\xi} + 2\beta\dot{\xi} + \omega_0^2 \xi = f_m \cos \Omega t, \quad (5.1)$$

($f_m = F_m/m$) а его *частное* решение имеет вид:

$$\xi(t) = A \cdot \cos(\Omega t - \alpha). \quad (5.2)$$

Такое колебательное движение будет происходить в системе по истечении *времени установления* вынужденных колебаний $\tau \gg 1/\beta$, когда собственные колебания затухнут. Обратим внимание на то, что *установившиеся* вынужденные колебания происходят *на частоте вынуждающего воздействия* Ω и имеют по отношению к нему *фазовое запаздывание* α . Амплитуда A и α зависят от соотношения частот вынуждающего воздействия Ω и собственных колебаний ω_0 . Найдём выражения для величин $\dot{\xi}(t)$ и $\ddot{\xi}(t)$:

$$\dot{\xi}(t) = -A\Omega \cdot \sin(\Omega t - \alpha) = A\Omega \cdot \cos(\Omega t - \alpha + \pi/2). \quad (5.3)$$

$$\ddot{\xi}(t) = -A\Omega^2 \cdot \cos(\Omega t - \alpha) = A\Omega^2 \cdot \cos(\Omega t - \alpha + \pi). \quad (5.4)$$

Как видим, скорость и ускорение опережают смещение $\xi(t)$ на $\pi/2$ и π , соответственно.

Весьма наглядным способом нахождения амплитуды и фазы вынужденных колебаний является построение «векторной диаграммы» колебаний. Каждой гармонической функции можно сопоставить вектор на плоскости, длина которого равна

амплитуде колебания, а полярный угол – его фазе. Для гармонических колебаний этот вектор вращается относительно начала координат (точки O) против часовой стрелки с постоянной угловой скоростью Ω , равной частоте колебаний.

Для определения амплитуды вынужденных колебаний A и фазового сдвига α достаточно провести сложение векторов, соответствующих гармоническим функциям в левой части уравнения (5.1). Результат соответствует функции $F(t)/m$.

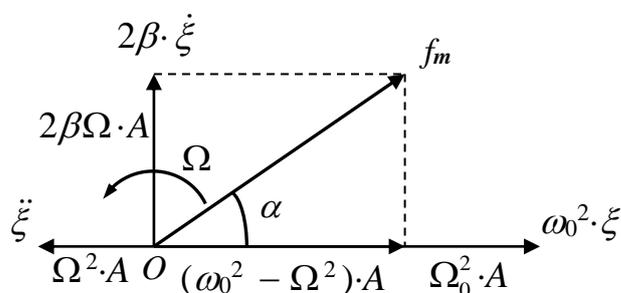


Рис. 5.1

Направим вектор $\omega_0^2 \cdot \xi(t)$ по горизонтали вправо. На рисунке 5.1 представлены также векторы, соответствующие функциям $2\beta\dot{\xi}(t)$ и $\ddot{\xi}(t)$. Как следует из (5.3) и (5.4), они опережают по фазе $\xi(t)$ на $\pi/2$ и π соответственно. Из рис. 5.1 следует, что

$$A(\Omega) = \frac{f_m}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\beta^2\Omega^2}} ; \quad (5.5)$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{2\beta\Omega}{\omega_0^2 - \Omega^2} . \quad (5.6)$$

Представленные выражения определяют зависимости амплитуды и фазы вынужденных колебаний от частоты вынуждающего воздействия. Частотная зависимость амплитуды

немонотонна – она имеет максимум при *резонансной* частоте

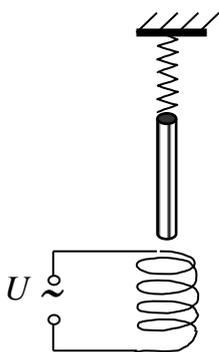
$$\Omega_p = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2} = \sqrt{\omega_c^2 - \beta^2}. \quad (5.7)$$

Т.о. *резонанс* – явление, которое состоит в том, что амплитуда вынужденных колебаний оказывается максимальной при частоте внешнего воздействия, определяемой равенством (5.7).

При очень малом затухании в системе ($\beta \ll \omega_0$) можно пренебречь отличием резонансной частоты Ω_p от собственной ω_0 и записать ряд полезных соотношений. Проделаем это на примере конкретной колебательной системы.

Задача

5.1. Свободные колебания железного стержня, подвешенного на



пружине, происходят с частотой $\omega_c = 20 \text{ рад}\cdot\text{с}^{-1}$, причём амплитуда колебаний уменьшается в $\eta = 5$ раз в течение времени $t_\eta = \ln 5 \approx 1,61 \text{ с}$. Вблизи нижнего конца стержня помещена катушка, питаемая переменным током (см. рисунок). Считая, что амплитуда вынуждающей силы

неизменна, найти:

- коэффициент затухания β ;
- число колебаний N_e , за которые амплитуда уменьшается в e раз и добротность Q ;
- при какой частоте тока, протекающего через катушку Ω_p^T , колебания стержня достигнут наибольшей амплитуды?

Решение

На вопросы (а) – (б) легко ответить, исходя из наших знаний о затухающих колебаниях:

$$a) \frac{A_0}{A(t_\eta)} = e^{\beta t_\eta} = \eta, \quad \beta \cdot t_\eta = \ln \eta, \quad \beta = \frac{1}{t_\eta} \ln \eta = 1 \text{ с}^{-1}.$$

$$б) N_e = \frac{1}{\beta T} = \frac{\omega_c}{2\pi\beta} \approx 3,2, \quad Q = \pi N_e = 10.$$

При ответе на последний вопрос необходимо учесть, что частота воздействия вынуждающей силы на железный стержень в два раза больше, чем частота тока в катушке.

$$в) \Omega_p^r = \frac{1}{2} \sqrt{\omega_c^2 - \beta^2} \approx \frac{1}{2} \omega_c \approx 10 \text{ рад} \cdot \text{с}^{-1}.$$

5.2. В системе, описанной в предыдущей задаче, стержень колеблется с амплитудой $A = 1,5 \text{ мм}$ при частоте тока в катушке $\Omega_1 = 11 \text{ рад} \cdot \text{с}^{-1}$. Найти:

а) амплитуду колебаний при резонансе A_p ;

б) относительное отклонение резонансной частоты колебаний от собственной $\frac{\omega_c - \Omega_p}{\omega_c}$; в) выразить амплитуду колебаний при низкой частоте $A_{\omega \rightarrow 0}$ (статическое отклонение) через A_p .

Решение

а) Зная амплитуду вынужденных колебаний на частоте Ω_1 , можно определить величину f_m :

$$A = \frac{f_m}{\sqrt{((2\Omega_1)^2 - \omega_0^2)^2 + 4\beta^2(2\Omega_1)^2}} \Rightarrow$$

$$f_m = A \cdot \sqrt{((2\Omega_1)^2 - \omega_0^2)^2 + 4\beta^2(2\Omega_1)^2} = A \cdot \sqrt{(4\Omega_1^2 - \omega_c^2 - \beta^2)^2 + 16\beta^2\Omega_1^2} \approx \\ \approx 0,14 \text{ Н/кг}.$$

Далее, подставляя в выражение для амплитуды (5.5) значение резонансной частоты (5.7), получаем полезное соотношение:

$$A_p = \frac{f_m}{2\beta\omega_c}. \quad (5.8)$$

Окончательно: $A_p = \frac{A}{2\beta\omega_c} \cdot \sqrt{(4\Omega_1^2 - \omega_c^2 - \beta^2)^2 + 16\beta^2\Omega_1^2} \approx 3,5 \text{ мм.}$

б) Относительное отличие резонансной частоты колебаний от собственной равно:

$$\frac{\omega_c - \Omega_p}{\omega_c} = 1 - \frac{\sqrt{\omega_c^2 - \beta^2}}{\omega_c} = 1 - \sqrt{1 - \left(\frac{\beta}{\omega_c}\right)^2} = 1 - \sqrt{1 - \left(\frac{\beta T}{2\pi}\right)^2} = 1 - \sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}.$$

Приближенное вычисление корня $\sqrt{1 \pm \delta} \approx 1 \pm \frac{1}{2}\delta$ ($\delta \ll 1$) дает:

$$\frac{\omega_c - \Omega_p}{\omega_c} \approx 1 - \left(1 - \frac{1}{2} \frac{1}{4Q^2}\right) = \frac{1}{8Q^2} = 0,00125 \text{ (т.е. 0,125 \%)}.$$

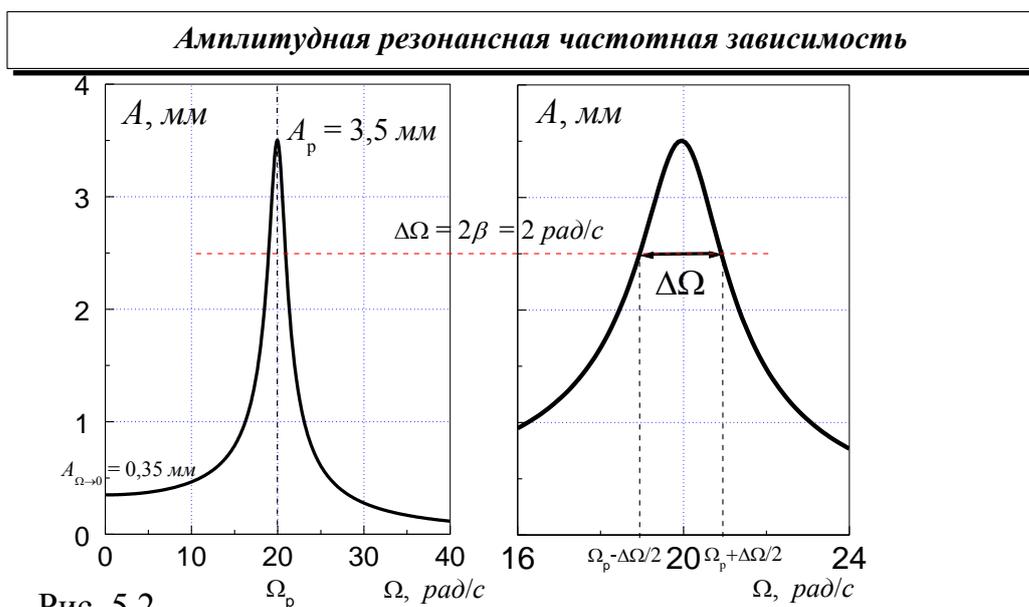
в) Амплитуда колебаний при низкой частоте $A_{\omega \rightarrow 0}$ (статическое отклонение):

$$A_{\omega \rightarrow 0} = \frac{f_m}{\omega_0^2} \approx [с учётом (5.8)] \approx \frac{2\beta T A_p}{2\pi} = \frac{A_p}{Q} \quad (5.9)$$

В условиях рассматриваемой задачи $A_{\omega \rightarrow 0} \approx 0,35 \text{ мм.}$

Приведём также точный вид амплитудной резонансной кривой для рассмотренного случая вынужденных колебаний (рис. 5.2). Горизонтальным пунктиром указан уровень амплитуды вынужденных колебаний в $\sqrt{2}$ раз меньший резонансного (что соответствует уменьшению колебательной энергии в 2 раза). Он определяет “ширину резонансной кривой” $\Delta\Omega$. Можно показать, что $\Delta\Omega = 2\beta$ и понятие добротности получает новую трактовку:

$$Q = \frac{\Omega_p}{\Delta\Omega}. \quad (5.10)$$



Задачи для самостоятельного решения.

- 5.3.** Изобразить зависимость сдвига фаз между смещением и вынуждающей силой от её частоты $\alpha = \alpha(\Omega)$ для случая вынужденных колебаний при гармоническом внешнем воздействии.
- 5.4.** Показать, что в системах с малым затуханием ($\beta \ll \omega_0$) ширина амплитудной резонансной кривой $\Delta\Omega \approx 2\beta$, а сдвиг фаз между вынуждающей силой и смещением при $\Omega = \omega_0 \pm \beta$ равен $\pi/4$ и $3\pi/4$, соответственно.
- 5.5.** Колебательная система характеризуется логарифмическим декрементом затухания $\gamma = 1,05$. Для вынужденных гармонических колебаний этой системы найти отношение максимальной амплитуды смещения A_p к амплитуде смещения при очень малой частоте внешнего воздействия $A_{\Omega \rightarrow 0}$.
- 5.6.** Тело совершает установившиеся вынужденные колебания

$x(t) = A \cdot \cos(\Omega t - \alpha)$ под действием силы $F_x = F_m \cdot \cos \Omega t$. Найти:

а) среднюю потребляемую системой мощность $\langle P \rangle$;

б) работу силы трения за период, считая, что сила трения пропорциональна скорости движения тела. Показать, что $\langle P \rangle \cdot T = -A_{mp}$.

5.7. Частота собственных затухающих колебаний подвешенного на пружине тела равна ω_c . Считая, что коэффициент вязкого трения r известен, найти максимальную амплитуду колебаний тела под действием вертикальной силы $F(t) = F_m \cdot \cos \Omega t$. При какой частоте она достигается?

5.8. Для колебательной системы, описанной в предыдущей задаче, построить зависимости от частоты Ω амплитуды вынужденных колебаний, амплитуд поглощения A_n и дисперсии A_d .

5.9. Доказать, что при вынужденных колебаниях экстремумы амплитуды дисперсии наблюдаются при частотах вынуждающего воздействия $\Omega \cong \Omega_p \pm \beta$.

5.10. Частота свободных колебаний некоторой системы $\omega_c = 50,0 \text{ рад} \cdot \text{с}^{-1}$, резонансная частота $\Omega_p = 49,9 \text{ рад} \cdot \text{с}^{-1}$. Определить добротность Q этой колебательной системы.

5.11. Найти резонансную частоту Ω_p для некоторого механического осциллятора, если амплитуды смещений при вынужденных колебаниях этого осциллятора одинаковы при частотах $\Omega_1 = 20 \text{ рад} \cdot \text{с}^{-1}$ и $\Omega_2 = 40 \text{ рад} \cdot \text{с}^{-1}$.

5.12. Определить частоту Ω_p^* , соответствующую резонансу скорости некоторого механического осциллятора (когда

амплитуда скорости колеблющегося тела максимальна), если амплитуды скорости при частотах вынуждающей силы $\Omega_1 = 10 \text{ рад}\cdot\text{с}^{-1}$ и $\Omega_2 = 40 \text{ рад}\cdot\text{с}^{-1}$ одинаковы.

5.13. При некоторой скорости движения поезда его вагоны особенно сильно раскачиваются на рессорах в результате периодических толчков колес о стыки рельс. Когда поезд стоит на станции, рессоры деформированы под нагрузкой вагонов на $\Delta x = 10 \text{ см}$. Длина рельс $l = 12,5 \text{ м}$. Определить по этим данным скорость движения поезда.

5.14. На крутильный маятник, описанный в задаче 2.10, действует внешняя сила, момент которой меняется по закону $N(t) = N_m \cdot \cos \Omega t$. Определить работу сил трения, действующих в системе, за время, равное периоду колебаний. Считать, что установившиеся вынужденные колебания маятника происходят по закону: $\varphi = \varphi_m \cdot \cos (\Omega t - \alpha)$.

5.15. Грузик массы $m = 100 \text{ г}$ подвешен на невесомой пружинке с жёсткостью $k = 32,4 \text{ Н/м}$. Под действием вынуждающей вертикальной гармонической силы грузик совершает установившиеся колебания с частотой $\Omega = 17 \text{ рад}\cdot\text{с}^{-1}$. При этом колебания грузика отстают по фазе от вынуждающей силы на $\alpha = \pi/4$. Определить добротность данного осциллятора.

5.16. Для определения собственной частоты незатухающих колебаний ν_0 некоторого осциллятора были измерены частота его затухающих колебаний $\nu_c = 499 \text{ Гц}$ и резонансная $\nu_p = 498 \text{ Гц}$. Определить по этим результатам искомую частоту ν_0 .

5.17. Маятник колеблется с частотой $\nu_c = 6 \text{ Гц}$. При этом амплитуда седьмого колебания A_7 оказалась в $n = 12$ раз меньше

начальной A_0 . На какой частоте наступит резонанс в случае внешнего периодического воздействия на данный осциллятор?

5.18. Грузик пружинного маятника массой $m = 200$ г совершает в вязкой среде с коэффициентом сопротивления $r = 0,2$ кг/с установившиеся вынужденные колебания под действием силы $F = F_m \cos \Omega t$ ($F_m = 0,1$ Н). Жёсткость пружины $k = 20$ Н/м. Определить для данной колебательной системы:

а) коэффициент затухания β , б) амплитуду при резонансе A_p .

5.19. По данным предыдущей задачи определить частоту собственных незатухающих колебаний ω_0 , добротность Q и амплитуду при низких частотах $A_{\Omega \rightarrow 0}$.

5.20. Пружинный маятник, описанный в задаче 5.18, поместили в более вязкую среду с коэффициентом сопротивления $r = 0,85$ кг/с. Определить: а) резонансную частоту Ω_p ; б) резонансную амплитуду A_p ; в) добротность Q .

5.21. Для пружинного маятника, описанного в задаче 5.18, определить амплитуду вынужденных колебаний A при частоте вынуждающей силы в 1,5 раза большей, чем собственная (ω_0).

5.22. Тело, подвешенное на пружине, совершает установившиеся вынужденные колебания под действием вертикальной силы $F(t) = F_m \cos \Omega t$. Во сколько раз изменится амплитуда колебаний при резонансе, если увеличить в $n = 2$ раза:

а) амплитуду вынуждающей силы F_m , б) коэффициент сопротивления среды r , в) массу груза m .

5.23. Ответить на вопросы задачи 5.22, для случая, когда частота вынуждающей силы $\Omega \ll \omega_0$.

6. Переменный ток

Рассмотрим вынужденные колебания в электрических цепях, содержащих элементы R, L, C – переменный ток. Такие колебания

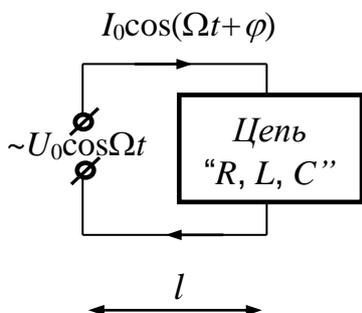


Рис. 6.1

возникают при подключении цепи к источнику ЭДС, периодически изменяющейся во времени. Будем считать, что выполняется *условие квазистационарности*: значения силы тока во всех последовательно соединенных участках цепи в один и тот же момент времени одинаковы. Это возможно, если время распространения электромагнитного сигнала

вдоль цепи много меньше периода колебаний ЭДС источника:

$$\tau = \frac{l}{c} \ll T. \quad (6.1)$$

Пусть ЭДС изменяется по гармоническому закону $U(t) = U_0 \cdot \cos \Omega t$ (см. рис.6.1). Сила тока в общем случае не совпадает по фазе с приложенным напряжением: $I(t) = I_0 \cdot \cos(\Omega t + \varphi)$. (Так же как в механических колебательных системах смещение и скорость осциллятора не совпадают по фазе с вынуждающим воздействием). Поэтому теряет смысл запись соотношения между *мгновенными значениями* силы тока и напряжения (аналогичная закону Ома для постоянного тока) – это соотношение меняется во времени. Интерес представляет только связь между их *амплитудными значениями*, неизменная во времени при установившихся колебаниях в цепи.

Отношение амплитуды напряжения к амплитуде силы тока в цепи

$$Z = \frac{U_0}{I_0} \quad (6.2)$$

называется *полным сопротивлением* цепи (или её участка) переменному току, а соотношение

$$I_0 = \frac{U_0}{Z} \quad (6.3)$$

называется *законом Ома для переменного тока*. Суть этого закона состоит в том, что *амплитудное значение силы переменного тока прямо пропорционально амплитудному значению приложенного к участку цепи напряжения*.

Для дальнейшего анализа цепей переменного тока воспользуемся уже знакомой (см. п.5) векторной формой представления гармонических функций, и построением векторных диаграмм. Для примера на рис. 6.2 представлено сложение сил токов $I_1(t) = I_{01} \cdot \cos(\Omega t + \varphi_1)$ и $I_2(t) = I_{02} \cdot \cos(\Omega t + \varphi_2)$ для двух параллельных участков цепи, а также вектор, соответствующий колебанию $U(t) = U_0 \cdot \cos \Omega t$ (приложенное к цепи напряжение). Такое представление делает весьма наглядными амплитудные и фазовые соотношения между колебаниями, позволяет качественно и количественно описывать процессы в достаточно сложных цепях переменного тока.

Ниже мы рассмотрим применение этого подхода.

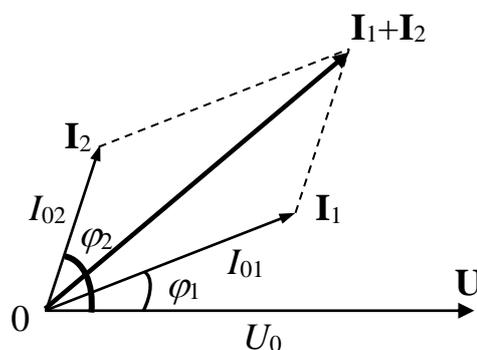


Рис. 6.2

Задача

6.1. На зажимы цепи переменного тока подано напряжение с амплитудным значением $U_0 = 308 \text{ В}$, гармонически изменяющееся с частотой $\nu = 50 \text{ Гц}$. В цепь включены последовательно соединенные резистор $R = 80 \text{ Ом}$, катушка с индуктивностью $L = 0,56 \text{ Гн}$ и конденсатор с электроёмкостью $C = 30 \text{ мкФ}$.

- Найти: а) сдвиг по фазе между током и напряжением;
 б) амплитудное значение силы тока в цепи.

Решение

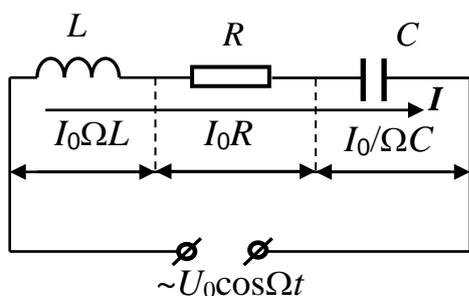


Рис. 6.3

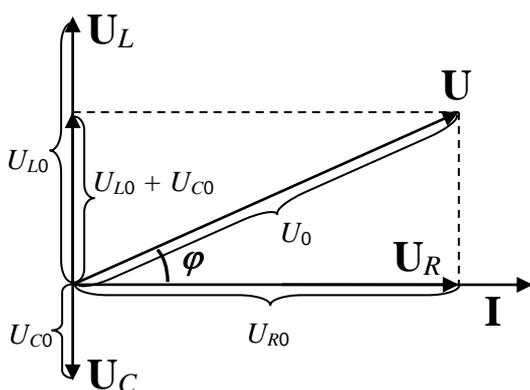


Рис. 6.4

В данном случае построение векторной диаграммы удобно начать с вектора I , соответствующего силе тока, так как для последовательного контура в условиях квазистационарности этот вектор является *общим для всех элементов цепи*. Направим его по горизонтали вправо. Напряжение на резисторе *совпадает по фазе* с силой тока, протекающего по нему, поэтому и вектор U_R напряжения на резисторе направим так же. Длина этого вектора равна произведению амплитудного значения силы тока в цепи на сопротивление

резистора:

$$U_{R0} = I_0 \cdot R. \quad (6.4)$$

Колебания напряжения на катушке индуктивности, как

известно, опережают по фазе на $\pi/2$ колебания силы тока, протекающего через неё^{*)}, следовательно, вектор напряжения U_L должен быть повернут на этот угол против часовой стрелки. Его длина равна произведению амплитудного значения силы тока на индуктивное сопротивление:

$$U_{L0} = I_0 \cdot X_L = I_0 \cdot \Omega L . \quad (6.5)$$

Колебания напряжения на конденсаторе, напротив, отстают по фазе на $\pi/2$ от силы тока через него, соответствующий вектор U_C повернут на 90° по часовой стрелке. Его длина равна произведению амплитудного значения силы тока в цепи на ёмкостное сопротивление:

$$U_{C0} = I_0 \cdot X_C = I_0 \cdot 1/\Omega C . \quad (6.5)$$

Для последовательно соединенных участков цепи должно выполняться равенство:

$$U(t) = U_R(t) + U_C(t) + U_L(t). \quad (6.6)$$

Сложение *колебаний* как раз удобно выполнить с помощью векторной диаграммы. Сначала можно сложить направленные противоположно векторы U_C и U_L – длина вектора $U_L + U_C$ равна $I_0 \cdot (\Omega L - 1/\Omega C)$, а затем прибавить к результату вектор U_R . В итоге получим вектор U , соответствующий общему напряжению, приложенному к цепи. На векторной диаграмме хорошо видно, что он, в общем случае, повернут относительно оси токов на некоторый угол. На нашем рисунке этот угол положительный, т.е. общее напряжение опережает по фазе силу тока в цепи. Это характерно для цепей, в которых $\Omega L > 1/\Omega C$ – цепей с «индуктивной нагрузкой». В обратном случае нагрузка носит

^{*)} Так же как при механических колебаниях $\ddot{\xi}(t)$ опережает по фазе $\dot{\xi}(t)$ на $\pi/2$ – см. соотношения (5.4) и (5.3).

«ёмкостной характер». Из векторной диаграммы фазовый сдвиг между напряжением и током в цепи можно найти количественно:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\Omega L - \frac{1}{\Omega C}}{R} = 0,87 \quad (\varphi \approx 41^\circ) . \quad (6.7)$$

Длина результирующего вектора напряжения U легко находится по теореме Пифагора:

$$U_0 = I_0 \cdot \sqrt{R^2 + \left(\Omega L - \frac{1}{\Omega C}\right)^2} . \quad (6.8)$$

Отсюда, с учётом численных данных задачи:

$$I_0 = \frac{U_0}{\sqrt{R^2 + \left(\Omega L - \frac{1}{\Omega C}\right)^2}} \approx 3 \text{ A} . \quad (6.9)$$

Полное сопротивление в рассмотренном случае оказывается равным

$$Z = \sqrt{R^2 + \left(\Omega L - \frac{1}{\Omega C}\right)^2} . \quad (6.10)$$

Величина $X = \left(\Omega L - \frac{1}{\Omega C}\right)$ называется «реактивным сопротивлением», тогда как R называется «омическим сопротивлением».

Подчеркнём, что соотношение (6.10) получено *только для случая последовательно соединённых элементов R, L, C* . Выражение для полного и реактивного сопротивления цепи переменного тока во всех иных случаях определяется *конкретным способом соединения этих элементов* и должно быть определено аналогичным методом^{**)} (см., например, задачу 6.11).

^{**)} Альтернативой является применение символического метода на основе представления колебаний в комплексной форме.

Рассмотрим далее вопрос о *мощности, выделяющейся в цепи переменного тока*.

Мгновенная мощность, выделяющаяся в цепи, к которой приложено напряжение $U_0 \cos \Omega t$ и по которой протекает ток $I_0 \cos(\Omega t + \varphi)$, по закону Джоуля–Ленца может быть записана в виде:

$$P(t) = U_0 \cos(\Omega t) \cdot I_0 \cos(\Omega t + \varphi). \quad (6.11)$$

Простейшие тригонометрические преобразования позволяют показать, что это быстропеременная функция с частотой 2Ω . В то же время тепловое действие тока определяется, очевидно, не мгновенным, а средним (за большой по сравнению с периодом колебаний промежуток времени) значением мощности $\langle P \rangle$. Это значение может быть найдено усреднением $P(t)$ за период:

$$\langle P \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T P(t) dt = \frac{U_0 I_0}{T} \int_0^T [\cos(\Omega t) \cdot \cos(\Omega t + \varphi)] dt = \frac{1}{2} U_0 I_0 \cdot \cos \varphi. \quad (6.12)$$

Величину $\cos \varphi$ называют «*коэффициентом мощности*». Для элементов R, L, C , соединенных последовательно, $U_0 \cdot \cos \varphi = U_{R0} = I_0 R$ (см. рис. 6.4). Поэтому

$$\langle P \rangle = \frac{1}{2} I_0^2 R. \quad (6.13)$$

Отсюда видно, что протекание по цепи с сопротивлением R **гармонического** переменного тока вызывает в ней такое же тепловое действие, что и протекание **постоянного** тока силой $I_0 = \frac{1}{\sqrt{2}} I_0$ через резистор с таким же омическим сопротивлением. Эта величина называется **действующим** (или **эффективным**) **значением** силы переменного тока. По аналогии вводится

действующее (или эффективное) значение напряжения $U_{\delta} = \frac{1}{\sqrt{2}} U_0^*$.

Следовательно, выражение для средней мощности, выделяющейся в цепи переменного тока, может быть записано в виде:

$$\langle P \rangle = I_{\delta} \cdot U_{\delta} \cdot \cos \varphi. \quad (6.14)$$

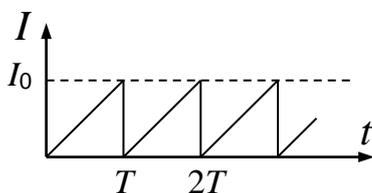
Отметим, что в общем случае несинусоидального переменного тока коэффициент, связывающий амплитудные и действующие значения тока или напряжения, будет иным. Процедура нахождения этого коэффициента определяется равенствами:

$$I_{\delta}^2 = \frac{1}{T} \int_0^T I^2(t) dt ; \quad U_{\delta}^2 = \frac{1}{T} \int_0^T U^2(t) dt .$$

Проиллюстрируем это на примере «пилообразной» зависимости тока от времени.

Задача

6.2. Найти действующее значение силы тока, если ток зависит от времени по закону, показанному на рисунке, а его максимальное значение равно I_0 .



Решение

В рассматриваемом случае $I(t) = k \cdot t$ в пределах одного периода колебаний, где $k = \frac{I_0}{T}$ (см. рис.). Тогда:

$$I_{\delta}^2 = \frac{1}{T} \int_0^T I^2(t) dt = \frac{k^2}{T} \int_0^T t^2 dt = \frac{k^2}{T} \frac{T^3}{3} = \frac{k^2 T^2}{3} = \frac{I_0^2 T^2}{3T^2} = \frac{I_0^2}{3} .$$

Таким образом $I_{\delta} = \frac{I_0}{\sqrt{3}}$. Аналогично получаем $U_{\delta} = \frac{U_0}{\sqrt{3}}$.

Рассмотрим ещё одну задачу, в которой вскрывается суть

*) Далее под обозначениями U и I без индекса мы будем понимать именно действующие значения переменного тока и напряжения.

важных для рассмотрения цепей переменного тока понятий *омического, активного и полного* сопротивлений цепи переменного тока.

Задача

6.3. Омическое сопротивление провода, из которого намотан дроссель (катушка с железным сердечником для увеличения индуктивности, используемая обычно в сетевых фильтрах электропитания) равно $R = 26 \text{ Ом}$. Его **активное** сопротивление $R_a = 30 \text{ Ом}$, а полное $Z = 80 \text{ Ом}$. Определить потери мощности на перемагничивание железного сердечника дросселя, если напряжение, которое приложено к дросселю, равно $U = 220 \text{ В}$.

Решение

На омическом сопротивлении дросселя (сопротивление постоянному току) выделяется тепловая мощность

$$P_R = I^2 R = \frac{U^2}{Z^2} R \cong 197 \text{ Вт}.$$

Полная мощность, расходуемая в цепи переменного тока, определяется величиной **активного сопротивления**

$$R_a = \frac{P}{I^2}, \quad (6.15)$$

которое учитывает потери не только на выделение «джоулева» тепла, но и на другие процессы (например, на совершение механической работы в двигателях переменного тока; на перемагничивание сердечников и т.п.). С учётом данного определения получаем полную мощность

$$P = I^2 R_a = \frac{U^2}{Z^2} R_a \cong 227 \text{ Вт}.$$

Поскольку затрачиваемая мощность может быть записана также в виде

$$P = UI \cos \varphi = \frac{U^2}{Z} \cos \varphi,$$

ясно, что активное сопротивление равно полному, умноженному на коэффициент мощности:

$$R_a = Z \cdot \cos \varphi. \quad (6.16)$$

Отсюда легко найти фазовый сдвиг между напряжением и током, протекающим через дроссель:

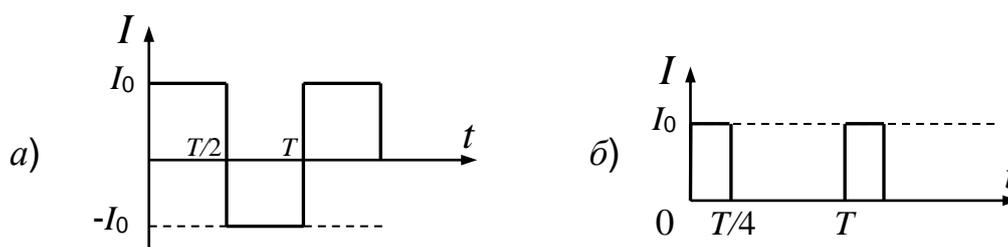
$$\varphi = \arccos \left(\frac{R_a}{Z} \right) \cong 68^\circ.$$

Разница между величинами P и P_R в рассмотренном в данной задаче случае затрачивается на *перемещение сердечника*:

$$P - P_R = \frac{U^2}{Z^2} (R_a - R) \cong 30 \text{ Вт}.$$

Задачи для самостоятельного решения

6.4. Найти действующие значения для тока, сила которого меняется по законам, показанным на рисунках:



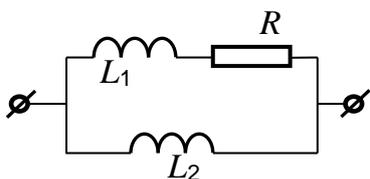
6.5. Цепь переменного тока состоит из последовательно соединённых резистора с сопротивлением $R = 80 \text{ Ом}$, катушки индуктивности $L = 0,56 \text{ Гн}$ и конденсатора ёмкости $C = 30 \text{ мкФ}$. Цепь включена в бытовую электросеть (напряжение $U = 220 \text{ В}$, $\nu = 50 \text{ Гц}$).

Найти: а) действующее значение силы тока в цепи;
б) сдвиг по фазе между током и напряжением.

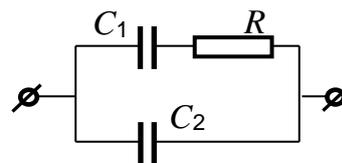
- 6.6.** В условиях предыдущей задачи найти действующие значения напряжений U_R , U_L и U_C на зажимах каждого из элементов цепи и выделяющуюся в цепи мощность P .
- 6.7.** В цепи переменного тока используется плоский конденсатор, изолятор которого промок и он стал нагреваться. При частоте $\nu = 50 \text{ Гц}$ коэффициент мощности оказался равен $k = 0,6$. Определить по этим данным удельное сопротивление изолятора, если его диэлектрическая проницаемость равна $\varepsilon = 4,8$.
- 6.8.** * К бытовой электросети (напряжение $U = 220 \text{ В}$, $\nu = 50 \text{ Гц}$) присоединен дроссель, соединенный последовательно с резистором $R = 40 \text{ Ом}$. Напряжение, измеренное вольтметром на дросселе равно $U_1 = 160 \text{ В}$, а на резисторе $U_2 = 80 \text{ В}$. Какие мощности потребляются дросселем (P_1) и резистором (P_2)?
- 6.9.** * Дроссель и резистор $R = 40 \text{ Ом}$ присоединены параллельно к бытовой электросети. При этом амперметр, включенный в цепь дросселя, показывает силу тока $I_1 = 2 \text{ А}$, другой амперметр в цепи резистора – ток $I_2 = 1,5 \text{ А}$, а от сети потребляется ток $I_0 = 3 \text{ А}$. Какая мощность потребляется дросселем и резистором?
- 6.10.** К бытовой электросети (напряжение $U = 220 \text{ В}$, $\nu = 50 \text{ Гц}$) присоединены параллельно реостат с сопротивлением $R = 40 \text{ Ом}$ и дроссель с индуктивностью $L = 80 \text{ мГн}$ и омическим сопротивлением $r = 26 \text{ Ом}$. По дросселю идёт ток силой $I_1 = 2 \text{ А}$. Какой ток идёт по реостату и какой ток потребляется от сети?

6.11. Найти полное сопротивление цепочки, состоящей из параллельно соединённых конденсатора ёмкости C и резистора с сопротивлением R . Записать, как зависят от времени токи через конденсатор, резистор и всю цепочку, если напряжение меняется по закону $U = U_0 \cdot \cos \Omega t$ (обратить внимание на фазовые соотношения).

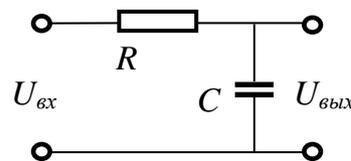
6.12. Изобразить векторную диаграмму для электрического контура, показанного на рисунке. Предполагается, что подаваемое между точками A и B напряжение изменяется по гармоническому закону.



6.13. Выполнить задание 6.12 для контура:



6.14. * На рисунке показана простейшая схема «сглаживающего фильтра». На вход подают напряжение $U = U_0 + U_1 \cos \Omega t$. U_0 и U_1 – константы.



Найти: *а)* выходное напряжение $U(t)$,
б) значение величины RC , при котором амплитуда переменной составляющей напряжения U_1 на выходе будет в $n = 10$ раз меньше постоянной составляющей U_0 , если $\Omega = 314 \text{ рад} \cdot \text{с}^{-1}$.

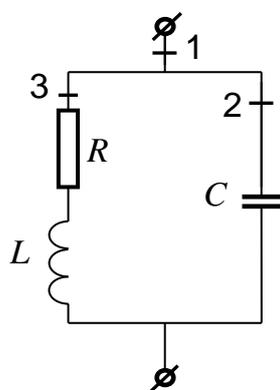
6.15. Переменное напряжение, действующее значение которого $U = 10 \text{ В}$, а частота $\nu = 50 \text{ Гц}$, приложено к катушке без сердечника с индуктивностью $L = 2 \text{ мГн}$ и сопротивлением $R = 100 \text{ мОм}$. Найти количество теплоты, выделяющейся в катушке за секунду.

- 6.16.** К сети переменного тока с действующим значением напряжения $U = 120 \text{ В}$ подключили катушку, индуктивное сопротивление которой $X_L = 80 \text{ Ом}$ и полное сопротивление $Z = 100 \text{ Ом}$. Найти разность фаз между колебаниями тока и напряжения, а также мощность, потребляемую катушкой.
- 6.17.** При какой частоте напряжения, приложенного к цепочке последовательно соединенных элементов $R = 4 \text{ Ом}$, $L = 1 \text{ мГн}$, $C = 1 \text{ мкФ}$, колебания тока отстают от напряжения по фазе на $\pi/4$?
- 6.18.** В электрической схеме между точками, находящимися под напряжением $U = U_0 \cdot \cos \Omega t$, включен конденсатор ёмкости C . Пространство между обкладками конденсатора заполнено слабо проводящей средой с сопротивлением R . Как зависит от времени сила тока, протекающего через данный участок цепи?
- 6.19.** К участку цепи, состоящему из последовательно соединенных элементов R , L и C , приложено переменное напряжение с действующим значением $U = 220 \text{ В}$ и частотой $\nu = 50 \text{ Гц}$. Сопротивление резистора $R = 110 \text{ Ом}$, ёмкость конденсатора равна 50 мкФ . Индуктивность L подбирается так, чтобы показание вольтметра, включенного параллельно конденсатору, стало максимальным. Чему равна эта индуктивность? Найти показания вольтметра и амперметра в этих условиях.
- 6.20.** Параметры последовательного колебательного контура (R , L , C) таковы: $C = 5 \text{ мкФ}$, $R = 0,1 \text{ Ом}$. Какую мощность P надо подводить к контуру, чтобы поддерживать в нём

незатухающие колебания на частоте $\Omega = 200 \text{ рад/с}$ с амплитудой напряжения на конденсаторе $U_{C0} = 10 \text{ В}$?

6.21. Найти условие «баланса токов» для цепочки, состоящей из параллельно соединённых идеальных конденсатора и катушки индуктивности (т.е. условие *минимума силы тока в подводящих проводах*).

6.22. * К показанному на рисунке контуру приложено переменное



напряжение с действующим значением $U = 220 \text{ В}$. Параметры контура: $C = 0,4 \text{ мкФ}$, $L = 0,4 \text{ Гн}$, $R = 2 \text{ Ом}$. Построить векторную диаграмму. Найти зависимость полного сопротивления контура от частоты Ω приложенного переменного напряжения. Определить, при каком значении частоты Ω_p ток в сечении 1 будет минимальным («баланс токов»)? Каково при этом полное сопротивление контура Z_p ?

6.23. * В условиях предыдущей задачи найти, чему равны при резонансной частоте действующие значения сил токов, текущих в цепи конденсатора, катушки индуктивности и в подводящих проводах I_C , I_L и I соответственно?

6.24.* Какой должна быть добротность колебательного контура Q , чтобы частота, при которой наступает «баланс токов» ω_p , отличалась от частоты, при которой наступает «резонанс напряжений» ω_0 , не более чем на 5% ($\alpha = \frac{\omega_p - \omega_0}{\omega_0} \leq 0,05$)?

7. Волны

Волны – это распространяющиеся в пространстве колебания. В частности, механические (упругие) волны представляют собой распространяющиеся в каком-либо веществе этом веществе колебания механических напряжений, электромагнитные – распространяющиеся колебания электромагнитного поля. Упругие волны могут возникать в твёрдых, жидких и газообразных средах; электромагнитные – могут распространяться также и в вакууме.

Распространяющиеся в непоглощающей и недиспергирующей*) среде волны подчиняются *классическому дифференциальному волновому уравнению*:

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = v^2 \cdot \Delta \xi, \quad (7.1)$$

где $\Delta = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right)$ – оператор Лапласа в декартовых координатах, v – фазовая скорость волны (в дальнейшем для краткости мы будем называть её просто скоростью).

В случае упругих волн ξ – смещение частицы среды от положения равновесия, для электромагнитных волн вместо ξ в уравнении (7.1) фигурирует напряжённость электрического поля \vec{E} или индукция магнитного поля \vec{B} .

Скорость упругой волны в твёрдом теле зависит от величиной модуля упругости G (модуля Юнга) и плотности вещества ρ : $v = \sqrt{G/\rho}$; скорость электромагнитной волны зависит от диэлектрической проницаемости ε и магнитной восприимчивости μ

*) Недиспергирующими называются среды, в которых скорость распространения волны не зависит от частоты колебаний.

среды, в которой распространяется волна: $v = 1/\sqrt{\epsilon\mu\epsilon_0\mu_0} = c/n$; здесь $c = 1/\sqrt{\epsilon_0\mu_0}$ – скорость электромагнитной волны в вакууме, $n = \sqrt{\epsilon\mu}$ – показатель преломления среды.

В одномерном случае (волна распространяется по оси Ox) уравнение (7.1) упрощается:

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = v^2 \cdot \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}. \quad (7.1,a)$$

Упругие волны могут быть *продольными* и *поперечными* (смещения частиц происходят вдоль направления распространения волны и перпендикулярно ему, соответственно). В жидкостях и газах распространяются только продольные волны, в твёрдых телах – как продольные, так и поперечные. Электромагнитные волны – всегда поперечные (векторы \vec{E} и \vec{B} перпендикулярны скорости волны \vec{v} , причем $\vec{E} \perp \vec{B}$). Направление скорости электромагнитной волны \vec{v} совпадает с направлением векторного произведения $[\vec{E}, \vec{B}]$.

Уравнением волны называется соотношение, в явной форме отражающее зависимость $\xi = \xi(x,y,z,t)$ – а это решение дифференциального уравнения (7.1). В частности, уравнение *плоской гармонической волны*, распространяющейся по оси Ox , имеет вид:

$$\xi(x,t) = A \cdot \cos(\omega t - kx + \varphi_0). \quad (7.2)$$

Здесь A – амплитуда волны, ω – циклическая частота, $k = \omega/v = 2\pi/\lambda$ – т.н. «волновое число». Напомним, что величина $(\omega t - kx + \varphi_0)$ называется фазой, а φ_0 – начальной фазой.

Поверхность, во всех точках которой колебания происходят в одной фазе, называется *волновой поверхностью*. Волновых поверхностей бесконечно много. «Самая передняя» из них (т.е. самая дальняя от источника) называется *фронтом волны*. Волна, описываемая соотношением (7.2), потому и называется плоской, что все её волновые поверхности – плоскости.

Если размерами источника волн можно пренебречь (точечный источник), то волновые поверхности являются сферическими и уравнение волны принимает вид (см. задачу 7.1):

$$\xi(r,t) = \frac{A}{r} \cdot \cos(\omega t - \vec{k}\vec{r}). \quad (7.3)$$

Здесь \vec{r} – радиус вектор, соединяющий источник с данной точкой пространства; $\vec{k} = (2\pi/\lambda)(\vec{v}/v)$ – так называемый «волновой вектор».

Плотностью энергии волны w называется энергия, приходящаяся на единицу объёма среды, в которой распространяется волна. Упругая волна несёт с собой кинетическую и потенциальную энергии (первая представляет собой кинетическую энергию колеблющихся частиц T , вторая – энергию деформации среды U): $W = T + U$. Плотности кинетической (w_T) и потенциальной (w_U) энергий упругой гармонической волны (7.2) одинаковы:

$$w_T(t) = w_U(t) = (\rho A^2 \omega^2 / 2) \cdot \sin^2(\omega t - kx), \quad (7.4)$$

поэтому полная **плотность энергии упругой волны**:

$$w(t) = \rho A^2 \omega^2 \cdot \sin^2(\omega t - kx). \quad (7.5)$$

Энергия электромагнитной волны складывается из энергии электрического и магнитного полей. Поэтому полная **плотность энергии электромагнитной волны** $w = w_E + w_B$, где

$$w_E(t) = \varepsilon \varepsilon_0 E^2(t) / 2, \quad w_B(t) = B^2(t) / 2\mu_0. \quad (7.6)$$

В распространяющейся электромагнитной волне напряжённость электрического и индукция магнитного полей изменяются в фазе, причём в любой момент времени в данной точке пространства $w_E(t) = w_B(t)$. Отсюда следует связь между величинами электрического и магнитного полей в волне:

$$B(t) = \sqrt{\varepsilon\mu\varepsilon_0\mu_0} \cdot E(t) = E(t)/v. \quad (7.7)$$

С учётом соотношений (7.6) и (7.7) плотность энергии электромагнитной волны может быть выражена следующим образом:

$$w(t) = \varepsilon\varepsilon_0 \cdot E^2(t) = B^2(t)/\mu\mu_0 = \frac{E(t) \cdot B(t)}{\mu\mu_0 v}. \quad (7.8)$$

Основные энергетические характеристики переноса энергии волнами (как упругими, так и электромагнитными) таковы:

а) Плотность потока энергии (энергия, переносимая волной в единицу времени через единичную площадку, перпендикулярную направлению распространения волны):

$$S(t) = w(t) \cdot v. \quad (7.9)$$

б) Интенсивность волны (среднее по времени значение плотности потока энергии):

$$I = \langle S(t) \rangle = \langle w(t) \rangle \cdot v. \quad (7.10)$$

При усреднении по времени плотности энергии волны учтём, что среднее по времени значение квадрата гармонической функции равно 1/2, поэтому, например, для электромагнитной волны – см. (7.8):

$$I = E_0 B_0 / 2\mu\mu_0, \quad (7.10, a)$$

где E_0 и B_0 – амплитудные значения напряжённости электрического и индукции магнитного полей, соответственно.

в) **Векторы Умова** (для упругих волн) и **Пойнтинга** (для электромагнитных волн):

$$\vec{S}(t) = w(t) \cdot \vec{v}. \quad (7.11)$$

В частности, *вектор Пойнтинга* можно записать в виде:

$$\vec{S}(t) = [\vec{E}, \vec{B}] / \mu_0. \quad (7.11, a)$$

г) **Средние по времени значения** векторов Умова и Пойнтинга («**векторная интенсивность**»):

$$\langle \vec{S}(t) \rangle = \langle w(t) \rangle \cdot \vec{v}. \quad (7.12)$$

В частности, для электромагнитной волны

$$\langle \vec{S}(t) \rangle = [\vec{E}_0, \vec{B}_0] / 2\mu_0. \quad (7.12, a)$$

д) **Поток энергии** волны через некоторую поверхность Σ и *среднее по времени* значение этого потока:

$$\Phi(t) = \int_{\Sigma} \vec{S}(t) d\vec{s} = \int_{\Sigma} S_n(t) ds, \quad (7.13)$$

$$\langle \Phi(t) \rangle = \int_{\Sigma} \langle \vec{S}(t) \rangle d\vec{s} = \int_{\Sigma} \langle S_n(t) \rangle ds. \quad (7.14)$$

Здесь $d\vec{s}$ – вектор, модуль которого равен площади элемента поверхности ds , а направление совпадает с направлением нормали к нему; S_n – нормальная к площадке ds составляющая вектора \vec{S} .

Перейдем к конкретным задачам по рассматриваемой теме.

Задача

7.1. Доказать, что амплитуда сферической волны, распространяющейся в непоглощающей среде, обратно пропорциональна расстоянию r до источника (см. (7.3)).

Решение

Чем дальше от источника уходит сферическая волна, тем на большую площадь поверхности распределяется испускаемая

источником энергия ($S = 4\pi r^2$). Соответственно, тем меньшая энергия приходится на каждую колеблющуюся частицу ($\sim 1/r^2$). Из соотношений (7.4) и (7.8) следует, что плотность энергии волны w пропорциональна квадрату амплитуды колебаний (A^2 для упругой, E_0^2 или B_0^2 для электромагнитной волн). Следовательно, амплитуда колебаний в сферической волне обратно пропорциональна расстоянию от источника $A \sim \sqrt{w(t)} \sim 1/r$ (см. (7.3)).

Задача

7.2. Доказать, что уравнение $\xi(x,t) = A \cdot \cos(at - bx)$ описывает гармоническую волну, распространяющуюся по оси OX . Найти фазовую скорость этой волны и направление её распространения.

Решение

Постоянному значению фазы волны соответствует условие $at - bx = const$. Продифференцируем это соотношение: $adt - bdx = 0$. Отсюда следует, что координата точки с постоянной фазой перемещается со скоростью $v = dx/dt = a/b$. Это и есть по определению фазовая скорость волны. Если отношение $a/b > 0$, волна распространяется в положительном направлении оси OX , если $a/b < 0$ – в противоположном направлении.

Задача

7.3. По шнуру натянутому вдоль горизонтально направленной оси OX бежит упругая волна: $y(x,t) = A \cdot \cos(\omega t - kx)$. Найти распределения кинетической и потенциальной энергии вдоль шнура для «бегущей» и «стоячей волн» волны.

Решение

Для бегущей по шнуру упругой волны максимумы

потенциальной и кинетической энергии находятся в одних и тех же местах – там, где $\xi(t) = 0$ (см. соотношение (7.4)) – рис. 7.1,а. Конечно, они перемещаются вместе с волной с фазовой скоростью v .

В узлах стоячей волны шнур не движется, но зато испытывает максимальные упругие напряжения (точки слева и справа от узла всегда движутся в разные стороны); в пучностях, наоборот, максимальна скорость шнура, но соседние точки движутся практически одинаково. Поэтому в узлах максимальна потенциальная энергия стоячей волны, в пучностях – кинетическая. Распределения кинетической и потенциальной энергии вдоль шнура для «стоячей» волны показаны на рис. 7.1, а и б. Максимумы потенциальной и кинетической энергий в стоячей упругой волне пространственно разнесены на $\lambda/4$.

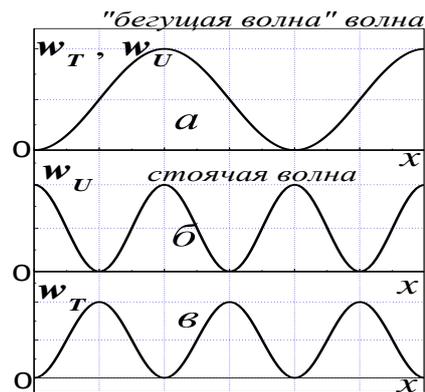


Рис. 7.1

Задача

7.4. Один конец горизонтального шнура закреплён, другой перемещают по вертикали по закону: $y(t) = A \cdot \sin 4\pi t$. В средней части шнура при этом наблюдаются три точки, в которых шнур остается все время неподвижным. Расстояние между соседними неподвижными точками $L = 2$ м. Изобразить вид колеблющегося шнура и указать места, в которых максимальны потенциальная и кинетическая энергии волны. Найти скорость распространения «бегущей» упругой волны по этому шнуру.

Решение

В указанных условиях на шнуре формируется т.н. «стоячая» волна, возникающая в результате сложения «исходной» и отражённой от закрепленного конца шнура волн. На шнуре возникают т.н. «узлы» (неподвижные точки) и «пучности» (области с максимальной амплитудой колебаний) – см. рис.7.1. Расстояние между двумя соседними узлами или пучностями равно *половине* длины волны ($L = \lambda/2$) и, следовательно, $\lambda = 4 \text{ м}$.

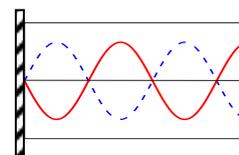


Рис. 7.1

Скорость распространения бегущей по шнуру волны $v = \lambda T = \lambda \omega / 2\pi$. Из условия задачи следует, что $\omega = 4\pi (с^{-1})$. **Ответ:** $v = 8 \text{ м/с}$.

Задача

7.5. Используя определенные аналогии между параметрами упругих и электромагнитных волн, укажите относительное расположение максимумов электрического и магнитного поля в бегущих и стоячих электромагнитных волнах.

Решение

Как следует из сопоставления характеристик механических и электромагнитных колебаний (см. п.3), потенциальной энергии упругой волны w_U соответствует энергия электрического поля электромагнитной волны w_E , а кинетической энергии w_T – энергия магнитного поля w_B . Соответственно, в бегущей электромагнитной волне максимумы энергии электрического и магнитного полей совпадают (так же, как максимумы потенциальной и кинетической энергии в бегущей упругой волне); в стоячей электромагнитной волне максимумы w_E и w_B должны быть пространственно разнесены на $\lambda/4$ (как и максимумы w_U и w_T в стоячей упругой волне).

Задача

7.6. Между двумя металлическими плоскостями возбуждена плоская стоячая электромагнитная волна (длина волны λ). Расстояние между пластинами $L = 1,5\lambda$. Изобразите зависимости напряжённости электрического поля, а также плотности энергии электрического w_E и магнитного полей w_B .

Решение

Напряжённость электрического поля электромагнитной волны на границе с металлическими пластинами должна быть равна нулю (это соответствует минимальным потерям энергии на возбуждение токов в пластинах). С учётом предыдущей задачи индукция магнитного поля на границе с металлическими пластинами максимальна. Искомые зависимости показаны на рис. 7.2.

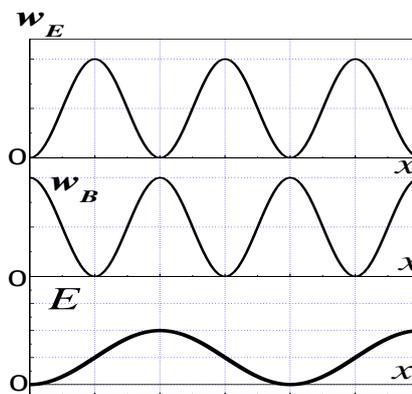


Рис. 7.2

Задачи для самостоятельного решения

7.7. Написать уравнения продольной и поперечной плоских гармонических волн, распространяющихся по оси Ox . Известны амплитуда A , длина волны λ и фазовая скорость волн v .

7.8. Какую волну описывает уравнение $\xi = A \cdot \cos(\omega t + kx)$ – продольную или поперечную? В какую сторону направлена и чему равна фазовая скорость этой волны? Что изменится, если перед kx поменять знак?

7.9. Написать уравнение цилиндрической гармонической волны с

частотой ω и длиной волны λ , распространяющейся в однородной непоглощающей среде (r – расстояние до линейного источника волн).

7.10. Звуковая волна переходит из воздуха в воду. Что происходит при этом с частотой, периодом и длиной волны? Фазовая скорость звука в воздухе $v_1 \cong 300$ м/с, в воде – $v_2 \cong 1500$ м/с.

7.11. По струне распространяется негармоническая волна, описываемая функцией $\xi(x,t) = f(at - bx)$. Докажите, что эта функция удовлетворяет дифференциальному уравнению (7.1,а). Определите скорость этой волны.

7.12. На рис.7.3 показана зависимость смещения частиц в

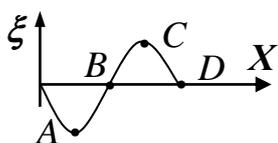


Рис. 7.3

поперечной волне $\xi = A \cdot \cos(\omega t - kx)$ от координаты в некоторый момент времени. Покажите стрелками направления скоростей частиц в точках A, B, C и D .

7.13. Сделайте то же самое, что в предыдущей задаче, но для продольной волны $\xi = A \cdot \cos(\omega t + kx)$.

7.14. В воде распространяется плоская гармоническая волна, амплитуда которой $A = 0,1$ мм, а частота $\omega = 10^4$ с⁻¹. Определите скорость молекул воды в точках B и C (на оси и в максимуме – см. рис.7.3.).

7.15. Изобразите зависимости от координаты потенциальной и кинетической энергий упругой волны в момент времени, зафиксированный на рис.7.3.

7.16. В железном стержне длиной $L = 0,5$ м с закреплёнными концами возбуждена стоячая упругая волна частотой $\omega = 2\pi \cdot 10^4$ с⁻¹. Изобразить распределение вдоль стержня смещений частиц, потенциальной и кинетической энергии волны, если скорость такой же бегущей по стержню волны $v = 5 \cdot 10^3$ м/с.

7.17. В воздухе по оси Ox распространяется звуковая волна, зависимость смещений молекул от координаты в некоторый момент времени показана на рис.7.3. Изобразить зависимость давления в воздухе от координаты в этот момент.

7.18. Определить скорость продольной упругой волны в железе, если известно, что модуль упругости для железа $G = 2,1 \cdot 10^{11}$ Н/м², а плотность железа равна $\rho = 7,8 \cdot 10^3$ кг/м³.

7.19. В длинном железном стержне, площадь поперечного сечения которого $S = 1$ см², распространяется по оси X плоская упругая волна частотой $\omega = \pi \cdot 10^4$ с⁻¹ и амплитудой $A = 1$ мкм. Учитывая, что модуль упругости для железа $G = 2,1 \cdot 10^{11}$ Н/м², а его плотность $\rho = 7,8 \cdot 10^3$ кг/м³, определите: а) длину волны; б) среднюю плотность энергии упругой волны; в) вектор Умова в точке с координатой x_0 ; г) интенсивность волны; д) средний поток энергии через поперечное сечение стержня.

7.20. В однородном диэлектрике ($\varepsilon = 2,25$; $\mu = 1$) распространяется плоская электромагнитная волна. Амплитуда индукции магнитного поля в волне $B_0 = 10^{-4}$ Тл. Определите: а) фазовую скорость волны; б) амплитуду напряжённости электрического поля;

в) среднюю плотность энергии волны; г) интенсивность волны.

7.21. Между двумя параллельными металлическими плоскостями, расстояние между которыми $d = 3,14$ см, возбуждена стоячая электромагнитная волна. Волновое число для этой волны равно $k = 2 \cdot 10^2$ м⁻¹. Пространство между плоскостями заполнено однородным диэлектриком ($\varepsilon = 2,25$; $\mu = 1$). Изобразить вид зависимости напряжённости электрического поля и индукции магнитного поля в волне от координаты.

7.22. Плоская электромагнитная волна распространяется в однородной немагнитной ($\mu = 1$) среде по оси Ox . Электрическое поле в волне меняется по закону:

$$\vec{E}(x,t) = E_0 \cos(\omega t - kx) \cdot \vec{e}_y.$$

Запишите, как зависят от координаты и времени: а) индукция магнитного поля; б) плотность энергии; в) вектор Пойнтинга; г) интенсивность волны. Величины E_0 , ω и k считать известными.

7.23. В некоторой точке однородного диэлектрика ($\varepsilon = 2,25$; $\mu = 1$) вектор Пойнтинга электромагнитной волны равен $\vec{S} = 2 \cdot 10^{-2} \cdot \cos^2(\omega t + \alpha) \cdot \vec{e}_x$ (Вт/м²). Определите, чему равны в этой точке: а) интенсивность волны; б) средняя плотность энергии электромагнитного поля; в) амплитуды напряжённости электрического и индукции магнитного полей; г) зависимости напряжённости электрического и индукции магнитного полей от времени.

7.24. В однородном диэлектрике ($\varepsilon = 4$, $\mu = 1$) распространяется плоская световая волна, амплитуда электрического поля в

которой $E_0 = 1 \text{ В/м}$. На её пути находится сфера радиусом $R = 10 \text{ см}$, коэффициент отражения поверхности которой $r = 0,4$. Какую энергию получает сфера за время $\tau = 10 \text{ с}$?

7.25. В однородном диэлектрике ($\varepsilon = 4$, $\mu = 1$) распространяется от точечного источника электромагнитная волна. На расстоянии $r = 1 \text{ м}$ от него средняя плотность энергии волны $\langle w \rangle = 10^{-7} \text{ Дж/м}^3$. Определите: а) интенсивность волны на расстоянии $R = 3 \text{ м}$ от источника; б) амплитуды напряжённости электрического поля и индукции магнитного поля на этом расстоянии (R); в) мощность источника.

7.26. Источником света является вольфрамовая нить длиной $L = 2 \text{ м}$, помещённая в вакуум. Сопротивление нити $R = 50 \text{ Ом}$. Нить подключена к источнику переменного напряжения амплитудой $V_0 = 100 \text{ В}$. Считая, что в световую энергию переходит только $\eta = 5\%$ выделившейся в нити мощности, определите: а) амплитуду напряжённости электрического поля и б) интенсивность волны на расстоянии $r = 10 \text{ см}$ от середины нити.

7.27. В некоторой точке немагнитной среды напряжённость электрического поля электромагнитной волны

$$\vec{E}(t) = 1 \cdot \cos(\omega t + \alpha) \cdot \vec{e}_y \text{ (В/м)}, \quad \text{а индукция магнитного поля}$$

$$\vec{B}(t) = 5 \cdot 10^{-7} \cdot \cos(\omega t + \alpha) \cdot \vec{e}_z \text{ (Тл)}.$$

Каковы скорость волны и диэлектрическая проницаемость среды?

8. Интерференция света

Интерференция света – это сложение световых волн, сопровождающееся перераспределением энергии светового потока с чередованием максимумов и минимумов интенсивности в различных точках пространства.

Интерференция наблюдается при сложении колебаний, возбуждённых световыми волнами, имеющих постоянную, не зависящую от времени разность фаз в каждой точке пространства. Такие волны называются *когерентными*. Результатом сложения когерентных волн является образование устойчивой во времени и пространстве интерференционной картины. Необходимым условием интерференции световых волн является также неортогональность плоскостей колебаний векторов \vec{E} (и, соответственно, \vec{B}) интерферирующих волн.

Пусть в некоторую точку пространства O приходит световая волна. Она возбуждает в этой точке колебания электрического поля, происходящее по закону $E_1 = E_{01}\cos(\omega t + \varphi_1)$. Если представить это гармоническое колебание в полярных координатах, то оно будет изображаться вектором E_1 , вращающимся относительно начала координат (точки O) с угловой скоростью ω против часовой стрелки (см. п.5). Положение вектора E_1 на рис.8.1 соответствует моменту времени $t = 0$.

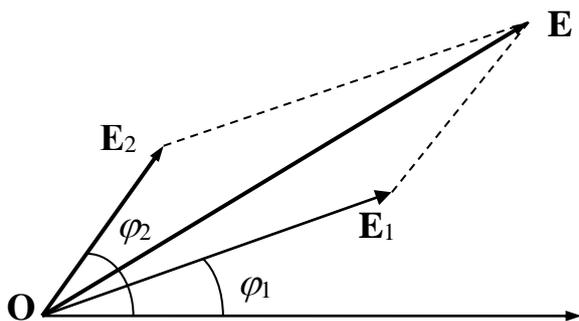


Рис. 8.1.

Схематическое изображение сложения векторов E_1 и E_2

Пусть в ту же точку приходит другая волна, когерентная первой. Колебание, возбуждённое этой волной в данной точке пространства $E_2 = E_{20} \cdot \cos(\omega t + \varphi_2)$, изображается вектором E_2 . Результирующее колебание напряжённости электрического поля в точке O можно найти сложением двух колебаний, т.е. сложением векторов на рис. 8.1. Выражение для амплитуды результирующего колебания E_p получаем по теореме косинусов:

$$E_p^2 = E_{01}^2 + E_{02}^2 + 2E_{01}E_{02} \cdot \cos\Delta\varphi, \quad (8.1)$$

где $\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$. Учитывая, что интенсивность волны пропорциональна квадрату амплитуды напряжённости, можно написать:

$$I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cdot \cos \Delta\varphi. \quad (8.2)$$

Из данного соотношения становится понятным влияние «интерференционного члена» $2\sqrt{I_1 I_2} \cdot \cos\Delta\varphi$ на результирующую интенсивность I .

Если бы волны были некогерентными, то есть разность фаз колебаний $\Delta\varphi$ изменялась бы со временем случайным образом, среднее значение $\cos\Delta\varphi$ было бы равно 0, а результирующая интенсивность была бы равна просто сумме интенсивностей двух волн $I = I_1 + I_2$ (*отсутствие интерференции*). Если величина $\Delta\varphi$ не зависит от времени, а зависит только от координаты точки пространства, где происходит сложение колебаний, то $I \neq I_1 + I_2$ (*наблюдается интерференция*). Из (8.2) следует, что при $I_1 = I_2 = I_0$, величина I может изменяться от 0 до $4I_0$. В тех точках пространства, где $\Delta\varphi = 2m\pi$, будут наблюдаться максимумы интерференции, а при $\Delta\varphi = (2m + 1)\pi$ – минимумы (здесь $m = 0, 1, 2, \dots$).

Теперь рассмотрим связь между разностью фаз $\Delta\varphi$ колебаний, возбуждённых в точке наблюдения O волнами от двух точечных когерентных монохроматических источников ($\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$) с геометрической разностью хода $\Delta r = r_2 - r_1$ (см. рис. 8.2). Из уравнения волны $E = E_0 \cos(\omega t - kr)$ следует, что

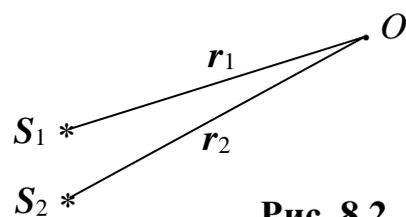


Рис. 8.2

$$\Delta\varphi = k \cdot \Delta r = 2\pi \cdot \frac{\Delta r}{\lambda}, \quad (8.3)$$

где $k = 2\pi/\lambda$ – волновое число. Волны будут усиливать друг друга, если они возбуждают колебания в точке O , происходящие в одной фазе ($\Delta\varphi = 2\pi m$). Таким образом, условие максимумов (*max*) интерференции:

$$\Delta r = m\lambda. \quad (8.4, a)$$

Напротив, волны «гасят» друг друга, если приходят в точку O в «противофазе» – $\Delta\varphi = (2m + 1)\pi$. Тогда условие минимумов (*min*):

$$\Delta r = (2m + 1)\lambda/2, \quad (8.4, б)$$

где число $m = 0, 1, 2, \dots$ называется *порядком интерференции*.

Подчеркнём, что в условиях (8.4,а) и (8.4,б) величина λ – длина волны в той среде, в которой распространяются волны. Длина световой волны в вакууме $\lambda_0 = \lambda n$ (где n – показатель преломления среды), поэтому условия максимумов и минимумов интерференции можно записать также в виде:

$$\text{max: } \Delta = m\lambda_0, \quad \text{min: } \Delta = (2m + 1) \cdot \lambda_0/2. \quad (8.4, в)$$

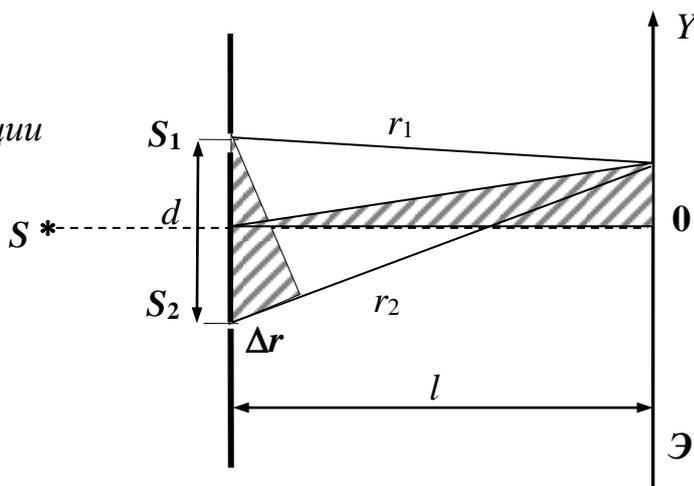
Здесь $\Delta = (nr_2 - nr_1)$ – так называемая *оптическая разность хода* двух волн. Условия (8.4,в) можно использовать и в тех случаях, когда две интерферирующие волны распространяются в разных средах (с показателями преломления n_1 и n_2 , соответственно). В этом случае оптическая разность хода равна

$$\Delta = (n_2 \cdot r_2 - n_1 \cdot r_1). \quad (8.4, г)$$

Расчет интерференционной картины в схеме Юнга

В схеме Юнга для получения когерентных волн используется метод разделения одной и той же исходной волны на две. Затем эти две волны проходят разный путь и вновь собираются вместе (см. рис. 8.3). В качестве первичного источника излучения используется точечный монохроматический источник S . Между источником S и экраном \mathcal{E} , на котором наблюдается интерференционная картина, располагается преграда с двумя маленькими отверстиями (или узкими щелями), которые играют роль двух вторичных когерентных источников.

Рис. 8.3. *Схема Юнга наблюдения интерференции*



Результат сложения волн от вторичных когерентных источников S_1 и S_2 на экране \mathcal{E} представляет собой интерференционную картину. Чтобы получить зависимость освещённости на экране от координаты в явном виде, надо рассмотреть результат сложения двух колебаний: $E_1 = E_{01} \cdot \cos(\omega t - kr_1)$ и $E_2 = E_{02} \cdot \cos(\omega t - kr_2)$. Для простоты вычислений будем считать амплитуды волн одинаковыми $E_{01} = E_{02} = E_0$. В этом случае результирующее колебание будет определяться выражением

$$E = 2 E_0 \cdot \cos[k(r_1 - r_2)/2] \cdot \cos[\omega t - k(r_1 + r_2)/2], \quad (8.5)$$

т.е. его амплитуда зависит от разности хода $\Delta r = r_1 - r_2$ интерферирующих волн. Условия максимумов и минимумов интерференции записаны ранее (см. равенства (8.4,а) и (8.4,б)).

Теперь необходимо связать координату “y” точки экрана с разностью хода $\Delta r = r_1 - r_2$. По теореме Пифагора (см. рис.8.3):

$$r_1^2 = l^2 + (d/2 + y)^2, \quad r_2^2 = l^2 + (d/2 - y)^2$$

Вычитая из первого равенства второе, получим:

$$r_1^2 - r_2^2 = 2 d \cdot y, \quad \text{или} \quad (r_1 + r_2) \cdot \Delta r = 2 d \cdot y.$$

При условии $l \gg d$ и $l \approx r_1 \approx r_2$ получим

$$\Delta r \cdot l \cong d \cdot y. \tag{8.6}$$

Это соотношение следует также из “подобия” заштрихованных треугольников на рис. 8.3.

Таким образом, амплитуда результирующего колебания может быть записана в виде:

$$E_{P0} = 2E_0 \cdot \cos [(kd/2l) \cdot y] = 2E_0 \cdot \cos [(\pi d/\lambda l) \cdot y].$$

Соответственно, освещённость экрана в произвольной точке с координатой “y” описывается функцией:

$$I(y) = 4I_0 \cos^2 [(\pi d/\lambda l) \cdot y]. \tag{8.7}$$

Угловое расстояние между двумя соседними минимумами (или максимумами) интерференционной картины вблизи её центра (см. рис. 8.4):

$$\Delta \alpha_m \approx \Delta y_m / l \approx \lambda / d. \tag{8.8}$$

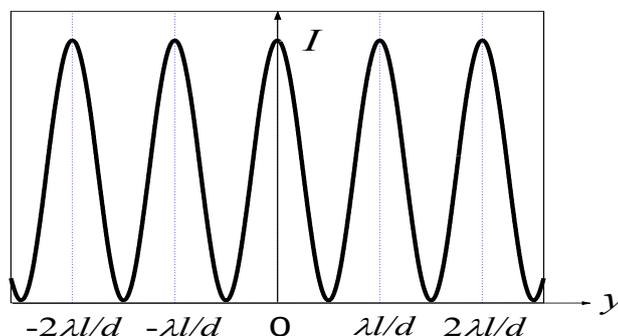


Рис. 8.4. Вид интерференционной картины в опыте Юнга

Наблюдение интерференции с помощью билинзы

В этом случае вторичные когерентные источники света получаются в результате создания двух изображений точечного источника S в «билинзе». Билинза представляет собой разрезанную по диаметру тонкую линзу, обе половины которой раздвинуты на расстояние Z . В полученной таким образом оптической системе возникает два изображения источника света S , волновые поля которых когерентны и в области их перекрытия они создают интерференционную картину.

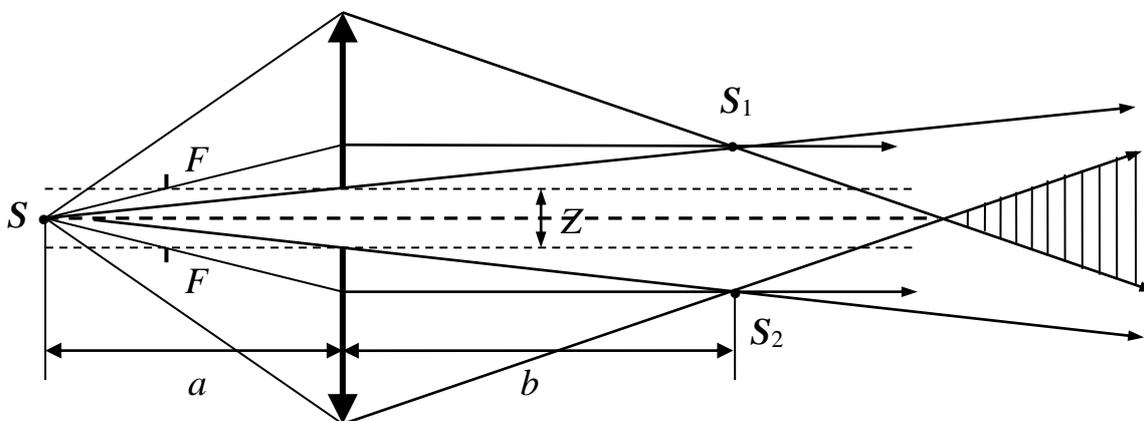


Рис. 8.5. *Формирование двух когерентных источников с помощью билинзы*

Определив из законов геометрической оптики положение вторичных источников S_1 и S_2 , легко рассчитать параметры интерференционной картины.

Наблюдение интерференции с помощью «бипризмы»

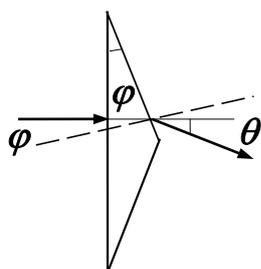
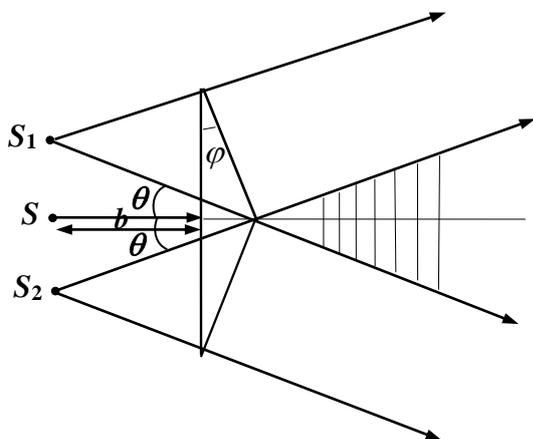


Рис. 8.6. *Бипризма*

Бипризма представляет собой две тонкие призмы с совмещёнными основаниями (см. рис. 8.6). Если угол призмы φ мал, то угол преломления такой призмы θ при малых углах падения света на плоскую грань равен $\theta = \varphi \cdot (n - 1)$, где n –

показатель преломления призмы. Если поместить источник S в виде святающейся щели на некотором расстоянии от бипризмы, то возникнут два мнимых изображения этого источника S_1 и S_2 на расстоянии b от бипризмы (см. рис. 8.7). Расстояние между S_1 и S_2



определяется выражением:

$$d \approx 2 b \cdot \theta = 2 b \cdot \varphi (n - 1) \quad (8.9)$$

Рис. 8.7. Формирование двух когерентных источников с помощью бипризмы

В области перекрытия когерентных пучков света от мнимых изображений S_1 и S_2 наблюдается интерференционная картина, для расчёта которой также применим подход, изложенный выше.

Интерференция в тонких плёнках

При прохождении света через тонкие прозрачные плёнки и

отражении света от их поверхностей

возникают когерентные световые пучки,

которые способны интерферировать.

Схема образования плоскопараллельной плёнкой когерентных пучков света изображена на рис. 8.8.

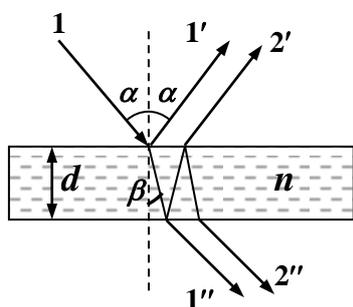


Рис. 8.8.

Интерференция наблюдается при

взаимодействии когерентных волн,

распространяющихся вдоль направлений $1'$ и $2'$, отражённых от

верхней и нижней поверхностей плёнки. Если плёнка плоскопараллельна, то лучи 1' и 2' могут перекрываться только очень далеко от плёнки (“на бесконечности”). Для наблюдения интерференционной картины на конечном расстоянии от плёнки на пути лучей 1' и 2' помещают собирающую линзу, а в её фокальной плоскости – экран. Можно показать, что геометрическая разность хода между соответствующими волнами равна $2d \cdot \cos\beta$, где β – угол преломления. При расчёте интерференционной картины необходимо учитывать, что при отражении от оптически более плотной среды (с бóльшим значением n) “теряется полволны” ($\lambda/2$ для луча 1', если $n > n_0$, где n_0 – показатель преломления окружающей среды). Тогда условие максимумов интерференции в отражённом свете можно записать в следующем виде:

$$2dn \cdot \cos\beta = (m - 1/2)\lambda_0, \quad (8.10)$$

а условие минимумов:

$$2dn \cdot \cos\beta = m\lambda_0, \quad (8.11)$$

где $m = 1, 2, \dots$; здесь λ_0 – длина волны света **в вакууме**.

Интерференционная картина наблюдается также в области перекрытия лучей 1" и 2", прошедших через плёнку (см. рис. 8.7). В этом случае условию максимумов соответствуют (8.11), а минимумов – (8.10).

Полосы равного наклона

Если толщина плёнки d постоянна, а на плёнку падает непараллельный пучок света, то разность хода интерферирующих лучей определяется углом преломления β , и, следовательно, углом падения луча на плёнку α . В этом случае

интерференционная картина представляет собой так называемые «*полосы равного наклона*». При постоянной толщине плёнки интерферирующие лучи параллельны и говорят, что интерференционная картина локализована на «бесконечности» или в фокальной плоскости собирающей линзы.

Полосы равной толщины

Если толщина плёнки d непостоянна, то в случае нормального падения света ($\cos\beta = 1$), оптическая разность хода волн в отражённом свете:

$$\Delta = 2d \cdot n + \lambda_0/2.$$

Таким образом, при освещении плёнки монохроматическим светом с длиной волны λ_0 , условие максимумов интерференции $\Delta = m\lambda_0$ определяет положение так называемых «*полос равной толщины*». При освещении такой плёнки белым светом условие максимумов интерференции для разных длин волн будет соответствовать различным толщинам плёнки, и окраска полос интерференции будет зависеть от толщины плёнки в соответствующем месте.

Кольца Ньютона

Кольца Ньютона представляют собой полосы равной толщины зазора между плосковыпуклой линзой с большим радиусом кривизны и плоской (или сферической) стеклянной поверхностью. В этом случае оптическая разность хода

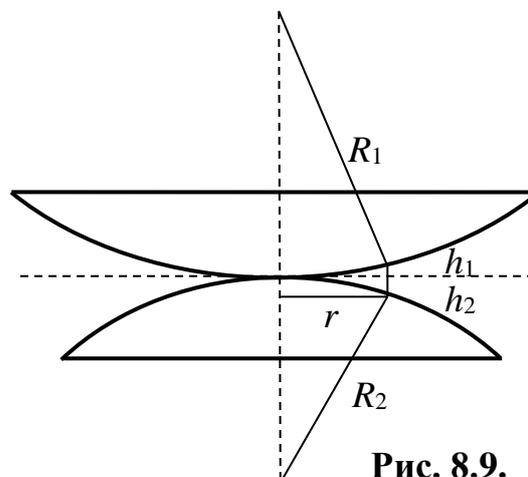


Рис. 8.9.

между интерферирующими волнами при наблюдении в отражённом свете определяются выражением $\Delta = 2hn + \lambda_0/2$, где h – толщина зазора между стеклянными поверхностями, n и λ – показатель преломления и длина волны в среде, заполняющей зазор (если зазор воздушный, то $n = 1$). В силу осевой симметрии оптической системы интерференционные полосы получаются в виде колец. В качестве примера рассчитаем радиусы колец Ньютона для случая, когда воздушный зазор образуется между двумя плосковыпуклыми линзами с радиусами кривизны R_1 и R_2 (см. рис. 8.9). В этом случае толщина зазора $h = h_1 + h_2$. Если $h \ll r$, где r – радиус кольца Ньютона, то $h_1 = r^2/2R_1$ и $h_2 = r^2/2R_2$. Тогда условие образования светлого интерференционного кольца в отражённом свете можно записать так:

$$\Delta = 2h + \lambda/2 = m\lambda \quad \text{или} \quad r^2 \cdot (1/R_1 + 1/R_2) + \lambda/2 = m\lambda,$$

где m – номер кольца. Отсюда получаем радиусы светлых колец:

$$r_m = \sqrt{(2m-1) \frac{\lambda}{2} \frac{R_1 R_2}{(R_1 + R_2)}}.$$

Задачи для самостоятельного решения

- 8.1. Чему равна амплитуда A колебания, являющегося суперпозицией N некогерентных колебаний одинакового направления и одинаковой амплитуды A_0 ?
- 8.2. Две световые волны создают в некоторой точке пространства колебания напряжённости электрического поля, описываемые функциями $E_{1y} = E_0 \cdot \cos \omega t$ и $E_{2y} = E_0 \cdot \cos[(\omega + \Delta\omega)t]$, где $\Delta\omega = 0,628 \text{ рад} \cdot \text{с}^{-1}$. Как ведёт себя интенсивность света в этой точке?
- 8.3. Найти интенсивность волны I , образованной в результате сложения двух когерентных волн одинаковой частоты, поляризованных во взаимно перпендикулярных направлениях. Интенсивности этих волн равны I_1 и I_2 .
- 8.4. Две плоские когерентные световые волны, угол между волновыми векторами которых $\alpha \ll 1$, падают почти нормально на экран. Амплитуды волн одинаковы. Записать уравнения обеих волн и, показать, что расстояние между соседними максимумами на экране $\Delta x = \lambda/\alpha$, где λ – длина волны.
- 8.5. Определить сдвиг Δx интерференционных максимумов 2-го порядка ($m = 2$) в опыте Юнга после заполнения водой пространства между экраном, на котором наблюдается интерференционная картина, и преградой со щелями. Расстояние между экраном и преградой $L = 1 \text{ м}$, расстояние между щелями $d = 1 \text{ мм}$, длина волны света в вакууме $\lambda_0 = 0,5 \text{ мкм}$, показатель преломления воды $n = 4/3$.

- 8.6.** На мыльную плёнку ($n = 1,33$) падает белый свет под углом $\alpha = 45^\circ$. При какой наименьшей толщине плёнки отражённые лучи будут окрашены в жёлтый цвет ($\lambda_{ж} = 600 \text{ нм}$)?
- 8.7.** Определить, на сколько полос сместится интерференционная картина в схеме Юнга, если одно из отверстий в преграде перекрыть прозрачной пластинкой толщиной $d = 10 \text{ мкм}$ с показателем преломления $n = 1,33$. Длина волны света в вакууме $\lambda_0 = 0,66 \text{ мкм}$.
- 8.8.** В опыте Юнга стеклянная пластинка толщиной $d = 2 \text{ см}$ помещается на пути одного из интерферирующих лучей перпендикулярно лучу. На сколько отличаются значения показателя преломления в разных местах пластинки, если различия в оптической разности хода по всей пластине не превышают $\Delta = 0,1 \text{ мкм}$?
- 8.9.** Найти минимальную толщину плёнки с показателем преломления $n = 1,33$, если известно, что свет с длиной волны $\lambda_{01} = 0,64 \text{ мкм}$ испытывает от неё максимальное отражение, а свет с длиной волны $\lambda_{02} = 0,4 \text{ мкм}$ не отражается совсем. Угол падения света $\alpha = 30^\circ$.
- 8.10.** Стеклянная пластинка покрыта прозрачной плёнкой. Для света с длиной волны $\lambda_0 = 4,8 \cdot 10^{-7} \text{ м}$ показатель преломления пластинки $n = 1,44$, показатель преломления плёнки $n_1 = 1,20$, показатель преломления воздуха равен 1. При какой минимальной толщине плёнки d свет указанной

длины волны будет проходить сквозь пластинку без потерь на отражение?

- 8.11.** На стеклянный клин падает нормально пучок света ($\lambda_0 = 0,582$ мкм). Угол клина равен $\theta = 20''$. Какое число светлых интерференционных полос N приходится на единицу длины клина? Показатель преломления стекла $n = 1,5$.
- 8.12.** Свет с длиной волны $\lambda_0 = 0,54$ мкм падает нормально на поверхность стеклянного клина. В отражённом свете наблюдается система интерференционных полос, расстояние между соседними максимумами $\Delta x = 0,18$ мм. Найти: а) угол между гранями клина θ ; б) степень монохроматичности света $\lambda_0/\Delta\lambda$, если интерференционная картина не наблюдается на расстоянии более $l = 1,5$ см от ребра клина. Показатель преломления стекла $n = 1,5$.
- 8.13.** При освещении клиновидной пластинки светом с длиной волны $\lambda_{01} = 0,5$ мкм интерференционные полосы равной толщины наблюдаются на части пластинки длиной $l_1 = 2$ мм. Определить длину волны света λ_{02} с той же степенью монохроматичности, если интерференционная картина в этом свете наблюдается на части пластинки длиной $l_2 = 2,8$ мм.
- 8.14.** Плоская световая волна ($\lambda_0 = 0,45$ мкм) падает по нормали на преграду с двумя узкими параллельными щелями. На экране, установленном за преградой, наблюдается интерференционная картина. На какую величину $\Delta\lambda$ следует изменить длину волны падающего света, чтобы после

заполнения пространства между преградой и экраном водой положение интерференционных полос не изменилось? Показатель преломления воды $n = 4/3$.

- 8.15.** Плосковыпуклая стеклянная линза, соприкасающаяся выпуклой поверхностью со стеклянной пластинкой, освещается монохроматическим светом. Наблюдение ведётся в отраженном свете. Радиусы двух соседних тёмных колец равны соответственно $r_1 = 4,0$ мм и $r_2 = 4,4$ мм. Радиус кривизны линзы $R = 6,4$ м. Найти порядковые номера колец и длину волны падающего света.
- 8.16.** Плосковыпуклая стеклянная линза, соприкасающаяся выпуклой поверхностью со стеклянной пластинкой, освещается монохроматическим светом. Найти расстояние Δr_x между 3-м и 16-м тёмными кольцами Ньютона, если расстояние между 2-м и 20-м тёмными кольцами равно $\Delta r = 4,8$ мм. Наблюдение ведётся в отражённом свете.
- 8.17.** В установке для наблюдения колец Ньютона пространство между линзой и плоской пластиной заполнено жидкостью. Определить показатель преломления жидкости, если радиус 3-го светлого кольца Ньютона $r_3 = 3,65$ мм. Наблюдение ведётся в проходящем свете. Радиус кривизны линзы $R = 10$ м, длина волны света в вакууме $\lambda_0 = 0,589$ мкм. Считать, что показатель преломления жидкости меньше, чем материала линзы и пластины.

- 8.18.** Плосковыпуклая стеклянная линза с радиусом кривизны $R = 40 \text{ см}$ соприкасается выпуклой поверхностью со стеклянной пластинкой. При этом в отражённом свете радиус некоторого тёмного кольца $r_1 = 5 \text{ мм}$. Каким стал радиус этого кольца r_2 , если линзу отодвинуть от пластинки на расстояние $h = 10 \text{ мкм}$?
- 8.19. *** На вершине сферической плосковыпуклой стеклянной линзы имеется сошлифованный участок радиусом $r_0 = 3 \text{ мм}$, которым она соприкасается с плоской стеклянной пластиной. Радиус кривизны линзы $R = 150 \text{ см}$. Найти радиус шестого светлого кольца при наблюдении в отражённом свете с длиной волны $\lambda_0 = 0,655 \text{ мкм}$.
- 8.20. *** Две соприкасающиеся, имеющие одну и ту же оптическую ось, тонкие линзы – одна двояковыпуклая, другая двояковогнутая – образуют систему с оптической силой $\Phi = 0,5 \text{ дптр}$. В свете с $\lambda_0 = 0,61 \text{ мкм}$, отражённом от этой системы, наблюдаются кольца Ньютона. Определить радиус десятого тёмного кольца. Показатель преломления материала $n = 1,5$. Оптическая сила такой системы рассчитывается по формуле: $D = 2(n - 1)(1/R_1 - 1/R_2)$, где R_1 , R_2 – радиусы кривизны выпуклой и вогнутой линз соответственно ($R_2 > R_1$).
- 8.21. *** Наблюдатель отсчитывает ширину 10 колец Ньютона вдали от их центра. Она оказывается равной $d_1 = 0,6 \text{ мм}$. Ширина следующих $N = 10$ колец оказывается равной $d_2 = 0,4 \text{ мм}$. Наблюдение проводится в отражённом свете при

длине волны $\lambda_0 = 600$ нм. Определить радиус кривизны поверхности линзы R .

8.22. Источник света диаметром $D = 30$ см находится от места наблюдения на расстоянии $L = 200$ м. В излучении источника содержатся длины волн в интервале от $\lambda_1 = 490$ нм до $\lambda_2 = 510$ нм. Оценить для этого излучения:

- а) время когерентности $\tau_{\text{ког}}$, б) длину когерентности $l_{\text{ког}}$,
в) радиус когерентности $r_{\text{ког}}$, г) объем когерентности $V_{\text{ког}}$.

8.23. Оценить радиус когерентности $r_{\text{ког}}$ света, приходящего от Солнца на Землю. Угловой размер Солнца примерно $\beta = 0,01$ рад. Длину световой волны принять равной $\lambda_0 = 500$ нм.

8.24. * Оценить критическую ширину b_{max} щелей (или диаметр светящихся нитей), используемых в опыте Юнга, при которой интерференционные полосы перестают быть различимы. Параметры l , d и λ считать известными.

9. Дифракция Френеля

Явление дифракции заключается в том, что вблизи края непрозрачной преграды свет частично проникает в область геометрической тени. При этом на экране, поставленном за преградой, наблюдается чередование максимумов и минимумов освещённости, как и при интерференции двух когерентных световых пучков. Это не случайно – дифракция света является по существу результатом многолучевой интерференции.

Основополагающим для понимания явления дифракции света является **принцип Гюйгенса-Френеля**, который состоит из двух частей.

1. *Принцип Гюйгенса.* При объяснении законов геометрической оптики Х. Гюйгенс исходил из волновых представлений о природе света. Он сформулировал принцип, согласно которому каждую точку пространства, до которой дошло возмущение световой волны (волнового фронта), можно рассматривать как точечный источник «вторичной» волны. Огибающая всей совокупности волновых фронтов сферических волн от этих вторичных источников даёт представление о форме и положении волнового фронта результирующей световой волны в последующие моменты времени. Используя принцип Гюйгенса, можно определять ход лучей света, как в однородной прозрачной среде, так и при отражении и преломлении света на границах раздела сред с различными оптическими свойствами.

2. *Дополнение Френеля.* Для расчёта дифракционных картин в различных случаях Френель дополнил принцип Гюйгенса тем,

что учёл *когерентность* вторичных волн и возможность их *интерференции* в области пространства за препятствием.

Итак, **принцип Гюйгенса-Френеля** применительно к задаче дифракции света включает два положения:

1. Каждый малый элемент волнового фронта не закрытый препятствием может рассматриваться как *самостоятельный источник* “вторичных” волн, распространяющихся за преградой.

2. Интенсивность света в любой точке пространства за препятствием можно найти, *вычислив результат интерференции когерентных вторичных волн* в этой точке.

Поскольку можно сказать, что при дифракции происходит многолучевая интерференция, определению её результата (сложение гармонических колебаний) значительно помогает уже хорошо знакомый нам метод векторных диаграмм, а в ряде случаев и специальный метод зон Френеля.

Зоны Френеля. Дифракция Френеля

Зоны Френеля – это области волнового фронта, выбираемые таким образом, что вторичные волны от крайних участков соседних зон возбуждают в точке наблюдения колебания, которые происходят в противофазе (имеют разность фаз π). Соответственно, разность хода таких волн равна $\lambda/2$. Метод зон Френеля позволяет получить достаточно точные представления об интенсивности света в центре дифракционной картины при дифракции на круглом отверстии или непрозрачном круглом диске малых размеров.

Поясним, как это делается на примере дифракции плоской монохроматической волны на круглом отверстии. Форма препятствия диктует и вид зон Френеля – это кольцевые участки волнового фронта, совпадающего с плоскостью преграды. Первая зона Френеля имеет форму круга. Центр всех зон Френеля (точка O) находится в центре круглого отверстия или диска.

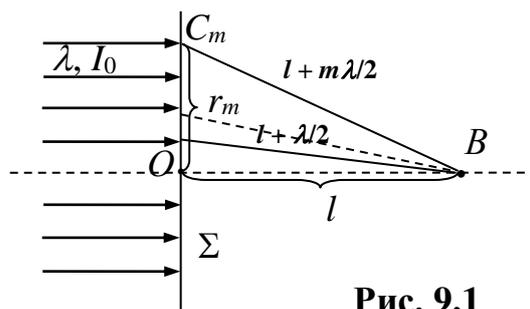
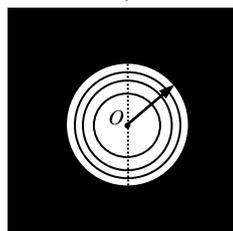


Рис. 9.1

Несколько первых зон Френеля внутри отверстия



Математическая процедура нахождения радиусов зон Френеля описана во многих учебных пособиях^{*)}. Она приводит к следующему результату:

$$r_m = \sqrt{m\lambda l}, \quad (9.1)$$

где l – расстояние от преграды до экрана.

Нетрудно показать, что площади всех зон Френеля при дифракции на круглом отверстии одинаковы (задача 9.1).

Примечание: При расчёте радиусов зон Френеля в случае падения на препятствие сферической волны от точечного источника вместо расстояния l в выражение под корнем входит величина, имеющая размерность расстояния $l^* = \frac{Ll}{L+l}$, где l – по-прежнему, расстояние от преграды до экрана, а L – от источника до преграды.

Чтобы применить принцип Гюйгенса-Френеля для решения нашей задачи, разобьём каждую зону Френеля на большое количество (n) узких кольцевых полосок одинаковой площади.

Проведём сложение колебаний, которые возбуждают в центре дифракционной картины (точке B на рис. 9.1) волны, пришедшие от каждой из этих полосок. Воспользуемся для этого

^{*)} См., например, С.Н. Козлов, А.В. Зотеев. “Колебания и волны. Волновая оптика”

векторной диаграммой. Как отмечалось ранее (см. разделы 5, 6, 8), векторная диаграмма есть представление гармонических колебаний в полярных координатах. Соответствующее колебание изображается в виде вектора, вращающегося против часовой стрелки с угловой скоростью ω . Угол поворота этого вектора определяет фазу, а его длина равна амплитуде соответствующего колебания.

Колебание, возбуждаемое в центре дифракционной картины волнами от первого кругового участка (расположенного в самом центре первой зоны Френеля) изобразим вектором $\mathbf{E}_1^{(I)}$, второго участка – $\mathbf{E}_2^{(I)}$ и т.д. (см. рис. 9.2). Волны от каждого следующего источника проходят до точки B больший путь, поэтому возбуждаемые ими колебания в точке B немного запаздывают по фазе $\Delta\varphi_i$. Фазовому запаздыванию соответствует поворот вектора $\mathbf{E}_i^{(I)**}$ по часовой стрелке на угол $\Delta\varphi_i$. Вектор $\mathbf{E}_n^{(I)}$, от последнего участка первой зоны, повернут на угол $\Delta\varphi_n = \pi$ по отношению к вектору $\mathbf{E}_1^{(I)}$, так как соответствующее колебание отстает по фазе на π . В итоге векторная диаграмма для случая, когда открыта только одна первая зона Френеля, получается в виде полуокружности – см. рис. 9.2,а. Результирующее колебание представлено на рис. 9.2,а вектором $\mathbf{E}^{(I)}$, полученным суммированием всех векторов от n участков.

Отметим, что амплитуда колебаний в точке B при открытой только одной первой зоне в два раза больше, чем при полностью открытом волновом фронте (см. рис. 9.2,а и в). В центре экрана

***) $\mathbf{E}_i^{(I)}$ соответствует колебаниям напряжённости электрического поля волны, приходящей в точку B от i -го вторичного источника (нижний индекс i) первой зоны Френеля (верхний индекс I)

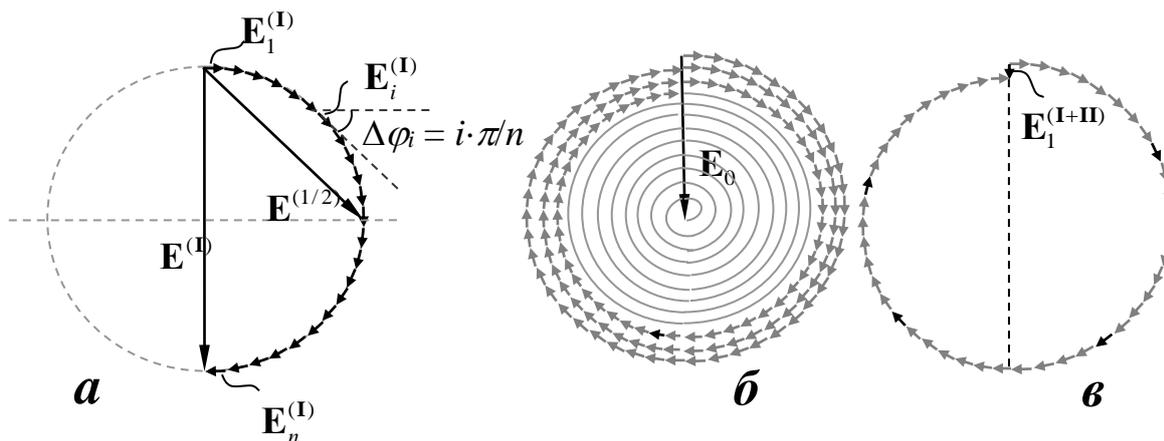


Рис. 9.2. Векторные диаграммы колебаний в точке наблюдения от первой (а), первой и второй (б) и всех (в) зон Френеля

наблюдается светлое пятно, интенсивность которого почти в 4 раза больше, чем в отсутствии преграды!

Аналогично достраивается векторная диаграмма и для остальных вторичных источников, оказавшихся в пределах отверстия. Вектор, соответствующий результирующему колебанию, получаем суммированием всех векторов $E_i^{(I)}$ – он соединяет начало первого вектора $E_1^{(I)}$ с концом последнего $E_n^{(k)}$.

Например, если открыто две первых зоны Френеля, амплитуда результирующего колебания близка к нулю (рис. 9.2,в) – наблюдается минимум интенсивности. При приближении экрана к препятствию с отверстием количество открытых зон Френеля растет, при этом в центре экрана наблюдается чередование максимумов интенсивности (при открытом нечётном количестве зон Френеля) и минимумов (открыто чётное количество зон). Векторная диаграмма рис. 9.2,б соответствует полностью открытому волновому фронту (препятствие отсутствует, зон Френеля очень много).

На диаграммах рис. 9.2,б,в учтено, что с увеличением номера зоны длины векторов $E_i^{(k)}$ постепенно уменьшаются, т.к. каждая последующая зона находится от точки B несколько дальше, чем предыдущая. Соответственно, с увеличением номера зоны уменьшается “диаметр” соответствующей полуокружности на векторной диаграмме.

При значительном удалении экрана ($l > r^2/\lambda$, где r – радиус отверстия) открытой остается только часть первой зоны Френеля. Интенсивность светлого пятна в центре дифракционной картины монотонно уменьшается с увеличением l .

Задачи для самостоятельного решения

- 9.1. Определить радиус m – ой зоны Френеля r_m при падении на круглое отверстие плоской волны длиной λ . Расстояние от отверстия до экрана равно l . Доказать, что площади всех зон Френеля одинаковы.
- 9.2. На преграду с круглым отверстием падает плоская световая волна длины $\lambda = 0,5$ мкм. Интенсивность в центре дифракционной картины в $k = 2$ раза больше, чем в отсутствии преграды. При каком минимальном радиусе отверстия это возможно, если экран расположен на расстоянии $l = 1$ м за препятствием.
- 9.3. Дифракционная картина наблюдается на экране, расположенном на расстоянии l от точечного источника монохроматического света ($\lambda = 0,6$ мкм). На расстоянии $a = 0,5l$ от источника помещена круглая непрозрачная преграда диаметром $d = 1$ мм. Определить расстояние l , если

преграда закрывает только первую зону Френеля. Что будет наблюдаться в центре экрана?

- 9.4.** На преграду с круглым отверстием падает плоская световая волна, интенсивность которой I_0 , а длина волны λ . Экран расположен на таком расстоянии за преградой, что для центра дифракционной картины открыта лишь первая зона Френеля. Отверстие наполовину закрывают тонкой прозрачной пластинкой в форме полукруга толщиной d и показателем преломления n . Какова интенсивность света в центре дифракционной картины?
- 9.5.** Плоская монохроматическая волна (длина волны λ) падает по нормали на прозрачную пластинку с показателем преломления n . В пластинке высверливается круглая выемка, радиус которой равен радиусу полутора зон Френеля для точки, находящейся в центре экрана. Определить минимальную глубину выемки h , при которой интенсивность в центре дифракционной картины будет: а) максимальной, б) минимальной, в) равной интенсивности падающей волны. Каковы величины максимальной и минимальной интенсивностей, если интенсивность падающего на пластинку света I_0 ?
- 9.6.** Точечный источник света (длина волны $\lambda = 0,5 \text{ мкм}$) расположен на расстоянии $L = 1 \text{ м}$ перед преградой с круглым отверстием радиусом $r = 1 \text{ мм}$. Найти расстояние l от преграды до точки наблюдения за преградой, для которой открыто три зоны Френеля.

- 9.7. Между точечным источником света и экраном поместили диафрагму с круглым отверстием, радиус которого r можно изменять. Расстояния от диафрагмы до источника и экрана равны соответственно $L = 1$ м и $l = 1,25$ м. Определить длину волны света λ , если один из максимумов освещённости в центре дифракционной картины наблюдается при радиусе $r_1 = 1$ мм, а при его увеличении следующий максимум возникает при радиусе отверстия $r_2 = 1,29$ мм.
- 9.8. Плоская световая волна ($\lambda = 0,6$ мкм) падает нормально на поверхность стеклянного диска ($n = 1,6$), который закрывает полторы зоны Френеля для точки наблюдения O за диском. При какой минимальной толщине этого диска интенсивность в точке O будет максимальной?
- 9.9. Непрозрачная пластинка с отверстием, диаметр которого $d = 1$ мм, освещается удалённым точечным источником света ($\lambda = 500$ нм). Найти расстояние l от отверстия до экрана, при котором будет наблюдаться наибольшая освещённость в его центре.
- 9.10. На преграду с круглым отверстием радиуса r падает плоская световая волна. Как изменяется интенсивность I в центре дифракционной картины на экране за преградой по мере приближения экрана к отверстию? Построить график зависимости $I(x)$, где x – расстояние от преграды до экрана. Длина волны падающего света λ , а его интенсивность I_0 . Сначала экран расположен очень далеко от преграды.
- 9.11. Определить толщину прозрачной плёнки с показателем преломления n , которой надо перекрыть чётные зоны

Френеля для получения фазовой зонной пластинки. Длина волны света λ .

- 9.12. Плоская монохроматическая волна, интенсивность которой I_0 , по нормали на непрозрачный диск. Диаметр диска равен диаметру первой зоны Френеля для точки наблюдения O за препятствием. Какой станет интенсивность света в точке O после того как: *a*) диск заменили на полукруглую пластинку того же диаметра; *б*) у диска удалили часть внешней половины первой зоны Френеля, не помеченную на рис. 9.3 штриховкой.

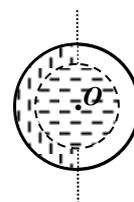


Рис. 9.3

- 9.13. Плоская монохроматическая волна падает нормально на непрозрачный экран с круглым отверстием. Интенсивность волны I_0 . Какова интенсивность света I за экраном в точке O , для которой отверстие открывает: *a*) первую зону Френеля (см. рис. 9.4,*a*); *б*) внутреннюю (без штриховки на рис. 9.4,*б*) половину первой зоны Френеля; *в*) половину первой зоны Френеля, не заштрихованную на рис. 9.4,*в*.

- 9.14. Изобразить векторную диаграмму для случая, когда внешнюю половину первой зоны Френеля (см. рис.

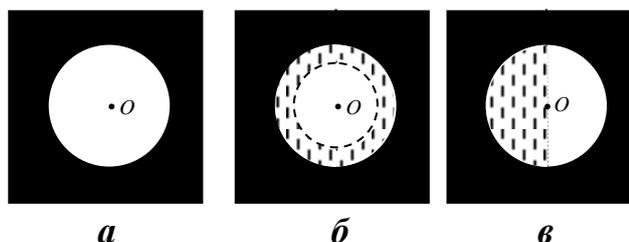


Рис. 9.4

9.4,*б*) перекрывают *тонкой* прозрачной пластинкой толщиной h . При какой минимальной толщине пластинки h_{min} интенсивность в центре дифракционной картины O не изменится? Длина волны света $\lambda = 0,5$ мкм, показатель преломления пластинки $n = 1,5$. При какой толщине пластинки интенсивность света в точке O будет минной?

10. Дифракция Фраунгофера на щели

Дифракцию Фраунгофера условно называют «дифракцией в параллельных лучах». Это означает, что источник света и экран, на котором наблюдается интерференционная картина, расположены очень далеко от преграды (более строгое определение дифракции Фраунгофера будет дано в конце этого раздела). Обычно при наблюдении дифракции Фраунгофера дифракционную картину фокусируют на экране, расположенном в фокальной плоскости собирающей линзы (см. рис. 10.1).

Пусть на протяженную щель шириной b падает по нормали плоская монохроматическая волна. В соответствии с принципом

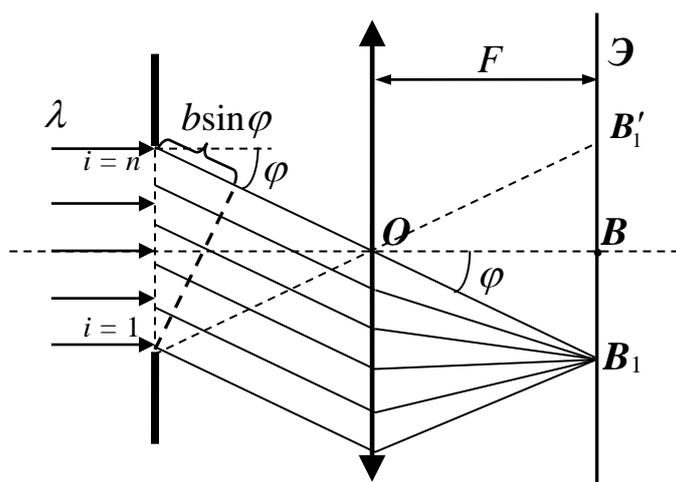


Рис. 10.1.
*Дифракция Фраунгофера
на щели*

Гюйгенса-Френеля, фронт волны в плоскости щели можно разбить на очень узкие полоски – нити, параллельные краям щели, являющиеся источниками вторичных волн (в данном случае цилиндрических). Как и в случае дифракции Френеля, вид дифракционной картины можно проанализировать с помощью метода векторных диаграмм. Такая процедура содержится во многих учебных пособиях,^{*)} поэтому здесь мы остановимся лишь

^{*)} См., например, С.Н. Козлов, А.В. Зотеев “Колебания и волны. Волновая оптика” с.104–110.

на основных её результатах.

В центр дифракционной картины (точка B , угол дифракции $\varphi = 0$) волны, испущенные всеми вторичными источниками, приходят в одной фазе – здесь наблюдается самый интенсивный «центральный», или «нулевой», максимум. Область центрального максимума ограничена двумя симметрично расположенными минимумами первого порядка («левым» и «правым»). Волны от крайних вторичных источников ($i = 1$ и $i = n$, см. рис. 10.1), расположенных в пределах щели, приходят в эти точки (B'_1 и B_1) со сдвигом фаз, равным 2π – векторная диаграмма «сворачивается» в «почти» окружность. Это означает в свою очередь, что разность хода для соответствующих лучей ($b\sin\varphi$) равна λ . При этом число открытых зон Френеля^{**}), видимых из минимумов первого порядка, равно двум. Следующие минимумы дифракции второго, третьего и т.д. порядков наблюдаются в точках, для которых открыто 4, 6 и т.д. зон Френеля. Соответственно, из максимумов дифракционной картины первого, второго и т.д. порядков видны 3, 5 и т.д. зон Френеля. Углы, под которыми наблюдаются максимумы, определяются равенством $b\sin\varphi = \pm(m + 1/2)\lambda$, где $m = 1, 2, 3, \dots$ – порядок дифракционного максимума.

Таким образом, вместо узкого изображения щели в фокальной плоскости линзы наблюдается дифракционная картина, представленная на рис. 10.2. Более строгий количественный анализ позволяет получить точную функцию распределения интенсивности светового потока за препятствием

^{**}) Они имеют на этот раз форму равновеликих полосок, параллельных краям щели. Иногда такие зоны называются зонами Шустера.

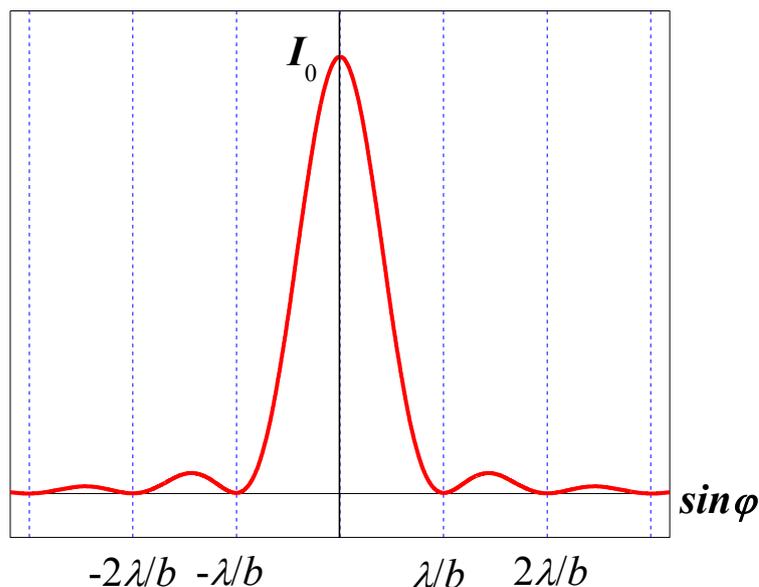


Рис. 10.2. Дифракционная картина Фраунгофера от щели

в зависимости от угла дифракции φ :

$$I = \frac{\sin^2 x}{x^2} I_0,$$

где $x = \frac{\pi b \sin \varphi}{\lambda}$, а I_0 – **интенсивность в центре** дифракционной картины (т. е. при $\varphi = 0$, в точке B).

Площадь под кривой зависимости интенсивности от координаты $I(x)$ пропорциональна полному световому потоку, прошедшему через щель.

Наиболее важным параметром дифракционной картины от щели является угловое положение дифракционных минимумов первого порядка: $\sin \varphi_1 = \pm \lambda/b$. Этот параметр определяет **тип дифракции**, а также **разрешающую способность** оптических приборов.

В зависимости от соотношения трёх параметров дифракционной картины: размера отверстия b , расстояния от препятствия до экрана l и длины волны света λ может наблюдаться дифракция **Френеля** либо **Фраунгофера**. Подчеркнём,

что тип дифракции *не зависит* от того, на каком препятствии наблюдается дифракция (например, на щели или круглом отверстии), а также от того, *используется линза при регистрации дифракционной картины или нет*. Для решения многих практических задач дифракционными явлениями вообще можно пренебречь и пользоваться представлениями *геометрической оптики*.

а) Геометрическая оптика

Если на достаточно широкую щель ($b \gg \lambda$) падает параллельный пучок света, то по законам геометрической оптики на экране за препятствием должна наблюдаться светлая полоса шириной b . Угловой размер этой полосы «с точки зрения» щели $\varphi_0 \approx b/l$. Очевидно, что приближение геометрической оптики будет достаточно хорошим, если величина φ_0 много больше дифракционного «размытия» изображения щели $\varphi_1 = \arcsin(\lambda/b) \approx \lambda/b$ (см. рис. 10.2), т.е. при выполнении условия

$$\frac{b^2}{l\lambda} \gg 1. \quad (10.1)$$

б) Дифракция Фраунгофера

Для того чтобы наблюдать дифракцию Фраунгофера, нужно удалить экран от щели на очень большое расстояние (только при этом условии дифракционная картина формируется «параллельными лучами»). Для этого должно выполняться неравенство, обратное (10.1):

$$\frac{b^2}{l\lambda} \ll 1. \quad (10.2)$$

Это соотношение может быть интерпретировано с использованием представлений о зонах Френеля. Действительно,

разность хода между волнами, приходящими от крайних вторичных источников внутри щели, равна $b \cdot \sin \varphi$ (см. рис. 10.1). Вблизи центра экрана величина $\sin \varphi \cong b/l$, поэтому $b \cdot \sin \varphi \cong b^2/l$ и, следовательно, условие (10.2) означает, что из области *вблизи центра дифракционной картины видно менее одной зоны Френеля*. Соответственно, условие (10.1) показывает, что приближение геометрической оптики оказывается достаточно хорошим, когда щель (или отверстие) открывает очень много зон Френеля.

в) Дифракция Френеля. Дифракция Френеля представляет собой промежуточный случай между двумя ситуациями, описанными в пунктах (а) и (б). Дифракция Френеля наблюдается, когда *из области вблизи центра дифракционной картины видно небольшое число зон Френеля*. При этом выполняется условие:

$$\frac{b^2}{l\lambda} \sim 1. \quad (10.3)$$

Таким образом, если экран расположен настолько близко к щели (или круглому отверстию), что выполняется неравенство (10.1), достаточно хорошим оказывается приближение *геометрической оптики*. Соответственно, наблюдатель видит на экране светлую полосу («изображение» щели) со слегка «смазанными» краями. При постепенном удалении экрана от препятствия начинает выполняться соотношение (10.3) и появляется характерная картина *дифракции Френеля*. В центре экрана при этом может наблюдаться как минимум, так и максимум интенсивности (в зависимости от того, чётное или нечётное число зон Френеля открывает препятствие). Наконец, если экран находится настолько далеко от щели, что справедливо

неравенство (10.2), в центре экрана *всегда* наблюдается *максимум* интенсивности, характерный для *дифракции Фраунгофера*.

г) Разрешающая способность оптических приборов

Для большинства оптических приборов диаметр объектива настолько велик, что заведомо соблюдается условие (10.1) (под b следует понимать диаметр d входного отверстия оптического прибора). Однако угловой размер изображения точечного объекта из-за дифракционного «размытия» не может быть меньше величины $\varphi_1 \cong \lambda/b$. Поэтому два точечных источника, находящиеся друг от друга на расстоянии h , а от объектива оптического

прибора – на расстоянии L , *будут различимы* («разрешены»), только если угловое расстояние между ними β больше углового размера дифракционного «размытия» изображений, т.е. $h/L > \lambda/b$ (см. рис. 10.3). Таким образом, эти два точечных источника будут разрешены, если выполняется *условие разрешения*

$$h > \frac{L\lambda}{b}. \quad (10.4)$$

Заметим, что этому условию соответствует неравенство $b > r_{\text{ког}} = \lambda \cdot L/h$.

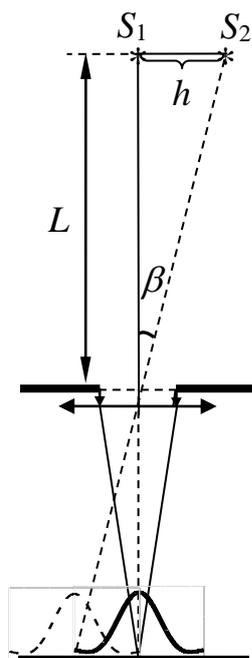


Рис. 10.3

В заключение поясним, что неравенство (10.4) было получено как следствие рассмотрения дифракции Фраунгофера на щели.

Расчёт дифракции Фраунгофера *на круглом отверстии* показывает, что угловое положение первого минимума определяется соотношением $d \cdot \sin \varphi_1^{(к)} = 1,22\lambda$. Соответственно, для

оптических приборов с круглыми объективами вместо (10.4) следует использовать более точное соотношение

$$h > 1,22\lambda/dL. \quad (10.4,a)$$

Учитывая, однако, приближённый характер соотношений (10.4) и (10.4,a), при решении задач мы предлагаем использовать более простую оценку разрешающей способности оптических приборов с помощью неравенства (10.4).

Задачи для самостоятельного решения

10.1. Как будет изменяться дифракционная картина в фокальной плоскости линзы при продольном и поперечном смещении щели относительно линзы?

10.2. На щель шириной $b = 0,4$ мм, установленную на расстоянии $l = 2,5$ м от экрана, падает по нормали плоская световая волна с $\lambda = 0,6$ мкм с интенсивностью $I = 100$ мВт/см². Какой вид дифракции наблюдается в этом случае? Оценить интенсивность I_0 в центре дифракционной картины.

Указание. Для оценки интенсивности форму центрального максимума считать приближённо близкой к треугольной.

10.3. Определить тип дифракции и ширину центрального дифракционного максимума Δx при падении плоской волны длиной $\lambda = 0,5$ мкм на щель шириной $b = 0,5$ мм. Дифракционная картина наблюдается на расстоянии $l = 2$ м за препятствием.

10.4. Пользуясь методом векторных диаграмм, найти отношение интенсивностей максимумов нулевого и первого порядка

при дифракции Фраунгофера на щели.

- 10.5.** Применяя метод векторных диаграмм, найти угловое распределение интенсивности света $I(\varphi)$ при дифракции Фраунгофера на щели плоской монохроматической световой волны.
- 10.6.** Найти ширину радужного канта центрального максимума Δx в фокальной плоскости линзы с фокусным расстоянием $F = 1 \text{ м}$ при наблюдении фраунгоферовой дифракции белого света ($\lambda = 400 \div 760 \text{ нм}$) на щели шириной $b = 0,5 \text{ мм}$.
- 10.7.** Плоскопараллельный пучок света с длиной волны λ падает нормально на щель шириной $b = 6\lambda$. Под каким углом φ будет наблюдаться третий дифракционный минимум?
- 10.8.** На узкую щель падает по нормали параллельный пучок монохроматического света. Ширину щели увеличивают в 2 раза. Как изменятся ширина и высота центрального дифракционного максимума?
- 10.9.** Дифракция Фраунгофера на щели шириной b наблюдается в фокальной плоскости собирающей линзы. Получите точное выражение для ширины центрального дифракционного максимума Δx . Длина волны света λ , фокусное расстояние линзы F .
- 10.10.** На пути плоской световой волны установлена непрозрачная преграда, в которой вырезана узкая щель шириной $b = 0,1 \text{ мм}$. За преградой на расстоянии l расположен экран, на котором наблюдается дифракционная картина. Найти

условия наблюдения дифракции Френеля и дифракции Фраунгофера. При каком условии можно использовать приближение геометрической оптики. Длина волны света равна $\lambda = 0,5 \text{ мкм}$.

10.11. Вычислить наименьшее расстояние h между двумя точками на Луне, которые можно различить с помощью телескопа. Диаметр фокусирующего зеркала телескопа $d = 5 \text{ м}$. Считать, что длина волны света $\lambda = 0,55 \text{ мкм}$. Расстояние до Луны $L = 3,8 \cdot 10^5 \text{ км}$.

10.12. Может ли охотник различить невооруженным глазом двух волков, находящихся от него на расстоянии $L = 5 \text{ км}$? Или он примет их за одного медведя? Расстояние между волками $h = 1 \text{ м}$. Диаметр зрачка глаза $d = 4 \text{ мм}$.

10.13. На преграду со щелью шириной $b = 0,5 \text{ мм}$ падает световая волна ($\lambda = 500 \text{ нм}$), распространяющаяся от нитевидного источника, параллельного щели и расположенного на расстоянии $L = 0,5 \text{ м}$ от неё. За преградой на расстоянии $l = 6 \text{ м}$ находится экран. Как можно классифицировать дифракцию на щели в этом случае? Изменится ли тип дифракции при удалении источника на расстояние $L = 10 \text{ м}$ от щели?

10.14. На преграду с двумя параллельными щелями падает по нормали плоская световая волна (длина волны λ). Ширина каждой щели b , расстояние между центрами щелей $d = nb$, где $n = 4$. Изобразите зависимость интенсивности света от синуса угла дифракции на экране, расположенном далеко

от преграды. Как будет изменяться вид этой зависимости при уменьшении ширины щелей (увеличении n)?

10.15. Одну из щелей в задаче 10.14 закрыли прозрачной пластинкой толщиной $h = 1,5$ мкм. Как изменился при этом вид дифракционной картины? Длина волны света $\lambda = 500$ нм, показатель преломления пластины $n = 1,5$.

10.16. На преграду со щелью шириной $b = 10$ мкм падает под углом к нормали $\varphi_0 = 30^\circ$ плоская световая волна ($\lambda = 500$ нм). Найти угловые положения минимумов φ_1 и φ_2 , ограничивающих центральный максимум дифракционной картины относительно нормали к преграде и относительно оси падающего на преграду луча света (φ_1' и φ_2').

10.17. На преграду со щелью шириной $b_1 = 10\cos 30^\circ$ мкм = 8,66 мкм падает по нормали плоская световая волна ($\lambda = 500$ нм). Найти угловые положения первых дифракционных минимумов. Сопоставить их с положениями первых дифракционных минимумов относительно оси падающего на преграду луча света в предыдущей задаче.

10.18. На преграду со щелью шириной $b = 0,1$ мм падает по нормали плоская световая волна ($\lambda = 500$ нм). Половина щели перекрыта прозрачной плёнкой с показателем преломления $n = 1,5$. Определить минимальную толщину плёнки d , при которой освещённость на экране напротив центра щели будет минимальной. Определить также угловое положение максимумов освещённости, ближайших

к центру дифракционной картины.

- 10.19.** На узкую отражающую полосу шириной b падает под углом $\alpha = 30^\circ$ к нормали плоская световая волна ($\lambda = 500 \text{ нм}$). Найти, в пределах каких углов $\beta_1 < \beta < \beta_2$ распространяется отраженный этой полоской свет. Рассмотреть случаи, когда: а) $b = 0,1 \text{ мм}$; б) $b = 10 \text{ мкм}$; в) $b = 1 \text{ мкм}$.

11. Дифракционная решётка

Дифракционная решётка представляет собой систему N параллельных щелей шириной b , расположенных в одной плоскости на равном расстоянии d друг от друга. Схема наблюдения дифракции Фраунгофера на решётке представлена на рисунке 11.1.

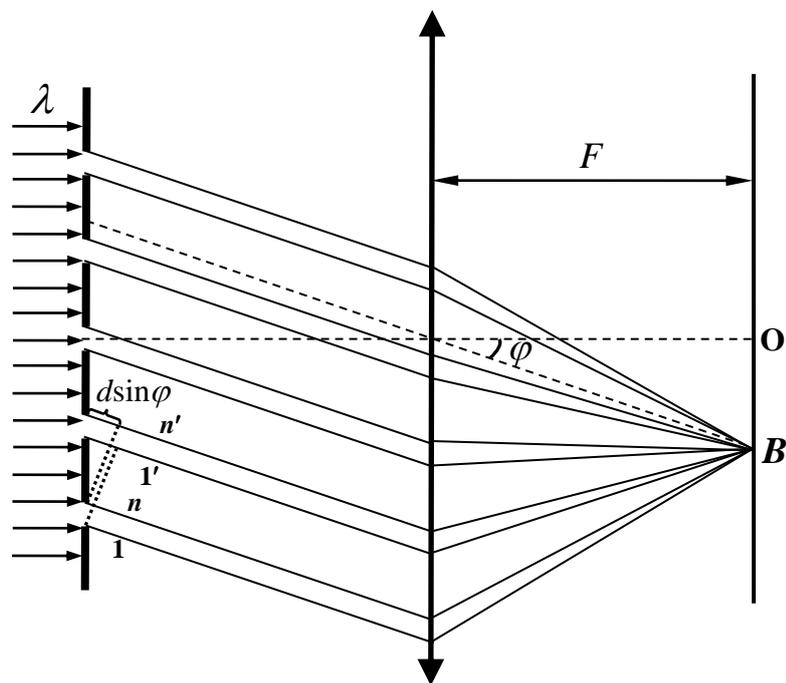
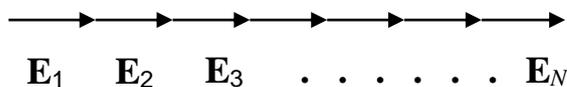


Рис. 11.1. Дифракция Фраунгофера на решётке

Дифракционная картина в этом случае является результатом интерференции лучей, выходящих из всех N щелей. При этом разность хода между любыми “эквивалентными” лучами, идущими от соседних щелей (см. лучи 1 и 1', n и n' на рис. 11.1), под углом φ , составляет $d \cdot \sin \varphi$, где d – период дифракционной решётки. Линза фокусирует все эти лучи в одной точке экрана (точка B). Если колебания напряжённости электрического поля в данной точке, возбуждённые волнами от вторичных источников

каждой из N щелей изобразить векторами E_1, E_2, \dots, E_N , то векторная диаграмма, определяющая условие главных максимумов дифракции, будет выглядеть следующим образом:



Такая векторная диаграмма получается, когда разность хода эквивалентных лучей от соседних щелей равна целому числу длин волн. Отсюда получаем *условие главных максимумов*:

$$d \cdot \sin \varphi = \pm m \lambda, \quad \text{где } m = 0, 1, 2, 3, \dots$$

Амплитуда результирующего колебания равна в этом случае сумме длин векторов E_i , т.е. $N \cdot E_i$, а интенсивность $I_0 = N^2 \cdot I_1$, где I_1 – интенсивность в соответствующем месте экрана от одной щели.

Главные минимумы дифракционной картины от решётки расположены в тех местах экрана, куда попадают *минимумы от каждой отдельной щели*:

$$b \cdot \sin \varphi = \pm m' \lambda, \quad (m' = 1, 2, \dots).$$

Векторная диаграмма, определяющая условие дополнительных (побочных) минимумов освещённости на экране, представляет собой замкнутый многоугольник, построенный из векторов колебаний E_1, E_2, \dots, E_N (см. рис. 11.2).

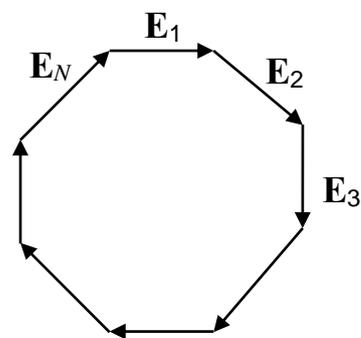


Рис. 11.2

Тогда *условие дополнительных минимумов* вблизи центрального главного максимума ($m = 0$) будет определяться выражением:

$$Nd \cdot \sin \varphi = \pm m_1 \lambda, \quad (m_1 = 1, 2, \dots, N-1).$$

Дополнительные минимумы вблизи главного максимума порядка m будут наблюдаться при выполнении условий:

$$d \cdot \sin \varphi = \pm m \lambda \pm m_1 \lambda / N, \quad (m_1 = 1, 2, \dots, N-1).$$

Положение дополнительных дифракционных минимумов определяет угловую ширину главных максимумов: $\Delta \varphi \approx 2 \lambda / Nd$.

Между дополнительными минимумами появляются *побочные (дополнительные) максимумы*. Их угловое положение определяется условием:

$$d \sin \varphi = m \lambda \pm (m_1' + 1/2) \lambda / N, \quad (m_1' = 1, 2, \dots, N-2).$$

Однако, амплитуда побочных максимумов намного меньше амплитуды главных максимумов.

В качестве примера на рис. 11.3 представлена дифракционная картина от решётки, состоящей из $N = 5$ щелей, с периодом $d = 3b$.

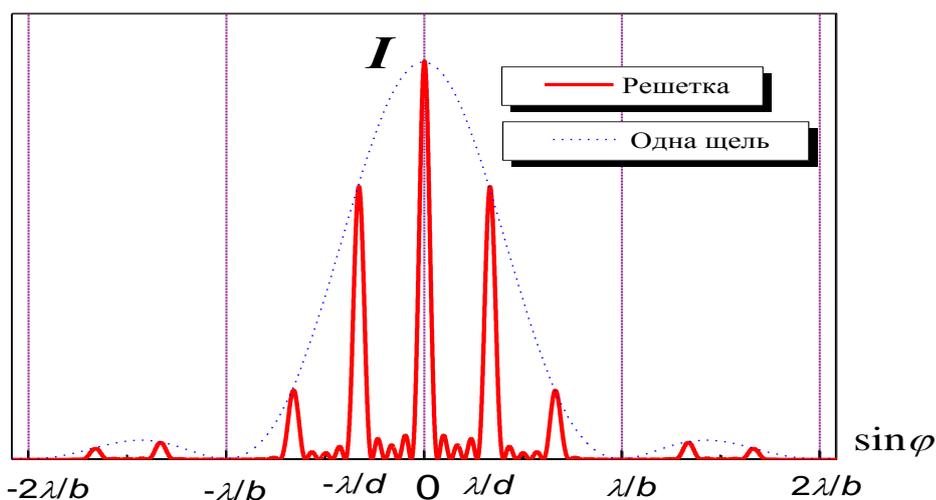


Рис. 11.3. Сравнение дифракционных картин от решётки ($N = 5$, $d = 3b$) и одной щели. В случае дифракции на щели интенсивность увеличена в $N^2 = 25$ раз.

Видно, что те главные дифракционные максимумы, положение которых должно оказаться на месте главных минимумов, пропадают. Количество побочных максимумов между соседними главными максимумами в данном случае равно $N-2 = 3$, а побочных минимумов $N-1 = 4$.

Характеристики дифракционной решётки как спектрального аппарата

1. Угловая дисперсия

Угловая дисперсия определяет угловое расстояние между двумя спектральными линиями, отличающимися на единичный интервал длин волн. По определению она равна:

$$D_{\varphi} = \frac{d\varphi}{d\lambda}.$$

Дифференцируя условие главных максимумов, получим: $d \cdot \cos \varphi \cdot d\varphi = m \cdot d\lambda$. Отсюда следует, что угловая дисперсия в спектре m -го порядка:

$$D_{\varphi} = \frac{m}{d \cos \varphi}.$$

При малых углах дифракции $\cos \varphi \approx 1$ и можно использовать упрощённое выражение $D_{\varphi} \approx m/d$. Угловая дисперсия тем больше, чем выше порядок спектра и меньше период дифракционной решётки.

2. Линейная дисперсия

Линейная дисперсия равна: $D_x = \frac{dx}{d\lambda}$,

где dx – линейное смещение на экране или фотоплёнке положения главного максимума при малом изменении длины волны $d\lambda$ падающего на решётку света (в m -м спектре дифракции).

При небольших углах дифракции dx связано с угловым расстоянием между ними простым соотношением: $dx \approx F \cdot d\varphi$, где F – фокусное расстояние линзы. Тогда линейная дисперсия приближённо равна $D_x \approx F \cdot D_{\varphi}$.

3. Разрешающая способность

Разрешающей способностью спектрального аппарата R называется отношение длины волны λ , на которой проводится измерение, к минимальной разрешаемой данным аппаратом разнице в длинах волн $R = \lambda/\delta\lambda_{min}$. Согласно критерию Релея, две спектральные линии λ и $\lambda + \delta\lambda_{min}$ ещё будут разрешены, если максимум одной совпадает с минимумом другой. Условие совпадения максимума $\lambda + \delta\lambda_{min}$ и первого побочного минимума λ в спектре m -го порядка можно записать так:

$$d \cdot \sin\varphi = m(\lambda + \delta\lambda_{min}) = (m + 1/N)\lambda.$$

Отсюда получаем: $\delta\lambda_{min} = \lambda/mN$, и, соответственно, разрешающая способность дифракционной решётки R оказывается пропорциональной числу щелей N и порядку интерференции (порядковому номеру главного максимума):

$$R = mN.$$

Задачи для самостоятельного решения

- 11.1.** Определить постоянную дифракционной решётки d , если для того, чтобы увидеть красную линию ($\lambda = 7 \cdot 10^{-7}$ м) в спектре второго порядка, зрительную трубу необходимо установить под углом 30° к нормали? Какое число штрихов нанесено на 1 см длины этой решётки? Свет падает на решётку по нормали.
- 11.2.** Определить длину волны света λ , если для решётки с периодом $d = 1,55 \cdot 10^{-3}$ мм угол $\Delta\varphi$ между максимумами 1 и 2 порядка равен 30° .

- 11.3. * Свет с длиной волны $\lambda = 0,6 \text{ мкм}$ падает по нормали на дифракционную решётку, которая нанесена на плоскую поверхность плоско-выпуклой цилиндрической стеклянной линзы ($n = 1,5$) с радиусом кривизны $R = 20 \text{ см}$. Период решётки $d = 6 \text{ мкм}$. Найти расстояние Δx между симметрично расположенными главными максимумами первого порядка в фокальной плоскости этой линзы.
- 11.4. Свет с длиной волны λ падает по нормали на дифракционную решётку. Найти явную зависимость угловой дисперсии от угла дифракции φ .
- 11.5. Свет с $\lambda = 589 \text{ нм}$ падает по нормали на дифракционную решётку с периодом $d = 2,5 \text{ мкм}$, содержащую $N = 10^4$ штрихов. Найти угловую ширину дифракционного максимума второго порядка ($m = 2$).
- 11.6. Свет падает по нормали на дифракционную решётку шириной $l = 6,5 \text{ см}$, имеющую $n = 200$ штрихов на миллиметр. Определить, в каком порядке спектра могут быть разрешены спектральные линии соответствующие длинам волн $\lambda_1 = 670,800 \text{ нм}$ и $\lambda_2 = 670,815 \text{ нм}$.
- 11.7. Что произойдет с дифракционной картиной, если щели дифракционной решётки перекрыть через одну?
- 11.8. Показать, что при нормальном падении света на дифракционную решётку максимальная величина её разрешающей способности R не может превышать значения l/λ , где l – ширина решётки, λ – длина волны света.

- 11.9. В дифракционной картине от решётки с периодом $d = 2,4$ мкм, достаточно интенсивными оказываются только по два максимума с каждой стороны от центрального. Какова ширина щелей b в этой решётке?
- 11.10. При нормальном падении света на дифракционную решётку угол отклонения для волны $\lambda_1 = 0,7$ мкм в первом порядке равен $\varphi_1 = 30^\circ$. Определить длину волны света λ_2 , для которой угол отклонения во втором порядке равен 45° .
- 11.11. Получить точное выражение для угловой дисперсии D_φ дифракционной решётки в зависимости от λ и порядка дифракции m .
- 11.12. В спектрографе установлена дифракционная решётка, период которой $d = 1$ мкм. На решётку падает белый свет. Фокусное расстояние объектива спектрографа $F = 1$ м. Определить ширину Δx спектра видимого диапазона в первом порядке дифракции.
- 11.13. Длина рабочей части дифракционной решётки прибора, описанного в предыдущей задаче, равна $l = 10$ см. Оценить его линейную дисперсию и разрешающую способность.
- 11.14. Половину дифракционной решётки перекрывают с одного края непрозрачной преградой. Как изменится при этом:
- а) положение главных дифракционных максимумов; б) высота центрального максимума; в) ширина главных максимумов; г) суммарная площадь максимумов.

Предполагается, что радиус когерентности падающего на решётку света значительно больше ширины решётки.

- 11.15. Ответить на вопросы предыдущей задачи при условии, что радиус когерентности падающего на дифракционную решётку света равен половине длины решётки.
- 11.16. Построить дифракционную картину от решётки с числом щелей $N = 5$, для которой: а) $d = 2b$, б) $d = 2,5b$.
- 11.17. На дифракционную решётку падает по нормали монохроматический свет с длиной волны $\lambda = 600 \text{ нм}$. Определить наибольший порядок спектра m , который можно наблюдать с помощью этой решётки, если её период $d = 2 \text{ мкм}$.

12. Поляризация света

Поляризация поперечных волн состоит в нарушении симметрии распределения возмущений относительно направления распространения волны. Для продольных волн такое нарушение симметрии невозможно, поэтому продольные волны не бывают поляризованными. *Поляризация света* представляет собой прямое доказательство поперечности электромагнитных (и, в частности, световых) волн.

Простейший анализ состояния поляризации света состоит в пропускании его через совершенный поляроид–анализатор, плоскость пропускания (главную плоскость) которого постепенно поворачивают относительно луча. Степень поляризации анализируемого света P определяется выражением:

$$P = \frac{I_{max} - I_{min}}{I_{max} + I_{min}}, \quad (12.1)$$

где I_{max} – максимальная интенсивность света, прошедшего через анализатор, I_{min} – минимальная интенсивность прошедшего через анализатор света (при повороте его на $\pi/2$). Таким образом, степень поляризации плоско-поляризованного*) света $P = 1$ ($I_{min} = 0$). Степень поляризации естественного света, который представляет собой смесь плоско-поляризованных во всех возможных плоскостях волн, равна нулю (поскольку $I_{max} = I_{min}$).

Если на совершенный поляризатор падает плоско-поляризованный свет интенсивностью I_0 , плоскость колебаний

*) Плоско (линейно) – поляризованным называется свет, в котором вектор \vec{E} колеблется в одной плоскости, включающей световой луч (т.н. “плоскости колебаний”).

которого составляет угол α с главной плоскостью поляризатора, поляризатор пропустит только ту составляющую вектора \vec{E} , которая параллельна его главной плоскости. Интенсивность прошедшего через поляризатор света пропорциональна квадрату напряжённости электрического поля и, следовательно, равна

$$I_1 = I_0 \cdot \cos^2 \alpha \quad (\text{закон Малюса}). \quad (12.2)$$

После прохождения естественного света интенсивностью I_* через совершенный поляризатор получается плоскополяризованный свет, интенсивность которого $I_1 = I_*/2$.

Поляризация света возникает также при отражении его от поверхности диэлектриков. В соответствии с *законом Брюстера* отражённый свет становится полностью поляризованным, если выполняется условие $\operatorname{tg} \alpha_B = n/n_0$, где α_B – угол падения луча света (угол Брюстера), n и n_0 – показатели преломления диэлектрика и окружающей среды, соответственно. При этом колебания вектора \vec{E} в отражённом свете происходят в плоскости, перпендикулярной плоскости падения света, а преломленный луч остаётся частично поляризованным (обеднён волнами, плоскость колебаний которых перпендикулярна плоскости падения).

Рассмотрим решение некоторых типичных задач

Задача

12.1. Степень поляризации частично поляризованного света $P = 0,25$. Найти отношение k интенсивности плоскополяризованной составляющей этого света I_1 к интенсивности естественной (неполяризованной) составляющей I_* .

Решение

$$I_{max} = I_1 + I_*/2; \quad \text{а} \quad I_{min} = I_*/2, \quad \text{тогда}$$

$$P = \frac{I_1}{I_1 + I_*} = \frac{k}{k + 1}. \quad \text{Отсюда} \quad k = I_1/I_* = P/(1-P).$$

Задача

12.2. На пути частично поляризованного света поместили идеальный поляризатор. При повороте поляризатора на угол $\alpha = 60^\circ$ из положения, соответствующего максимуму пропускания света, интенсивность прошедшего света уменьшилась в $n = 3$ раза. Найти степень поляризации P падающего света.

Решение

Отношение интенсивностей можно записать в виде:

$$n = \frac{I_1 + I_*/2}{I_1 \cos^2 \alpha + I_*/2} \quad \text{или} \quad n = \frac{2k + 1}{2k \cos^2 \alpha + 1},$$

где $k = I_1/I_*$. Отсюда

$$k = \frac{n - 1}{2(1 - n \cos^2 \alpha)}.$$

Так как $P = k/(k + 1)$ (см. предыдущую задачу), то окончательно получим:

$$P = \frac{n - 1}{1 - n \cos 2\alpha} = 0,8.$$

Двойное лучепреломление

Оптическая анизотропия некоторых сред (например, кристаллов) приводит к тому, что скорость распространения света, и, соответственно, показатель преломления, зависят от ориентации плоскости поляризации света. В результате этого луч

света при прохождении через анизотропную среду разделяется на два – наблюдается «двойное лучепреломление». Один луч, плоскость колебаний вектора напряжённости электрического поля \vec{E} которого перпендикулярна главной оптической плоскости*), называется *обыкновенным*. Скорость его не зависит от направления распространения. Соответственно, показатель преломления для этого луча постоянен (n_0). Другой луч, для которого плоскость колебаний вектора \vec{E} параллельна главной оптической плоскости, называется *необыкновенным*. Его скорость и показатель преломления зависят от направления распространения. Если этот луч распространяется вдоль оптической оси, он становится обыкновенным и его показатель преломления равен n_0 ; если перпендикулярно оптической оси, то его показатель преломления n_e наиболее сильно отличается от n_0 . Кристалл называется положительным, если $n_e > n_0$ и отрицательным, если $n_e < n_0$.

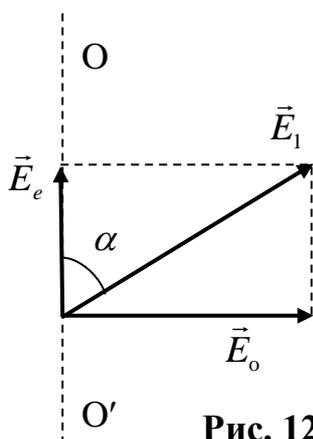


Рис. 12.1

На рис.12.1 показана ориентация векторов напряжённости электрического поля для обыкновенного (\vec{E}_o) и необыкновенного (\vec{E}_e) лучей при нормальном падении плоско-поляризованного света на двоякопреломляющий кристалл. Плоскость колебаний падающего света составляет угол α с оптической осью кристалла OO' , которая параллельна его поверхности и плоскости рисунка.

*) *Оптической осью* называется направление, вдоль которого скорость распространения света с разной поляризацией одинакова. Плоскость, содержащая оптическую ось и данный луч, называется *главной оптической плоскостью*.

Для компонент \vec{E}_o и \vec{E}_e можно написать: $E_o = E_1 \cdot \cos \alpha$ и $E_e = E_1 \cdot \sin \alpha$. Так как интенсивность света пропорциональна квадрату амплитуды напряжённости электрического поля, то интенсивность для обыкновенного и необыкновенного лучей связана с интенсивностью падающего света следующим образом: $I_o = I_1 \cdot \cos^2 \alpha$; $I_e = I_1 \cdot \sin^2 \alpha$. Отсюда следует, что $I_e/I_o = \operatorname{tg}^2 \alpha$.

Различие показателей преломления n_o и n_e для обыкновенного и необыкновенного лучей приводит к появлению между ними оптической разности хода $\Delta = (n_o - n_e) \cdot d$, где d – толщина кристаллической пластинки.

Подчеркнём, что в рассмотренном на рис.12.1 случае не происходит пространственного разделения лучей. Разность фаз между обыкновенным и необыкновенным лучами $\delta = 2\pi\Delta/\lambda$, определяет тип поляризации света, прошедшего через кристаллическую пластинку. В общем случае это будет *эллиптическая поляризация*, возникающая как результат сложения двух взаимно перпендикулярных колебаний $E_o \cdot \cos \omega t$ и $E_e \cdot \cos(\omega t + \delta)$. При $\delta = m\pi$ прошедший свет будет линейно поляризован, при $\delta = \pi/2 + m\pi$ и $\alpha = 45^\circ$ вышедший свет будет *поляризован циркулярно (по кругу)*. В зависимости от направления вращения вектора \vec{E} поляризованный эллиптически или циркулярно свет может быть *право-* и *лево-* поляризованным. Согласно сложившейся терминологии, если направление вращения вектора \vec{E} и направление распространения луча связаны правилом *правого* буравчика, свет считается *лево-* поляризованным и наоборот.

Интерференция поляризованного света

Для наблюдения интерференции поляризованного света обычно используется оптическая схема, изображённая на рисунке 12.3.

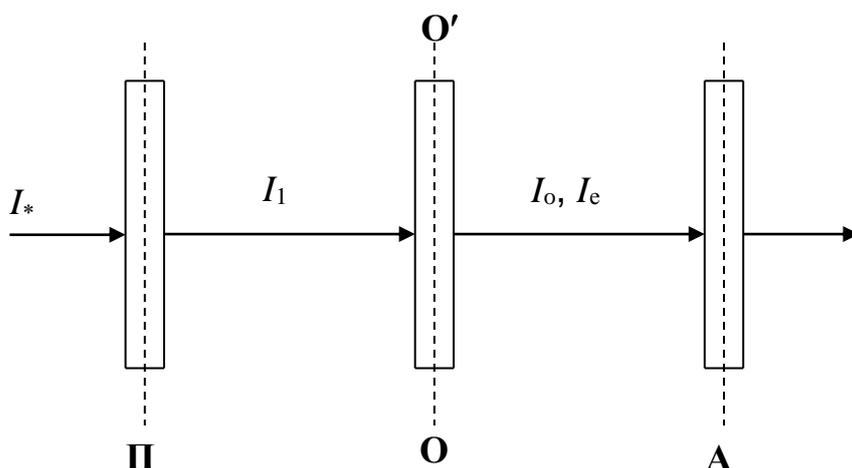


Рис. 12.3

На этой схеме **П** – поляризатор, на который падает естественный свет с интенсивностью I_* . После прохождения поляризатора свет становится плоскополяризованным с интенсивностью I_1 и амплитудой вектора напряжённости E_1 . Затем свет проходит через двоякопреломляющую пластинку **О**, оптическая ось которой **ОО'** параллельна большой грани пластинки. В результате двойного лучепреломления в пластинке возникают две волны – обыкновенная с амплитудой E_o и необыкновенная с амплитудой E_e , которые распространяются по одному направлению. После прохождения пластинки между этими двумя волнами возникает оптическая разность хода $\Delta = (n_o - n_e) \cdot d$.

При $\Delta = k\lambda$, где k – целое число, из пластинки выходит плоскополяризованный свет, причём ориентация плоскости поляризации не меняется.

При $\Delta = (k + 1/2)\lambda$ из пластинки также будет выходить плоскополяризованный свет (“*пластинка в полволны*”). Однако в

этом случае происходит поворот плоскости поляризации на угол 2α , где α – угол между плоскостью колебаний падающего света и оптической осью пластинки.

При $\Delta = (2k + 1)\lambda/4$ (“*пластинка в четверть волны*”) и равенстве амплитуд на выходе из пластинки обыкновенной и необыкновенной волн (E_o и E_e) получается циркулярно поляризованный свет. В этом случае вектор напряжённости электрического поля вращается в пространстве относительно направления распространения света с угловой скоростью ω .

После прохождения анализатора A составляющие \vec{E} для обыкновенного E_{o1} и необыкновенного E_{e1} лучей колеблются в одной плоскости и могут интерферировать (следует учитывать оптическую разность хода между ними $\Delta = (n_o - n_e) \cdot d$). Если в данной схеме плоскости пропускания поляризатора III' и анализатора AA' параллельны и на поляризатор падает белый свет, то при выполнении условия максимума интерференции для волны какой-либо длины λ : $\Delta = m\lambda$ – через анализатор будет проходить свет преимущественно с этой длиной волны. Т.е. пластинка будет окрашена в цвет, соответствующий этой длине волны. При повороте анализатора на угол $\pi/2$ для этой длины волны будет выполняться условие минимума интерференции (появляется дополнительная разность фаз π) и пластинка будет окрашена в дополнительный цвет.

Пространственная ориентация вектора напряжённости \vec{E} по мере прохождения светом элементов данной схемы при двух ориентациях анализатора представлена на следующей диаграмме (рис. 12.4):

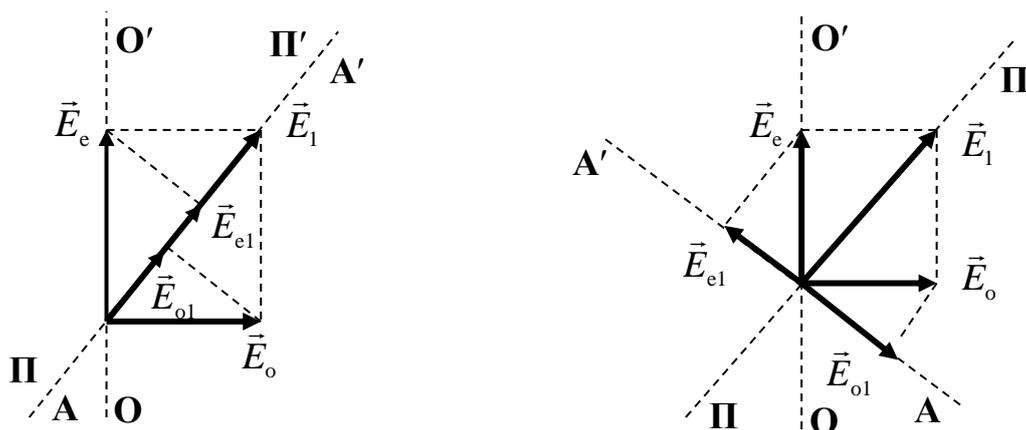


Рис. 12.4

Задачи для самостоятельного решения

- 12.3.** Определить интенсивность I_1 плоскополяризованного света, вышедшего из идеального поляризатора, при падении на него естественного света с интенсивностью I_* .
- 12.4.** На совершенный поляризатор падает циркулярно поляризованный свет, интенсивность которого равна I_0 . Какова будет интенсивность света за поляризатором?
- 12.5.** Степень поляризации частично поляризованного света $P = 0,25$. Найти отношение интенсивности плоскополяризованной составляющей этого света I_1 к интенсивности неполяризованной I_* .
- 12.6.** Определить степень поляризации P света, представляющего собой смесь естественного света с плоскополяризованным, если отношение k интенсивности поляризованного света I_1 к интенсивности естественного I_* равно: а) 1; б) 10?
- 12.7.** Имеются два одинаковых несовершенных поляризатора, каждый из которых в отдельности обеспечивает степень поляризации $P_1 = 0,8$. На эту систему падает естественный

свет. Какова будет степень поляризации света, прошедшего через оба поляризатора, если плоскости поляризаторов:

а) параллельны; б) перпендикулярны друг другу.

12.8. Естественный свет проходит через систему из двух одинаковых несовершенных поляризаторов. Каждый из них пропускает в своей плоскости $\alpha_1 = 0,95$ интенсивности соответствующего колебания и создает степень поляризации $P = 0,9$. Какую часть начальной интенсивности света составляет интенсивность света, прошедшего через эту систему, если поляризаторы скрещены?

12.9. Чему равен угол между главными плоскостями двух идеальных поляризаторов, если интенсивность естественного света, прошедшего через них, уменьшается в 4 раза?

12.10. Частично поляризованный свет проходит через идеальный поляризатор. Интенсивность пучка увеличивается в 4 раза, если поляризатор повернуть на угол $\alpha = 60^\circ$ от положения, соответствующего минимальной интенсивности. Какова степень поляризации пучка P ?

12.11. По одному направлению в пространстве распространяются две некогерентные плоскополяризованные световые волны с одинаковой интенсивностью, причём угол между плоскостями колебаний этих волн $\alpha = 60^\circ$. Определите степень поляризации такого света P .

12.12. На пути пучка естественного света стоят два несовершенных поляризатора, главные плоскости которых параллельны. Степень поляризации, обеспечиваемая каждым поляризатором, $P = 0,9$. Во сколько раз k изменится

- интенсивность света, прошедшего через эти поляризаторы, при повороте одного из них на $\alpha = 90^\circ$ относительно луча?
- 12.13.** Частично поляризованный свет проходит через идеальный поляризатор. При повороте поляризатора на $\varphi = 60^\circ$ от положения, соответствующего максимальной яркости, яркость пучка уменьшается в $n = 2$ раза. Найти степень поляризации пучка P и отношение интенсивностей k естественного и плоскополяризованного света.
- 12.14.** Естественный свет пропускают через два одинаковых поставленных один за другим несовершенных поляризатора. Интенсивность прошедшего через эту систему света при параллельных плоскостях поляризаторов I_{\parallel} превышает интенсивность при взаимно перпендикулярных плоскостях I_{\perp} в $n = 9,53$ раз. Определить: а) степень поляризации P_1 света, прошедшего только через один из поляризаторов; б) степень поляризации P_{\parallel} , обеспечиваемую системой при параллельных плоскостях поляризаторов.
- 12.15.** Под каким углом к горизонту должно находиться Солнце, чтобы его лучи, отражённые от поверхности озера, были бы поляризованы в наибольшей степени? В какой плоскости происходят колебания вектора напряжённости в отражённом свете. Показатель преломления воды $n = 1,33$.
- 12.16.** Предельный угол полного внутреннего отражения для некоторого вещества равен $\alpha_0 = 45^\circ$. Чему равен для этого вещества угол Брюстера?
- 12.17.** Каков должен быть преломляющий угол α у стеклянной

призмы с показателем преломления n , чтобы углы входа и выхода луча из призмы были углами полной поляризации?

12.18. Кристаллическая пластинка « $\lambda/2$ » установлена между двумя совершенными поляризаторами. На первый (по ходу луча) поляризатор падает естественный свет с длиной волны λ и интенсивностью I_* . Оптическая ось пластинки образует с плоскостью пропускания этого поляризатора угол $\alpha = 60^\circ$. Определить интенсивность I света, вышедшего из второго поляризатора для случаев, когда плоскости пропускания двух поляризаторов:

a) параллельны; *б)* перпендикулярны.

12.19. На пути плоскополяризованного монохроматического света установлена кристаллическая пластинка «в четверть волны». Как будет изменяться характер поляризации вышедшего из пластинки света при вращении пластинки вокруг направления луча?

12.20. Естественный свет интенсивности I_* проходит последовательно через поляризатор Π , кристаллическую пластинку «в полволны» и анализатор A (см. рис. 12.5).

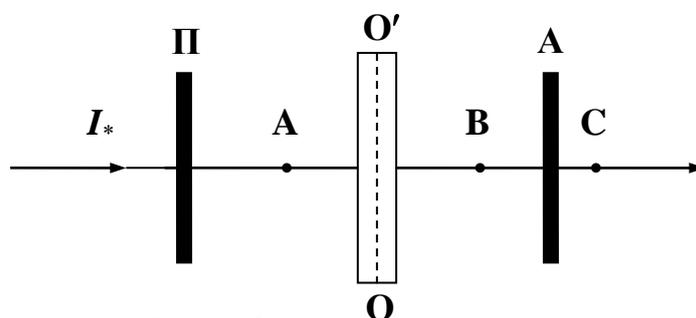


Рис. 12.5

Ось OO' пластинки установлена вертикально. Ось поляризатора образует с вертикалью угол α_1 , ось

анализатора – угол α_2 (углы отсчитываются от вертикали по часовой стрелке, если смотреть по направлению луча). Считая, что пластинка не поглощает свет, а поляризаторы являются совершенными, определить:

а) Характер поляризации света в точках А, В, С.

б) Интенсивность света I_A и I_B в точках А и В.

в) Интенсивность I_C в точке С.

г) Интенсивность света I_C в точке С, если $\alpha_1 = 30^\circ$, а угол $\alpha_2 = 60^\circ$.

12.21. Монохроматический плоскополяризованный свет интенсивностью I_0 и с амплитудой напряжённости электрического поля E_0 проходит через кристаллическую пластинку « $\lambda/4$ ». Угол между плоскостью колебаний и главной оптической плоскостью пластинки составляет $\pi/4$. Как поляризован свет после прохождения пластинки, каковы его интенсивность I_1 и амплитуда напряжённости электрического поля E_1 ?

12.22. * Линейно-поляризованный свет с длиной волны λ проходит через пластинку положительного кристалла толщиной h . Показатели преломления для обыкновенного (n_o) и необыкновенного (n_e) лучей известны. Какой должна быть толщина h кристаллической пластинки, чтобы после её прохождения свет стал: а) лево-поляризованным (эллиптически или циркулярно); б) право-поляризованным.

12.23. Между двумя скрещенными совершенными поляризаторами установлена кристаллическая пластина в четверть волны. Как будет изменяться интенсивность света, вышедшего из второго поляризатора при вращении пластинки вокруг

направления луча, если на первый поляризатор падает естественный свет с интенсивностью I_0 ?

12.24. * На пути плоскополяризованного монохроматического света находится клиновидная кварцевая пластинка, вырезанная параллельно оптической оси. Угол при вершине клина $\theta = 3,42'$. Ось пластины образует угол 45° с направлением колебаний вектора \vec{E} в падающем свете. Разность показателей преломления обыкновенного и необыкновенного лучей $\Delta n = 0,009$. Найти расстояние Δx между серединами светлых полос, наблюдаемых за анализатором, установленным после пластины. Длина волны света $\lambda = 0,54$ мкм.

12.25. * Как отличить право-поляризованный свет от лево-поляризованного?

Ответы к задачам для самостоятельного решения

1. Общие свойства гармонических колебаний

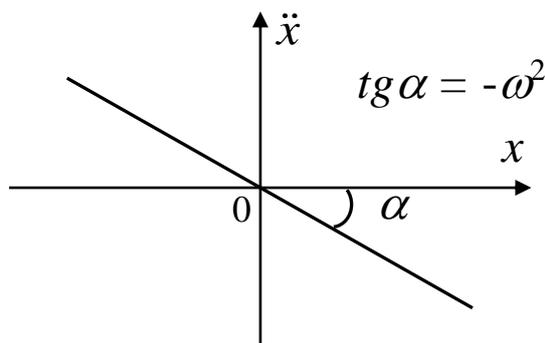
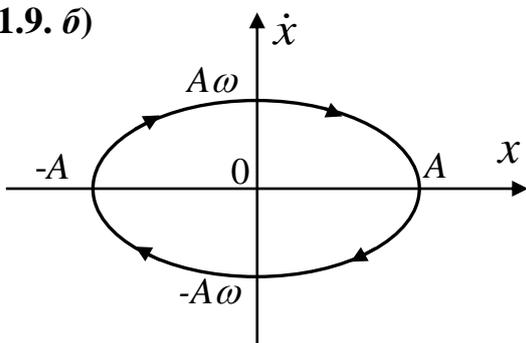
1.1. $y(t) = -\sin(\pi t)$ м.

1.6. $x(t) = A \cdot \cos(\omega t + \pi/3)$ и $x(t) = A \cdot \sin(\omega t + 5\pi/6)$.

1.7. а) да, б) да, в) нет; при неупругих ударах, г) движение шарика будет неперiodическим.

1.8. $A_x(t) = A \cdot \cos(\omega t + \varphi_0)$.

1.9. б)



1.10. $\langle v \rangle = 0,4$ м/с; $|\langle \vec{v} \rangle| = 0$.

1.11. (а) $\langle \vec{v} \rangle = -2\mathbf{e}_x$ м/с; $\langle v \rangle = 2$ м/с; (б) $\langle \vec{v} \rangle = 0$; $\langle v \rangle = 1$ м/с.

1.12. $\tau = 50$ с; $|\langle \vec{v} \rangle| = 0$; $\langle v \rangle = 2$ м/с = 7,2 км/час.

1.13. $\tau = 157$ с.

1.14. $\tau \cong 52$ с.

1.15. $T = 2\pi a/b = 10$ с.

1.16. $T = 2S/kA^2$.

1.17. а) в 4 раза, б) в 4 раза.

1.18. $\omega = \sqrt{\frac{k(m_1 + m_2)}{m_1 m_2}} = 15$ с⁻¹; $A_1 = 2\Delta L/3 = 4$ см; $A_2 = \Delta L/3 = 2$ см;

$T = 0,84$ с.

1.19. $A_{min} = g/\omega^2$; в верхних.

1.20. $A_{min} = \mu g/\omega^2$.

1.21. $\mu = A_2/A_1$. 1.22. $A_{min} = (g/\omega^2) \cdot \sqrt{\mu^2 \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha} = 3,4$ см.

2. Свободные гармонические колебания одномерных механических и электрических осцилляторов

2.4. $v_c = \frac{P_0}{m_1 + m_2}$, $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{\mu}}$, где $\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$.

2.5. а) $A = \frac{v_0}{\omega_0}$, б) $E_{\text{посл}} = \frac{m_1}{m_2} \frac{\mu v_0^2}{2}$, $E_{\text{кол}} = \frac{\mu v_0^2}{2}$.

2.6. $\omega_0 = a \cdot \sqrt{\frac{U_0}{m}}$.

2.7. $x(t) = \frac{mg}{k} \left(1 - \cos \sqrt{\frac{k}{m}} \cdot t \right)$, $v_m = \sqrt{\frac{m}{k}} g$.

2.8. $T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{M+m}{k}} \approx 1,26 \text{ с}$, $A = \frac{mv}{\sqrt{k(M+m)}} = 40 \text{ см}$,

$$x(t) = A \cdot \sin \sqrt{\frac{k}{M+m}} \cdot t.$$

2.9. $x(t) = A \cdot \left(1 - \cos \sqrt{\frac{k}{m}} \cdot t \right)$, $A = \frac{mg}{k} \sqrt{1 + \frac{2hk}{mg}}$.

2.10. $\omega_0 = \sqrt{\frac{2D}{mR^2}} = 5 \text{ рад} \cdot \text{с}^{-1}$, $A = \sqrt{\alpha^2 + \frac{m\Omega^2 R^2}{2D}} \approx 0,27 \text{ рад} (15,4^\circ)$,

$$\varphi_0 = \arctg \left(-\frac{\Omega}{\alpha \omega_0} \right) \approx 45^\circ.$$

2.11. а) $\omega_0 = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{2D}{\mu}} = 10 \text{ рад} \cdot \text{с}^{-1}$, $\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} = 0,75 \text{ кг}$,

б) $\omega_0 = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{2D}{m_1}} = 8,6 \text{ рад} \cdot \text{с}^{-1}$.

2.12. $\varphi(t) = \frac{\Omega}{\omega_0} \sin \omega_0 t$, $\omega_0 = \sqrt{\frac{5g}{11R}} = 5 \text{ рад} \cdot \text{с}^{-1}$.

$$2.13. T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{\rho h}{\rho_0 g}} = 0,31 \text{ с.}$$

$$2.14. T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{l}{2g}} = 0,2\pi \approx 0,63 \text{ с.}$$

$$2.15. \omega_0 = 2\sqrt{\frac{T}{ml}} = 40 \text{ рад}\cdot\text{с}^{-1}.$$

$$2.16. x(t) = x_1 + A \cdot \cos(\omega_0 t + \varphi_0), \quad A = \sqrt{x_0^2 + \frac{x_1 v^2}{g}}; \quad \operatorname{tg} \varphi_0 = \frac{v}{x_0} \sqrt{\frac{x_1}{g}}.$$

$$2.17. q = 4h\sqrt{mg(n^2 - 1)\pi\epsilon_0} = 2 \cdot 10^{-6} \text{ Кл.}$$

$$2.18. \omega_0 = \sqrt{\frac{2\mu g}{l}} = 2 \text{ рад}\cdot\text{с}^{-1}.$$

$$2.19. T = 2\sqrt{\frac{l}{g}} \cdot \left(\frac{\pi}{2} + \arcsin \frac{\alpha}{\beta} \right).$$

$$2.20. \alpha(t) = \alpha_0 \cos \omega_0 t, \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{3g}{2l}} = 10 \text{ рад}\cdot\text{с}^{-1}.$$

$$2.21. q(t) = CU_0 \cos \frac{t}{\sqrt{LC}}, \quad I_m = \sqrt{\frac{C}{L}} \cdot U_0.$$

$$2.22. \omega_0 = \sqrt{\frac{3k}{m}} = 30 \text{ рад}\cdot\text{с}^{-1}.$$

$$2.23. v_{\max} = \sqrt{\frac{k_1 + k_2}{m}} \cdot x_0 = 0,1 \text{ м/с},$$

$$x(t) = x_0 \cos \sqrt{\frac{k_1 + k_2}{m}} \cdot t = 0,01 \cos(10t) \quad (\text{м}).$$

$$2.24. x(t) = \frac{mg}{k_1 + k_2} \cdot \left(1 - \cos \sqrt{\frac{k_1 + k_2}{m}} \cdot t \right), \quad A = \frac{mg}{k_1 + k_2} = 0,01 \text{ м},$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k_1 + k_2}{m}} = 33 \text{ рад}\cdot\text{с}^{-1}.$$

$$2.25. \omega_0 = \sqrt{\frac{8k}{3m}} = 20 \text{ рад}\cdot\text{с}^{-1}.$$

$$2.26. \omega = \omega_0 \cdot \sqrt[4]{\frac{g^2 + a^2 + 2ag \sin \alpha}{g^2}}.$$

$$2.27. a) \omega_0 = \sqrt{\frac{2k}{m} - \Omega^2} = 8 \text{ рад}\cdot\text{с}^{-1}, \quad б) \Omega > \sqrt{\frac{2k}{m}} = 10 \text{ рад}\cdot\text{с}^{-1}.$$

3. Колебания в системе связанных осцилляторов

$$3.8. \xi_1(t) = \frac{v_0}{2} \left(\frac{1}{\omega_1} \sin \omega_1 t + \frac{1}{\omega_{II}} \sin \omega_{II} t \right); \quad \xi_2(t) = \frac{v_0}{2} \left(\frac{1}{\omega_1} \sin \omega_1 t - \frac{1}{\omega_{II}} \sin \omega_{II} t \right);$$

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{k}{m}}; \quad \omega_{II} = \sqrt{\frac{(k + 2k_1)}{m}}.$$

$$3.9. E_1 = E_{II} = \frac{mv_0^2}{4};$$

3.10. Зависимости аналогичны представленным на рис. 3.15 стр. 32 с периодом пульсаций амплитуды колебаний равным $20\pi/\omega_1$.

$$3.11. \omega_{I,II}^2 = \frac{k}{2m} (3 \mp \sqrt{5}); \quad \xi_{I,II} = \xi_1 + \left(\frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} \right) \xi_2.$$

$$3.12. \omega_{I,II}^2 = \frac{D}{2I} (3 \mp \sqrt{5}).$$

$$3.13. \omega_1 = \sqrt{\frac{g}{l}}; \quad \omega_{II} = \sqrt{\left(\frac{g}{l} + \frac{2k}{m} \right)}.$$

$$3.14. \omega_{I,II}^2 = \frac{g}{l} (2 \mp \sqrt{2}).$$

3.15. Для возбуждения низкочастотной моды (ω_1): $\Delta x_2 \approx 2,4 \text{ см}$; для возбуждения высокочастотной моды (ω_{II}): $\Delta x_2 \approx -0,4 \text{ см}$.

$$3.16. \omega_1^2 = \frac{k}{(M + m/2)}; \quad \omega_{II}^2 = \frac{k}{M};$$

$$3.17. \omega_1^2 = \frac{1}{C(L+2L_1)}; \quad \omega_{II}^2 = \frac{1}{LC}.$$

$$3.18. \omega_{I,II}^2 = \frac{1}{3LC} (3 \mp \sqrt{3}), \quad q_{I,II} = q_1 + (1 \pm \sqrt{3})q_2.$$

$$3.19. \omega = 1/\sqrt{L^*(C+C_1)},$$

где L^* – «приведенная индуктивность» $1/L^* = 1/L + 1/L_1$

$$3.20. q_1(t) = \frac{CU_0}{2} (\cos \omega_1 t + \cos \omega_{II} t);$$

$$q_2(t) = \frac{CU_0}{2} (\cos \omega_1 t - \cos \omega_{II} t);$$

$$\omega_1^2 = \frac{1}{LC}; \quad \omega_{II}^2 = \frac{1}{L} \left(\frac{1}{C} + \frac{2}{C_1} \right).$$

$$3.21. E_I = E_{II} = \frac{CU_0^2}{4}.$$

$$3.22. \omega_{I,II}^2 = \frac{(3 \mp \sqrt{3})}{2LC}.$$

$$3.23. \omega_1 \approx 4,4 \cdot 10^{14} \text{ рад} \cdot \text{с}^{-1}.$$

$$3.24. n \approx 3,9.$$

$$3.25. 4.$$

$$3.26. 6.$$

$$3.27. \frac{\omega_a}{\omega_c} = \sqrt{1 + 2 \frac{m_0}{m_c}} \approx 1,9.$$

4. Затухающие колебания

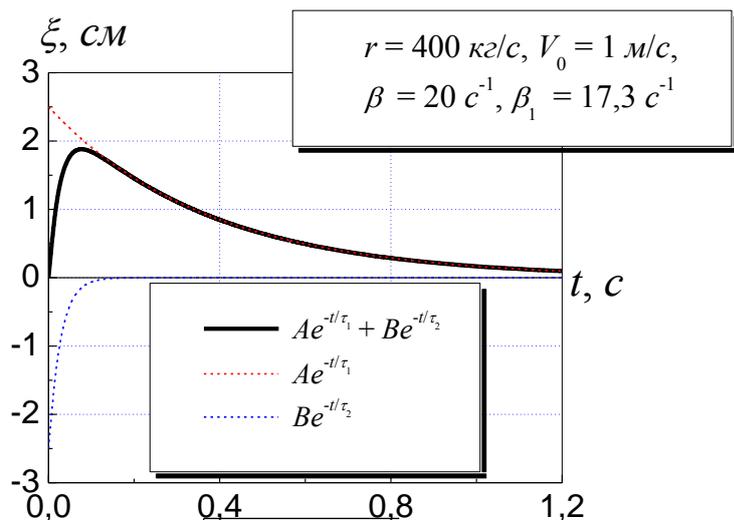
$$4.8. \eta = 1 - \left(\frac{x_6}{x_0} \right)^2 = 0,998 \text{ (99,8 \%)}, \text{ где } x_6 = x_0 - 12\xi_0 = 0,3 \text{ см}.$$

$$4.9. x = x_5 = x_0 - 10\mu a = 0,3 \text{ см}.$$

4.10. $\tau_2 = \frac{\ln n_2}{\ln n_1} \cdot \tau_1 = 36 \text{ с.}$

4.11. $\xi(t) = \frac{\tau_1 \tau_2}{\tau_1 - \tau_2} V_0 \cdot \left(e^{-\frac{t}{\tau_1}} - e^{-\frac{t}{\tau_2}} \right)$, где $\tau_1 = \frac{1}{\beta - \beta_1} \approx 0,37 \text{ с,}$

$\tau_2 = \frac{1}{\beta + \beta_1} \approx 0,027 \text{ с, } \beta = \frac{r}{2m + M} = 20 \text{ с}^{-1}, \beta_1 = \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2} \approx 17,3 \text{ с}^{-1}.$



4.12. а) $\beta = \frac{\ln \eta}{\tau} = 0,05 \text{ с}^{-1},$

б) $\tau_A = \frac{1}{\beta} = 20 \text{ с.}$

4.13. $Q = \frac{\pi N}{\ln \eta} \approx 143.$

4.14. $v_0 = \sqrt{v_c^2 + \left(\frac{1}{2\pi\tau} \right)^2} \approx 101 \text{ Гц.}$

4.15. $Q = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C} - \frac{R^2}{4}} \cong 50.$

4.16. $\frac{Q_1 - Q}{Q_1} \approx \frac{CR^2}{8L} = 5 \cdot 10^{-5} \text{ (0,005 \%)}.$

4.17. а) $W(t) = W_0 \cdot e^{-2\beta t} = W_0 \cdot e^{-\frac{2\pi v_0 t}{Q}}$, б) $\frac{W(\tau)}{W_0} = e^{-\frac{2\pi v_0 \tau}{Q}} = 0,5.$

4.18. $T = \sqrt{\frac{3R}{2g}} \cdot \sqrt{4\pi^2 + \gamma^2} \approx 1,3 \text{ с.}$

4.19. $\tau_2 = \frac{\ln(A_0 / A_2)}{\ln(A_0 / A_1)} \cdot \tau_1 = 80 \text{ с.}$

4.20. $x_0 = \frac{x_1 x_3 - x_2^2}{x_1 + x_3 - 2x_2} \approx 22,9.$

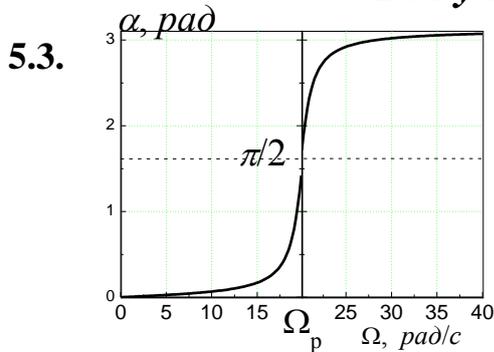
4.21. $\tau = \frac{\ln n}{2\gamma\nu} \approx 11,5 \text{ с.}$

4.22. $I(t) = \frac{U_0}{L} \cdot t \cdot e^{-\frac{t}{\sqrt{LC}}}, I_{\max} = \frac{U_0}{e} \cdot \sqrt{\frac{C}{L}}$ при $t_m = \sqrt{LC}$.

4.23. $q(t) = q_m \cdot e^{-\beta t} \cos(\omega_c t + \varphi_0)$, где $\omega_c = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{1}{4R^2C^2}}, \beta = \frac{1}{2RC}$;

при $R \leq \frac{1}{2} \sqrt{\frac{L}{C}}$ изменение заряда на конденсаторе представляет собой аperiodический процесс.

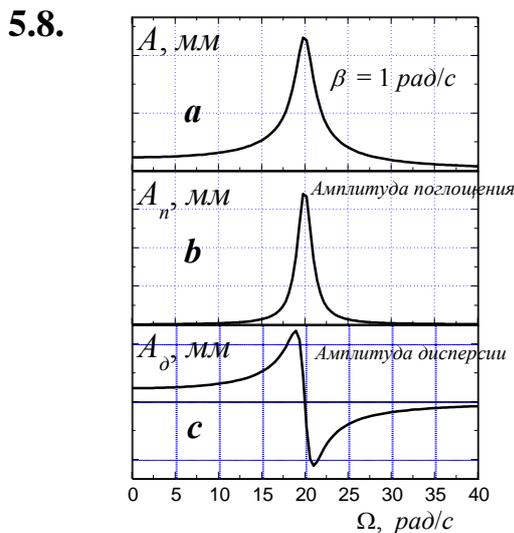
5. Вынужденные колебания



5.5. $\frac{A_p}{A_{\omega \rightarrow 0}} = \frac{\pi}{\gamma} \approx 3.$

5.6. а) $\langle P \rangle = \frac{1}{2} A F_m \Omega \sin \alpha$, б) $A_{\text{тр}} = -A = -\langle P \rangle \cdot T = -\pi A F_m \sin \alpha$.

5.7. $A = \frac{F_m}{r\omega_c}$. При частоте $\Omega_p = \sqrt{\omega_c^2 - \beta^2} = \sqrt{\omega_c^2 - \left(\frac{r}{2m}\right)^2}$.



5.10. $Q = \frac{1}{2\sqrt{1 - (\Omega_p/\omega_c)^2}} \approx 7,9$.

5.11. $\Omega_p = \sqrt{\frac{\Omega_1^2 + \Omega_2^2}{2}} \approx 32 \text{ рад}\cdot\text{с}^{-1}$.

5.12. $\Omega_p^* = \sqrt{\Omega_1 \cdot \Omega_2} = 20 \text{ рад}\cdot\text{с}^{-1}$.

$$5.13. v = \frac{l}{2\pi} \sqrt{\frac{g}{\Delta x}} \approx 20 \text{ м} \cdot \text{с}^{-1} \text{ (72 км/час)}.$$

$$5.14. A_{\text{тр}} = -\pi \varphi_m N_m \sin \alpha.$$

$$5.15. Q \approx \frac{\omega_0 \Omega}{(\omega_0^2 - \Omega^2) \cdot \text{tg} \alpha} \approx 8,7.$$

$$5.16. \nu_0 = \sqrt{2\nu_c^2 - \nu_p^2} \approx 500 \text{ Гц}.$$

$$5.17. \nu_p = \nu_c \sqrt{1 - \left(\frac{\ln n}{12\pi}\right)^2} = 5,5 \text{ Гц}.$$

$$5.18. \text{а) } \beta = \frac{r}{2m} = 0,5, \quad \text{б) } A_p = \frac{2F_m \cdot m}{r \cdot \sqrt{4km - r^2}} = 5 \text{ см}.$$

$$5.19. \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} = 10, \quad Q = \frac{\omega_0}{2\beta} = 10, \quad A_{\Omega \rightarrow 0} = \frac{F_0}{k} = \frac{A_p}{Q} = 5 \text{ мм}.$$

$$5.20. \text{а) } \Omega_p = \sqrt{\frac{k}{m} - 2\left(\frac{r}{2m}\right)^2} \approx 9,5 \text{ рад} \cdot \text{с}^{-1}, \quad \text{б) } A_p = \frac{2F_0 \cdot m}{r \cdot \sqrt{4km - r^2}} \approx 1,2 \text{ см},$$

$$\text{в) } Q = \frac{A_p}{A_{\Omega \rightarrow 0}} = \frac{kA_p}{F_0} \approx 2,4.$$

$$5.21. A = \frac{4F_0}{k \cdot \sqrt{\frac{36r^2}{km} + 25}} \approx 0,4 \text{ см}.$$

5.22. а) увеличится в 2 раза, б) уменьшится в 2 раза, в) увеличится в $\sqrt{2}$ раз.

5.23. а) не изменится, б) не изменится, в) увеличится в 2 раза.

Вынужденные электрические колебания.

Переменный ток

$$6.4. \text{а) } I_0, \quad \text{б) } I_0/2.$$

$$6.5. I = \frac{U}{\sqrt{R^2 + \left(\Omega L - \frac{1}{\Omega C}\right)^2}} = 2,1 \text{ А}, \quad \varphi = \text{arctg} \frac{\Omega L - \frac{1}{\Omega C}}{R} \approx 41^\circ.$$

6.6. $U_R = IR = 168 \text{ В}$, $U_L = I \cdot \Omega L = 369 \text{ В}$, $U_C = I \cdot \frac{1}{\Omega C} = 223 \text{ В}$,

$$P = I^2 \cdot R = 168 \text{ Вт}.$$

6.7. $\rho = \frac{\sqrt{1-k^2}}{2\pi\nu\varepsilon_0\varepsilon k} = 1 \cdot 10^7 \text{ Ом} \cdot \text{м}$, коэффициент мощности $k = \cos\varphi$.

6.8. $P_1 = \frac{U^2 - U_1^2 - U_2^2}{2R} = 205 \text{ Вт}$, $P_2 = \frac{U_2^2}{R} = 160 \text{ Вт}$.

6.9. $P_R = I_2^2 \cdot R = 90 \text{ Вт}$, $P_{\text{оп}} = \frac{(I_0^2 - I_1^2 - I_2^2)R}{2} = 55 \text{ Вт}$.

6.10. $I_R = \frac{U}{R} = 5,5 \text{ А}$, $I_0 = \sqrt{I_R^2 + I_1^2 + 2I_R I_1 \cdot \cos\varphi} \approx 6,3 \text{ А}$, где $\cos\varphi = \frac{I_1 r}{U}$.

6.11. $Z = \frac{R}{\sqrt{1 + \Omega^2 R^2 C^2}}$, $I_R(t) = \frac{U_0}{R} \cdot \cos\Omega t$, $I_C(t) = -\Omega C U_0 \cdot \sin\Omega t$,

$$I(t) = \frac{U_0 \sqrt{1 + \Omega^2 R^2 C^2}}{R} \cdot \cos(\Omega t + \varphi); \quad \varphi = \text{arctg}(R\Omega C).$$

6.14. а) $U(t) = U_0 + \frac{U_1}{\sqrt{1 + \Omega^2 R^2 C^2}} \cos(\omega t - \varphi)$, $\varphi = \text{arctg}(\Omega RC)$.

б) $RC = \frac{\sqrt{n^2 - 1}}{\Omega} \approx 32 \text{ мс}$.

6.15. $P = \frac{U^2 R}{R^2 + \Omega^2 L^2} \approx 20 \text{ Вт}$.

6.16. $\sin\varphi = \frac{X_L}{Z} = 0,8$, $P = \frac{\sqrt{Z^2 - X_L^2}}{Z^2} \cdot U^2 = 86,4 \text{ Вт}$.

6.17. $\Omega = \frac{R}{2L} + \sqrt{\frac{1}{LC} + \left(\frac{R}{2L}\right)^2} \approx 3,4 \cdot 10^4 \text{ рад} \cdot \text{с}^{-1}$.

6.18. $I(t) = \frac{U_0 \cdot \sqrt{1 + \Omega^2 R^2 C^2}}{R} \cdot \cos(\Omega t + \varphi)$, где $\varphi = \text{arctg}(\Omega RC)$.

6.19. $L = \frac{1}{4\pi^2 \nu^2 C} \approx 0,2 \text{ Гн}$, $I = \frac{U}{R}$, $V = \frac{I}{2\pi \nu C} = 127 \text{ В}$.

$$6.20. P = \frac{U_{C0}^2 \Omega^2 C^2}{2} R = 5 \text{ мкВт}.$$

$$6.21. \Omega_p = \frac{1}{\sqrt{LC}}.$$

$$6.22. Z(\Omega) = \frac{\sqrt{R^2 + \Omega^2 L^2}}{\sqrt{(\Omega^2 LC - 1)^2 + \Omega^2 R^2 C^2}},$$

$$\Omega_p = \sqrt{\omega_0^2 - 4\beta^2} = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{R^2}{L^2}} \approx \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} = 2500 \text{ рад} \cdot \text{с}^{-1},$$

$$Z_p \approx \frac{L}{RC} = 0,5 \text{ Мом}.$$

$$6.23. I_C = U \cdot \sqrt{\frac{C}{L}} = 0,22 \text{ А}, I_L = \frac{U}{\sqrt{R^2 + \frac{L}{C}}} \approx U \cdot \sqrt{\frac{C}{L}} = 0,22 \text{ А},$$

$$I = \frac{U}{Z_p} \approx U \cdot \frac{RC}{L} = 4,4 \cdot 10^{-4} \text{ А}!$$

$$6.24. Q \geq \frac{1}{\sqrt{1 - (1 - \alpha)^2}} = 3,2.$$

7. Волны

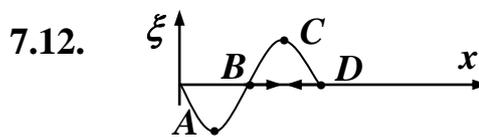
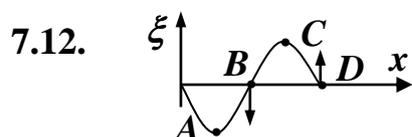
$$7.7. \xi = A \cdot \cos[(2\pi/\lambda)(vt - x)].$$

7.8. Продольную и поперечную. Волна распространяется против оси X с фазовой скоростью ω/k . Изменится направление распространения волны на обратное.

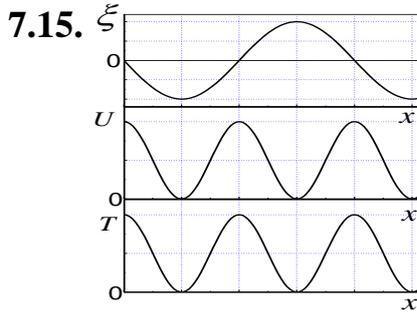
$$7.9. \xi(r,t) = \frac{A}{\sqrt{r}} \cdot \cos(\omega t - kr), \text{ где } k = 2\pi/\lambda.$$

$$7.10. \omega_1 = \omega_2, \quad T_1 = T_2, \quad \lambda_2/\lambda_1 = v_2/v_1 = 5.$$

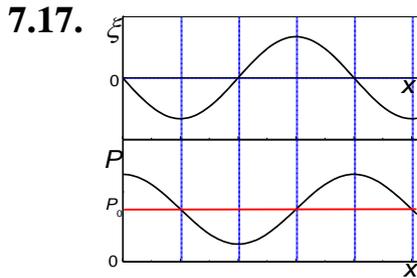
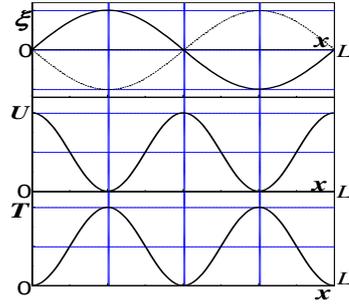
$$7.11. v = a/b.$$



7.14. $v_{Bx} = -A\omega = 1 \text{ м/с}$, $v_{Cx} = 0$.



7.16.



7.18. $V = 5,2 \cdot 10^3 \text{ м/с}$.

7.19. (a) $\lambda = 1,04 \text{ м}$;

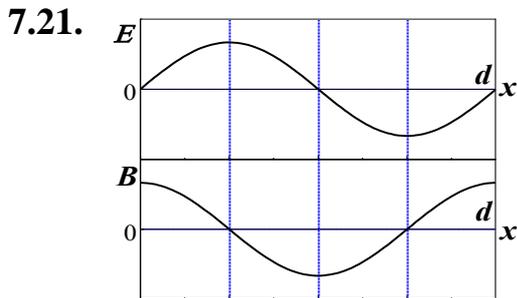
(б) $\langle w \rangle = 3,85 \text{ Дж/м}^3$;

(в) $\vec{S} = 7,7 \cdot \sin^2(\omega t - 6,04x_0) \cdot \vec{e}_x \text{ (Вт/м}^3\text{)}$;

(г) $I = 20 \text{ кВт/м}^2$; (д) $\langle \Phi \rangle = 2 \text{ Вт}$.

7.20. а) $V = 2 \cdot 10^8 \text{ м/с}$; б) $E_0 = 2 \cdot 10^4 \text{ В/м}$; в) $\langle w \rangle = 4 \cdot 10^{-3} \text{ Дж/м}^3$;

г) $I = 800 \text{ кВт/м}^2$.



$d = \lambda$.

7.22. (а) $\vec{B} = (E_0 k / \omega) \cdot \cos(\omega t - kx) \cdot \vec{e}_z$; (б) $w = (1/\mu_0)(E_0 k / \omega)^2 \cdot \cos^2(\omega t - kx)$;

(в) $\vec{S} = (w \cdot \omega / k) \cdot \vec{e}_x$; (г) $I = kE_0^2 / 2\mu_0 \omega$.

7.23. (а) $I = 10^{-2} \text{ Вт/м}^2$; (б) $\langle w \rangle = 10^{-10} \text{ Дж/м}^3$; (в) $E_0 = 3,17 \text{ В/м}$;

$B_0 = 1,58 \cdot 10^{-8} \text{ Тл}$; (г) $\vec{E}(t) = E_0 \cos(\omega t + \alpha) \cdot \vec{e}_y$; $\vec{B}(t) = B_0 \cos(\omega t + \alpha) \cdot \vec{e}_z$.

7.24. $W = \sqrt{\frac{\epsilon_0 \epsilon}{\mu_0 \mu}} \cdot (E_0^2 / 2) \pi R^2 (1 - r) \cdot \tau = 5 \cdot 10^{-4} \text{ Дж}$.

7.25. а) $I = 1,67 \text{ Вт/м}^2$; б) $E_0 = 25,1 \text{ В/м}$ и $B_0 = 1,7 \cdot 10^{-7} \text{ Тл}$; в) $P = 188,4 \text{ Вт}$.

7.26. а) $E_0 = 54,8 \text{ В/м}$; б) $I = 4 \text{ Вт/м}^2$.

7.27. $\vec{v} = 2 \cdot 10^8 \vec{e}_x$ (м/с), $\varepsilon = 2,25$.

8. Интерференция света

8.1. $A = A_0 \sqrt{N}$.

8.2. Интенсивность пульсирует с периодом 10 с.

8.3. $I = I_1 + I_2$.

8.5. $\Delta x_2 = 0,25$ мкм.

8.6. $h_{min} = 0,13$ мкм.

8.7. $k = d(n-1)/\lambda = 5$.

8.8. $\Delta n = \Delta/d \leq 5 \cdot 10^{-6}$.

8.9. $d_{min} = \frac{\lambda}{4\sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha}} = 0,13$ мкм.

8.10. $d = \lambda/4n_1 = 0,1$ мкм.

8.11. $N = 2\theta \cdot n/\lambda = 5$ см⁻¹.

8.12. а) $\theta = \frac{\lambda}{2n\Delta x} = 10^{-3}$ рад; б) $\lambda/\Delta\lambda = \frac{2n l \theta}{\lambda} = 80$.

8.13. $\lambda_{02} = \frac{l_2}{l_1} \cdot \lambda_{01} = 0,7$ мкм.

8.14. $\Delta\lambda = \lambda_0(n-1) = 0,15$ мкм.

8.15. $n_1 = r_1^2 / (r_2^2 - r_1^2) = 5$; $n_2 = n_1 + 1$; $\lambda = (r_2^2 - r_1^2) / R = 0,525$ мкм.

8.16. $r_x = 3,6$ мм.

8.17. $n = Rk\lambda/r_3^2 = 1,33$.

8.18. $r_2 = \sqrt{r_1^2 - 2Rh} \approx 4$ мм.

8.19. $r_6 = \sqrt{r_0^2 + (2m-1)\lambda R/2} \approx 3,8$ мм.

8.20. $r_{10} = \sqrt{2k\lambda(n-1)/D} = 3,5$ мм.

8.21. $R = \frac{d_1 d_2 (d_1 + d_2)}{N\lambda(d_1 - d_2)} = 200$ мм.

8.22. а) $\tau_{\text{коз}} = \frac{\lambda_1 \lambda_2}{c \cdot (\lambda_2 - \lambda_1)} \approx \frac{\lambda_{1,2}^2}{c \cdot \Delta\lambda} \approx 3 \cdot 10^{-14} \text{ с}$, б) $l_{\text{коз}} = \frac{\lambda_1 \lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_1} \approx \frac{\lambda_{1,2}^2}{\Delta\lambda} = 0,01 \text{ мм}$, в) $r_{\text{коз}} = \frac{\lambda \cdot l}{D} \approx 0,3 \text{ мм}$, г) $V_{\text{коз}} = r_{\text{коз}}^2 \cdot l_{\text{коз}} \approx 10^{-3} \text{ мм}^3$.

8.23. $r_{\text{коз}} = \frac{\lambda}{\beta} = 0,05 \text{ мм}$.

8.24. $b_{\text{max}} \approx \lambda l / 4d = \Delta x / 2$, где Δx – ширина интерференционной полосы.

9. Дифракция Френеля

9.1. $r_m = \sqrt{m\lambda l}$.

9.2. $r_{\text{min}} = \sqrt{0,5\lambda l} = 0,5 \text{ мм}$.

9.3. $l = d^2 / \lambda = 2 \text{ м}$. В центре – светлое пятнышко, «пятно Пуассона».

9.4. $I = 4I_0 \cdot \cos^2 \left[\frac{\pi d(n-1)}{\lambda} \right]$.

9.5. а) $h_{\text{max}} = 3\lambda / 8 (n-1)$; б) $h_{\text{min}} = 7\lambda / 8 (n-1)$; в) $h_0 = 3\lambda / 4 (n-1)$.

9.6. $l = \frac{r^2 L}{n\lambda L - r^2} = 2 \text{ м}$.

9.7. $\lambda = (r_2^2 - r_1^2)(l+L) / 2lL = 0,6 \text{ мкм}$.

9.8. $h = \frac{5\lambda}{8(n-1)} = 2,5 \text{ мкм}$.

9.9. $l = d^2 / 4\lambda = 0,5 \text{ м}$.

9.11. $h = (2k+1) \frac{\lambda}{2(n-1)}$, где $k = 0, 1, 2, \dots$

9.12. а) $I \approx 0$; б) $I = I_0 / 2$.

9.13. а) $I = 4I_0$; б) $I = 2I_0$; в) $I = I_0$.

9.14. $h_{\text{min}} = \lambda / 2(n-1) = 0,5 \text{ мкм}$.

10. Дифракция Фраунгофера на щели

10.2. а) $b^2/l\lambda \approx 0,1 \ll 1$, дифракция Фраунгофера; б) $I_0 \cong Ib^2/l\lambda \approx 0,1 \cdot I = 10 \text{ мВт/см}^2$.

10.3. Дифракция Фраунгофера, т.к. $b^2/l\lambda \approx 0,1 \ll 1$; $\Delta x = 2\lambda l/b = 10 \text{ мм}$.

10.4. $I_0/I_1 = (3\pi/2)^2 \approx 22,2$.

10.5. $I(\varphi) = I_0 \cdot \frac{\sin^2 \alpha}{\alpha^2}$, где $\alpha = \frac{\pi b \sin \varphi}{\lambda}$, I_0 – интенсивность нулевого максимума.

10.6. $\Delta x = \Delta\lambda \cdot F/b \approx 0,7 \text{ мм}$.

10.7. $\varphi_{\min}^{(m)} = \arcsin \frac{m\lambda}{b} = 30^\circ$, $m = 3$.

10.8. $\Delta x^* \approx \Delta x_0/2$; $I_0^* = 4I_0$.

10.9. $\Delta x = \frac{2F}{\sqrt{\frac{b^2}{\lambda^2} - 1}}$.

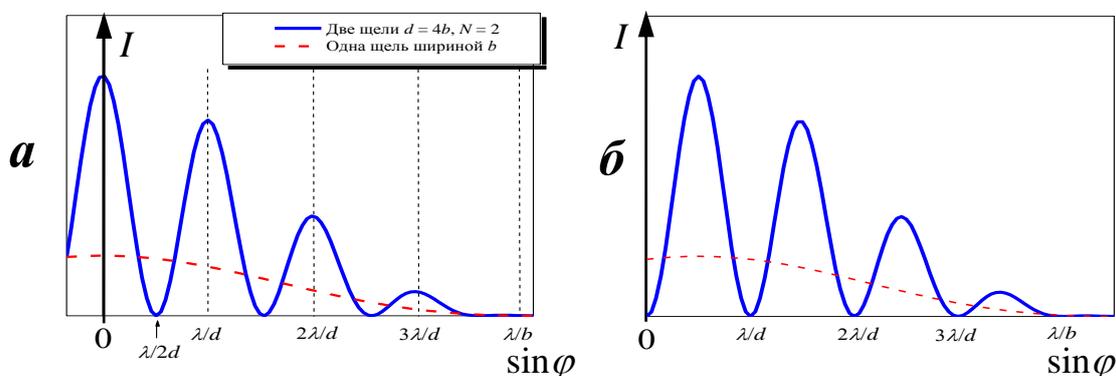
10.10. $l \approx b^2/\lambda = 2 \text{ см}$ – дифракция Френеля; $l \gg b^2/\lambda$ ($l \geq 20 \text{ см}$ – дифракция Фраунгофера; $l \ll b^2/\lambda$ ($l \leq 2 \text{ мм}$) – геометрическая оптика.

10.11. $h \approx \lambda L/d \approx 40 \text{ м}$.

10.12. Может различить, т.к. $h > \lambda L/d \cong 0,75 \text{ м}$.

10.13. $b^2/l_1^* \sim \lambda$ – дифракция Френеля; $b^2/l_2^* \ll \lambda$ – дифракция Фраунгофера.

10.14. В центральной области дифракционной картины ($|\sin\varphi| < \lambda/b$) располагается $2n - 1$ максимума с быстро уменьшающейся от центра к периферии амплитудой (см. Рис. а). При увеличении n картина приближается к «классической картине опыта Юнга».



10.15. Картина изменится на «негативную» по сравнению с описанной в ответе к предыдущей задаче – в центре располагается минимум (см. Рис. б).

10.16. $\sin\varphi_{1,2} = \sin\varphi_0 \pm \lambda/b$; $\varphi_1 = 33,37^\circ$; $\varphi_2 = 26,74^\circ$; $\varphi_1' = 3,37^\circ$; $\varphi_2' = 3,26^\circ$.

10.17. $\sin\varphi_1 = \pm \lambda/b_1 = \pm 3,31^\circ$.

10.18. $d = \frac{\lambda}{2(n-1)}$; $\sin\varphi = \lambda/b$.

10.19. $\sin\beta_{1,2} = \sin\alpha \pm \lambda/b$;

а) $29,7^\circ < \beta < 30,3^\circ$; б) $33,4^\circ < \beta < 26,7^\circ$; в) $0^\circ < \beta < 90^\circ$.

11. Дифракционная решётка

11.1. $d = 4\lambda = 2,8 \cdot 10^{-4}$ см; $n = 3570$ см⁻¹.

11.2. $\lambda = \frac{d \sin \Delta\varphi}{\sqrt{5 - 4 \cos \Delta\varphi}} \approx 0,6$ мкм.

11.3. $\Delta x = \frac{2R}{(n-1)\sqrt{d^2/\lambda^2 - 1}} = 8$ см.

11.4. $D(\varphi) = \text{tg } \varphi / \lambda$.

11.5. $\Delta\varphi = \frac{2\lambda}{Nd\sqrt{1 - (m\lambda/d)^2}} \approx 2\lambda/Nd \approx 11''$.

11.6. $m = \frac{\lambda}{\lambda_2 - \lambda_1} nl \geq 3$.

11.7. а) главные максимумы будут расположены в два раза гуще;

б) высота главных максимумов уменьшится в 4 раза ($\sim N^2$); в) ширина

главных максимумов останется прежней ($Nd = \text{const}$); д) площадь под

главными максимумами уменьшится в 2 раза.

11.8. $R = mN = ml/d \leq l/\lambda$. ($m = 1, 2, \dots$)

11.9. $b = d/3 = 0,8$ мкм.

11.10. $\lambda_2 = \lambda_1/\sqrt{2} = 0,49$ мкм.

$$11.11. D_{\varphi} = \frac{m}{d \cdot \sqrt{1 - (m\lambda/d)^2}}.$$

$$11.12. \Delta x = F \cdot \left(\frac{\lambda_2}{\sqrt{d^2 - \lambda_2^2}} - \frac{\lambda_1}{\sqrt{d^2 - \lambda_1^2}} \right) \approx 733 \text{ мм.}$$

$$11.13. D_x = F \cdot D_{\varphi} = \frac{F}{\sqrt{d^2 - \lambda^2}} \approx 1 \text{ мм/нм}; \quad R \approx 10^5.$$

11.14. а) не изменится; б) уменьшится в 4 раза; в) удвоится;
г) уменьшится в 2 раза.

11.15. а) не изменятся; б) уменьшится в 2 раза; в) не изменится;
г) уменьшится в 2 раза.

$$11.17. m = 3.$$

12. Поляризация света

$$12.3. I = I_*/2.$$

$$12.4. I = I_0/2.$$

$$12.5. I_{\parallel}/I_* = P/(1 - P) = 1/3.$$

$$12.6. P = \frac{k}{1+k}. \quad \text{а) } P = 0,5; \quad \text{б) } P = 0,91.$$

$$12.7. \text{а) } P_{\parallel} = 2P_1 / (P_1^2 + 1) \approx 0,976; \quad \text{б) } P_{\perp} = 0.$$

$$12.8. I_{\perp}/I_* = \alpha_1^2(1 - P)/(1 + P) = 0,0475.$$

$$12.9. \alpha = 45^\circ.$$

$$12.10. P = \frac{n-1}{n-1 + 2\cos^2\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)} = 2/3.$$

$$12.11. P = 0,5.$$

$$12.12. \text{Уменьшится в } k = (1 + P^2)/(1 - P^2) \approx 9,5 \text{ раз.}$$

$$12.13. P = 0,5; \quad k = 1.$$

12.14. а) $P_{\perp} = \sqrt{\frac{(n-1)}{(n+1)}} = 0,9$; б) $P_{\parallel} = \frac{\sqrt{n^2-1}}{n} = 0,994$.

12.15. $\alpha = \text{arctg}(n) \approx 37^\circ$.

12.16. $\alpha_{\text{Б}} = \text{arctg} \sqrt{2} \approx 54^\circ 44'$.

12.17. $\alpha = 2 \arcsin \frac{1}{\sqrt{1+n^2}}$.

12.18. а) $I_{\parallel} = I_* \cos^2 2\alpha/2 = I_*/8$; б) $I_{\perp} = I_*/2 \sin^2 2\alpha = 3I_*/8$.

12.19. Поляризация света может быть эллиптической, циркулярной и плоской.

12.20. а) Во всех трех точках свет плоскополяризованный;

б) $I_A = I_B = I_*/2$; в) $I_C = (I_*/2) \cos^2(\alpha_1 + \alpha_2)$; г) $I_C = 0$.

12.21. свет циркулярно поляризован, $I_1 = I_0$, $E_1 = E_0/\sqrt{2}$.

12.22. а) $n\lambda < h < (n + 1/2)\lambda$; б) $(n + 1/2)\lambda < h < (n + 1)\lambda$, где $n = 0, 1, 2, \dots$

12.23. Интенсивность света будет изменяться от 0 до $I_0/4$, четыре раза за один оборот.

12.24. $\Delta x = \lambda/(\theta \cdot \Delta n) = 0,6 \text{ см}$.

12.25. С помощью поляризатора и “пластинки в $\lambda/4$ ”.